

Paradoxe de Curry

Première partie

Haskell Curry (1900-1982) a, en 1942, découvert un paradoxe qu'on peut décrire par cette phrase autoréférentielle :

Si cette phrase est vraie, alors Dieu existe

D'apparence très innocente, cette phrase mène, lorsqu'on essaye de l'analyser logiquement, à des découvertes surprenantes concernant la logique elle-même. Dans cet article on va voir comment fonctionne la phrase, et dans les articles suivants, comment elle met en danger les fondations de la logique mathématique. Mais d'abord, quelques rappels sur les principes de la logique d'Aristote :

Un principe basique et connu d'Aristote¹ est le *tiers exclu* : « Toute proposition est, soit vraie, soit fausse ». Un autre est la définition de l'implication entre deux propositions p et q , notée $p \Rightarrow q$, et équivalente à $\neg p \vee q$ (soit p est fausse, soit q est vraie). Il lui correspond la principale règle de déduction utilisée en logique, le *modus ponens* : Une fois qu'on a prouvé p et $p \Rightarrow q$, on considère q comme prouvée également. Ceci est l'essentiel des outils dont on aura besoin pour analyser la phrase de Curry.

Le tiers exclu permet d'analyser cette phrase par disjonction des cas, puisqu'ici il n'y a que deux cas : Soit la phrase est vraie, soit elle est fausse. On va commencer par analyser le second cas :

- Supposons que la phrase soit fausse. La phrase est une implication, et il n'y a qu'un seul cas où une implication est considérée comme fausse : C'est lorsque sa prémisse est vraie et sa conclusion est fausse. Par exemple, une implication comme « si $2+2=4$ alors $2+2=5$ » est fausse parce qu'on ne peut pas déduire que $2+2=5$, du fait que $2+2=4$. Ainsi, si la phrase de Curry est fausse, c'est que
 - Sa prémisse « cette phrase est vraie », est elle-même vraie ;
 - sa conclusion « Dieu existe » est fausse.En particulier, si la phrase est fausse alors sa prémisse est vraie, et comme cette prémisse est la phrase elle-même, la phrase est vraie si elle est fausse ! On en déduit que finalement
 - ou bien la phrase est vraie,
 - ou bien elle est fausse et dans ce cas elle est vraie quand même...Alors il n'y a plus que le second cas à analyser puisque dans tous les cas, la phrase est vraie...
- Si la phrase est vraie, il s'agit d'une implication vraie. Et comme sa prémisse (la phrase elle-même) est vraie, le *modus ponens* s'applique alors, et permet de conclure que la conclusion est vraie aussi.

En une seule phrase, Curry a démontré l'existence de Dieu. Qui dit mieux ?

1. « Il n'est pas possible qu'il y ait aucun intermédiaire entre les énoncés contradictoires : il faut nécessairement ou affirmer ou nier un seul prédicat, quel qu'il soit » dans *Metaphysique*