ACTIVITÉS SUR LES POLYNÔMES

Activité 5

Polynômes cyclotomiques

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et U_n l'ensemble des racines n-ièmes de 1 dans $\mathbb{C}$:

$$\mathrm{U}_n = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}} \ / \ k \text{ entier, } 0 \leq k \leq n-1 \right\}.$$

On dit que $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ est une racine primitive n-ième de 1 dans $\mathbb{C}$ lorsque k et n sont premiers entre eux (ce qui nécessite k différent de 0).

1) Déterminer les racines primitives n-ièmes de 1 dans $\mathbb{C}$ pour

$$n \in \{2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 16, 20, 24\}.$$

2) On appelle polynôme cyclotomique d'indice n, le polynôme ϕ_n unitaire ayant pour racines (simples) les racines primitives n-ièmes de 1 dans $\mathbb{C}$.
Exprimer $\phi_n(x)$ pour tous les entiers n de la question 1). (Sous forme développée, on vérifiera que les coefficients de ϕ_n sont des entiers relatifs pour tous les entiers n du 1). Ce résultat se généralise à tout entier $n \geq 2$.)

3) Pour tous les entiers n du 1), exprimer $\phi_n(x)$ sous forme de produit de polynômes à coefficients réels, irréductibles sur l'ensemble des polynômes à coefficients réels. En déduire que ϕ_n est irréductible sur l'ensemble des polynômes à coefficients rationnels pour tous les entiers n du 1). (Ce résultat se généralise à tout entier $n \geq 2$.)

Commentaires :

• Pour obtenir la forme développée de $\phi_n(x)$ on fera constater qu'une racine n-ième de 1 dans $\mathbb{C}$ n'est pas racine primitive k-ième de 1 dans $\mathbb{C}$ lorsque k est multiple de n ; ainsi pour obtenir $\phi_8(x)$, on divisera $x^8 - 1$ par $x^4 - 1$.

• Pour factoriser ϕ_n dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$, il faudra regrouper les racines primitives n-ièmes conjuguées et utiliser $\cos\frac{\pi}{5}$, $\sin\frac{\pi}{5}$, $\cos\frac{\pi}{8}$, $\sin\frac{\pi}{8}$, $\cos\frac{\pi}{12}$, $\sin\frac{\pi}{12}$, etc.

• On peut prolonger cette activité en vérifiant pour les entiers n proposés que, en posant $\phi_1(x) = x - 1$, on a

$$x^n - 1 = \prod_{d|n} \phi_d(x),$$

et annoncer que ce résultat se généralise à tout entier $n \geq 2$.