

Paradoxe de Curry Quatrième partie

Dans les articles précédents, on a vu les redoutables conséquences apportées par l'analyse logique de la phrase suivante, découverte par Haskell Curry :

Si cette phrase est vraie, alors Dieu existe sans exister

Comme une implication n'est fausse que lorsque sa prémisse est vraie et sa conclusion fausse, lorsqu'un raisonnement basé sur des implications mène à une évidente contradiction, c'est que le point de départ du raisonnement (ou l'une des étapes intermédiaires), est faux. Ainsi Haskell Curry semble avoir démontré quelque chose par l'absurde, mais quoi ? On rappelle les différentes étapes du raisonnement :

On est implicitement parti du *tiers exclu*, pour ramener le raisonnement à une disjonction de deux cas : La phrase est vraie, ou elle est fausse. Dans le cas où la phrase est vraie, on a utilisé le *modus ponens* pour dire que, si elle est vraie, alors Dieu existe et en même temps, n'existe pas. Dans le cas où la phrase est fausse, on a utilisé la définition de $p \Rightarrow q$ comme $\neg p \vee q$ pour déduire sa vérité de sa fausseté. On peut alors imaginer de résoudre le paradoxe de Curry de trois manières :

- On peut refuser la définition de l'implication et notamment admettre que des implications comme « si $2+2=5$ alors il fait beau » ne soient pas vraies, puisqu'on ne voit pas de lien de cause à effet entre la prémisse et la conclusion. Mais si on refuse que « si $2+2=5$ alors $2+2=3$ »¹ soit vrai, alors on renonce à la possibilité de faire des démonstrations par l'absurde. Et finalement, « si $2+2=5$ alors $2+2=4$ » donne par contraposition « si $2+2 \neq 4$ alors $2+2 \neq 5$ » qui n'a pas de raison d'être fausse.
- On peut ne pas considérer comme équivalentes les propositions « $2+2=4$ » et « il est vrai que $2+2=4$ ». Aussi bizarre que cela puisse paraître, ce choix a été fait par Alfred Tarski (1901-1983) pour qui le mot qui fâche est "cette" : Pour décrire des faits, on utilise un langage, mais pour décrire un langage on utilise un *métalangage*. Pour Tarski, mélanger le langage avec le métalangage n'a aucun sens, et des phrases autoréférentielles comme celle de Curry sont tout simplement vides de sens. Pour Tarski, il n'y a donc pas de paradoxe dans la phrase de Curry, il n'y a tout simplement ... rien !
- On peut refuser le tiers exclu et dire que la phrase de Curry n'est ni vraie, ni fausse². On remarque que la position de Tarski est proche de ce point de vue, puisque "vide de sens" n'est ni "vrai", ni "faux". Ceci dit, refuser le tiers exclu c'est admettre qu'une *proposition* peut n'être ni vraie ni fausse, alors que Tarski considérait comme vides de sens (donc ni vraies ni fausses) des phrases auxquelles il refusait le statut de proposition.

On verra dans le prochain article ce qui se passe quand on exclut le tiers exclu...

1. Lorsqu'un de ses étudiants a demandé à Bertrand Russel (1872-1970) si « si $2+2=5$ alors je suis le Pape » est vraiment vrai, Bertrand Russel a démontré cette proposition ainsi : Supposons que $2+2=5$; alors en soustrayant 2 à chaque membre on obtient $2=3$; en soustrayant 1 à chaque membre on en déduit que $1=2$; or le Pape et moi sommes deux, mais comme $2=1$ le Pape et moi sommes 1 : Je suis le Pape cqfd.

2. Comme disait Sherlock Holmes, « Quand on a épuisé toutes les possibilités, celle qui reste, aussi improbable qu'elle soit, ne peut être que la vérité. »