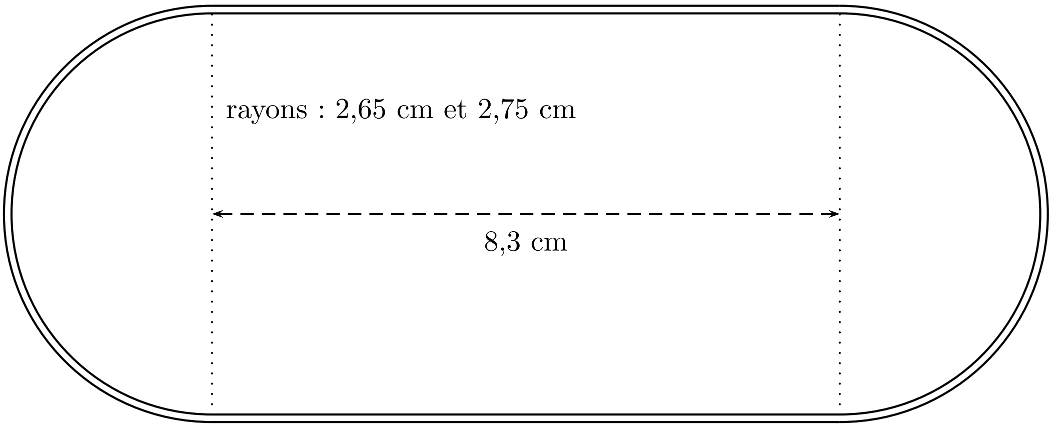
Ce document est un exemple de corrigé du sujet du groupement 3 proposé le 10 avril 2018 au concours de professeur des écoles, il ne s'agit pas d'un corrigé officiel.

1

PREMIÈRE PARTIE

1. Pour effecteur un tour de piste, l'athlète doit effectuer deux lignes droites de longueur 100 m et deux demi-tours de rayon $r = 31,83$ m.
   On a alors : $L = 2 \times 100 \text{ m} + 2 \times \pi \times 31,83 \text{ m} \approx 399,99$ m.
   $\boxed{\text{Un tour de piste effectué en couloir 1 mesure environ 400 m.}}$

2. Pour dessiner le couloir n˚1, il faut tracer quatre segments qui correspondent aux lignes droites de mesure 100 m. Il faut également tracer deux demi-cercles de rayon 31,83 m et deux demi-cercles de rayon $31,83 \text{ m} + 1,22 \text{ m} = 33,05$ m.
   À l'échelle 1/1 200, cela correspond aux mesures suivantes : $100 \text{ m}/1\,200 \approx 0,083 \text{ m} \approx 8,3$ cm ; $31,83 \text{ m}/1\,200 \approx 0,0265 \text{ m} \approx 2,65$ cm et $33,05 \text{ m}/1\,200 \approx 0,0275 \text{ m} \approx 2,75$ cm.



3. Sur une course de 200 m, si les athlètes commencent tous sur la même ligne de départ perpendiculaire aux lignes droites, plus les coureurs sont éloignés du couloir n˚1 plus ils vont parcourir de distance puisque le rayon du demi-cercle va augmenter. Pour palier à cette injustice, il faut décaler les départs ou les arrivées. Or, pour simplifier la prise de durée et pour la beauté de l'épreuve, il est préférable que la ligne d'arrivée soit la même pour tout le monde, donc on décale les départs.

4. (a) Au couloir n˚6, le bord intérieur est à une distance de $31,83 \text{ m} + 5 \times 1,22 \text{ m} = 37,93$ m.
   Si le coureur partait sur la ligne de départ matérialisée sur le schéma, il parcourrait une distance de $\pi \times 37,93 \text{ m} + 100 \text{ m} \approx 219,1606$ m. Il aura donc fait environ 19,16 m en trop.
   $\boxed{\text{Le décalage du coureur de couloir n˚6 est de 19,16 m.}}$

   (b) Un demi-tour mesure $\pi \times 37,93$ m et correspond à un angle de 180˚. Donc, pour 19,16 m, on a un angle de $\alpha = \dfrac{19,16 \text{ m}}{37,93\,\pi \text{ m}} \times 180^\circ \approx 28,94^\circ$.
   $\boxed{\text{La mesure de l'angle } \alpha \text{ est d'environ } 28{,}9^\circ.}$

(c) Il n'y a pas proportionnalité entre le numéro du couloir et la valeur de α puisque la courbe ne passe par par l'origine du repère (de plus, la courbe n'est pas une droite).

(d) Par lecture graphique, le couloir n°3 est compris $\boxed{\text{entre 13°et 14°.}}$

(e) On détermine tout d'abord la formule mathématique permettant de déterminer le décalage δ en mètre en fonction du numéro n de couloir :
$\delta = \pi \times (31,83 + (n-1) \times 1,22) + 100 - 200$
$= \pi((n-1) \times 1,22 + 31,83) - 100.$
Cette formule correspond à la $\boxed{\text{formule B.}}$

5. (a) vitesse $= \dfrac{\text{distance}}{\text{temps}}$ donc : $v = \dfrac{200 \text{ m}}{19,19 \text{ s}} = \dfrac{0,2 \text{ km}}{19,19 \div 3\,600 \text{ h}} \approx 37,52 \text{ km/h}.$

$\boxed{\text{La vitesse d'Usain Bolt sur 200 m est d'environ 37,5 km/h.}}$

(b) $v = \dfrac{d}{t} \iff t = \dfrac{d}{v} = \dfrac{42,195 \text{ km}}{37,52 \text{ km/h}} \approx 1,125 \text{ h}.$
Or, 1,125 h = 1 h + 0,125 h
= 1 h + 0,125×60 min
= 1 h + 7,5 min
= 1h + 7 min + 30 s.

$\boxed{\text{À cette allure, Usain Bolt mettrait 1 h 7 min 30 s pour arriver au bout d'un marathon.}}$

(c) $p = \dfrac{t_{\text{Bolt}} - t_{\text{Johnson}}}{t_{\text{Johnson}}} \times 100 = \dfrac{19,19 \text{ s} - 19,32 \text{ s}}{19,32 \text{ s}} \times 100 \approx -0,67.$

$\boxed{\text{Usain Bolt a réduit le temps de Michael Johnson de 0,67 \%.}}$

2

DEUXIÈME PARTIE

EXERCICE 1

1. Les points M et B sont des points du cercle $\mathcal{C}$ de centre O donc : OM = OB.
   M est un point de la médiatrice de [OB] donc, MO = MB.
   On en déduit que OM = OB = MB et $\boxed{\text{le triangle OMB est équilatéral.}}$

2. le segment [AB] est un diamètre du cercle de centre O de rayon r donc, OA = OB = r.
   Le point S est le symétrique du point M par rapport à O donc, [SM] est un autre diamètre de ce cercle et OM = OS = r. Le quadrilatère AMBS a ses diagonales de même longueur et qui se coupent en leur milieu, donc $\boxed{\text{c'est un rectangle.}}$

3. Dans le triangle AMB rectangle en M, on utilise le théorème de Pythagore (mesures en cm) :
   $\mathrm{AB}^2 = \mathrm{AM}^2 + \mathrm{MB}^2 \iff \mathrm{AM}^2 = 10^2 - 5^2 = 75$, soit $AB = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$.
   L'aire du rectangle AMBS vaut alors $\mathcal{A} = \mathrm{AM} \times \mathrm{MB} = 5\sqrt{3}\text{ cm} \times 5\text{ cm} = 25\sqrt{3}\text{ cm}^2$.
   $\boxed{\text{Le rectangle AMBS a une aire de } 25\sqrt{3}\text{ cm}^2.}$

4. On a déjà démontré en question 1. que MO = MB.
   De plus, N est sur la médiatrice de [OB] donc NO = NB.
   M et N étant des points du cercle, on a ON = OM, d'où BM = MO = ON = NB et les quatre côtés sont de même mesure. $\boxed{\text{Le quadrilatère OMBN est un losange.}}$

EXERCICE 2

1. $126 = 2^1 \times 3^2 \times 7^1$ donc, 126 possède $(1+1)\times(2+1)\times(1+1)$ diviseurs $= 2 \times 3 \times 2$ diviseurs $= 12$ diviseurs (ces diviseurs sont : 1 - 2 - 3 - 6 - 7 - 9 - 14 - 18 -21 - 42 - 63 - 126).
   $\boxed{\text{L'affirmation est fausse.}}$

2. Un rectangle A de largeur 1 cm et de longueur 5 cm a pour périmètre $2\times(1\text{ cm}+5\text{ cm}) = 12$ cm et pour aire $1\text{ cm} \times 5\text{ cm} = 5\text{ cm}^2$.
   Un rectangle B de largeur 2 cm et de longueur 3 cm a pour périmètre $2\times(2\text{ cm}+3\text{ cm}) = 10$ cm et pour aire $2\text{ cm} \times 3\text{ cm} = 6\text{ cm}^2$.
   Le périmètre de A est supérieur au périmètre de B mais l'aire de A est inférieure à l'aire de B.
   $\boxed{\text{L'affirmation est fausse.}}$

3. Une augmentation de 5 % correspond à un coefficient multiplicateur de $1 + \dfrac{5}{100} = 1,05$.
   Au bout de 15 ans, le coefficient sera de $1,05^{15} \approx 2,08 > 2$.
   $\boxed{\text{L'affirmation est vraie.}}$

4. La réduction des dimensions d'un objet par 5 diminue les aires par $5^2 = 25$ et les volumes et capacités par $5^3 = 125$.
   $\boxed{\text{L'affirmation est fausse.}}$

EXERCICE 3

On remarque que sur le dessin obtenu, les carrés ont été collés alors qu'il ont un décalage de 20 pixels sur le dessin d'origine. Ceci est dû au fait que le saut de 20 pixels est effectué au moment où le carré est terminé, lorsque le crayon se retrouve à sa position d'origine, il faut donc effectuer un saut de 20 pixels pour arriver au coin du carré, puis de 20 pixels pour laisser un espace, soit 40 pixels.
De plus, il faut dessiner 8 carrés alors qu'il est indiqué de faire 7 répétitions.

Il faut remplacer 7 par 8 dans le bloc « répéter 7 fois » et 20 par 40 dans le bloc « Saute en avant de 20 pixels »

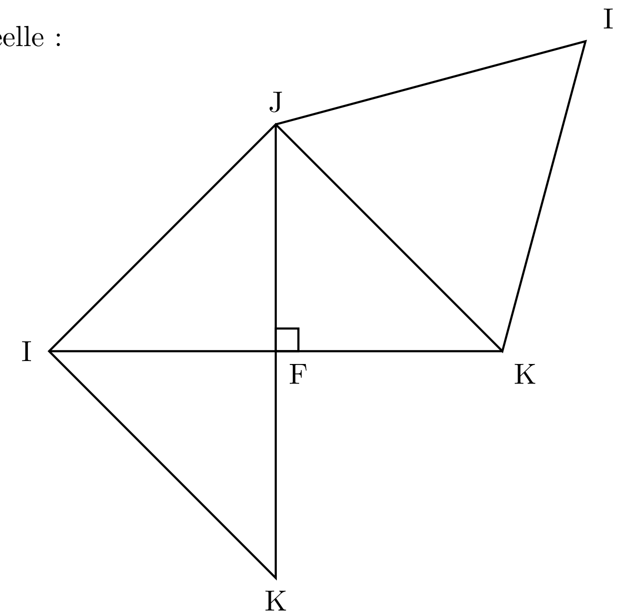
EXERCICE 4

1. I, J et K sont les milieux respectifs des segments [FE], [FG] et [FB] qui sont des arêtes du cube. On a donc FI = FJ = FK = 3 cm. De plus, F est un sommet du cube ce qui signifie que les angles $\widehat{\text{IFK}}, \widehat{\text{KFJ}}$ et $\widehat{\text{JFI}}$ sont droits. Les triangles IFK, KFG et JFI sont donc isométriques et IK = KJ = JI. Le triangle IJK est un triangle équilatéral.

2. On a $V_{\text{tétraèdre}} = \dfrac{1}{3} \times \mathcal{A}_{\text{FIJ}} \times \ \text{FK} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{3 \text{ cm} \times 3 \text{ cm}}{2} \times 3 \text{ cm} = 4,5 \text{ cm}^3$.

   Le volume du tétraèdre FIJK est de 4,5 cm^3.

3. Patron à taille réelle :



4. On peut démontrer de manière analogue à la question 1. que toutes les arêtes du cuboctaèdre sont de même longueur et donc que tous les tétraèdre ôtés sont isométriques.
   (a) $\mathcal{V}_{\text{cuboctaèdre}} = \mathcal{V}_{\text{cube}} - 8\mathcal{V}_{\text{tétraèdre}} = (6 \text{ cm})^3 - 8 \times 4,5 \text{ cm}^3 = 180 \text{ cm}^3$.

   Le volume du cuboctaèdre est de 180 cm^3.

   (b) Le cuboctaèdre possède 3 arêtes à chaque « coin » ôté du cube, soit 8×3 arêtes = 24 arêtes. Calculons par exemple IK : dans le triangle IFK rectangle en F, d'après le théorème de Pythagore avec des mesures en centimètre on a
   $\text{IK}^2 = \text{IF}^2 + \text{FK}^2 = 3^2 + 3^2 = 18$, donc $\text{IK} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.
   D'où, la longueur totale des arêtes vaut $24 \times 3\sqrt{2} = 72\sqrt{2} \approx 101,82$.

   La longueur totale des arêtes du cuboctaèdre vaut environ 101,8 cm.

3

TROISIÈME PARTIE

SITUATION 1

1. On peut utiliser les procédures suivantes :
   — On a 30 dragées, soit 4 fois moins de dragées puisque 120 dragées ÷ 4 = 30 dragées donc, la masse de 30 dragées est 4 fois plus petite et vaut 360 g ÷ 4 = 90 g.
   Utilisation d'un coefficient scalaire (coefficient de linéarité multiplicative) égal à 1÷4.
   — 120 × 3 = 360 donc, 30×3 =90. La masse de 30 dragées est de 90 g.
   Utilisation du coefficient de proportionnalité qui vaut 30.
   — 120 dragées pèsent 360 g donc, une dragée pèse $\dfrac{360 \text{ g}}{120} = 3$ g.
   D'où 30 dragées pèsent 30 × 3 g = 90 g.
   Utilisation du passage par l'unité.
2. Pour « espérer » une procédure par retour à l'unité, il faut notamment que les autres procédures soient moins évidentes. Or, les nombres en jeu sont propices à l'utilisation d'un coefficient scalaire (un quart) ou de proportionnalité (30) qui sont simples à obtenir mentalement.
   On pourrait donc, par exemple, modifier l'énoncé de la façon suivante :

Une boîte contient des dragées toutes identiques. 120 dragées pèsent 270 g. Combien pèsent 32 dragées ?

   Le coefficient scalaire devient 3,75 et le coefficient de proportionnalité 2,25 qui ne sont pas des coefficients « simples ».

SITUATION 2

1. On peut citer les objectifs d'apprentissage suivants :
   — un objectif général : résolution d'un problème (en groupe) ;
   — un objectif disciplinaire : travailler le champ additif (addition à cinq nombres) et une approche de la division partition.

2. Analyse des productions des groupes 1 et 2.
   (a) — Pour le **groupe 1**, les élèves ont additionné toutes les dizaines des nombres en présence, il y en a quatre ce qui fait 40, puis ils ont ajouté à ce nombre les unités restantes : 2 pour Lisa, 1 pour Camille, 9 pour Ilyes et 3 pour Nora. Ils ont trouvé 55 (cependant, l'écriture mathématique est fausse puisque les calculs sont faits les uns derrière les autres).
   — Pour le **groupe 2**, ils additionnent les nombres en présence par deux : tout d'abord Lisa et Luc, puis Camille et Ilyes. Ensuite, ils additionnent les deux résultats trouvés, et enfin ils additionnent le dernier nombre, celui de Nora.
   (b) — **Point commun** : les deux groupes ont additionné les bonbons puis les ont « partagés » grâce à un schéma.
   — **Différences** : au niveau de l'addition, le groupe 1 a séparé les dizaines et les unités alors que le groupe 2 a additionné les nombres un par un.
   Au niveau du partage, le groupe 1 a écrit la division 55 : 5 et on a l'impression qu'il a trouvé la solution mentalement puis l'a vérifiée par un schéma (les lignes verticales formées par les points modélisant les bonbons semblent faites en une seule fois) alors que dans le groupe 2, il est possible qu'ils aient distribué un par un les bonbons aux cinq élèves jusqu'à 55 sans se poser la question de l'opération en jeu. La vérification se fait alors à la fin par un calcul en ligne.

3. Difficultés rencontrées par le groupe 3 :
   — la première difficulté a été d'effectuer l'addition en ligne des cinq nombres : les élèves sont capables de faire des additions en ligne à deux chiffres (Lisa-Luc et Camille-Ilyes), mais ensuite ont du mal à trouver la somme totale qui est fausse. Ils ont fini par modéliser la situation par un schéma et compter un à un les bonbons ;
   — la seconde difficulté provient de la résolution du problème : ils n'ont pas répondu à la question (parce qu'ils ne savaient pas le faire, ou parce qu'ils n'ont pas compris la consigne ?) et se sont arrêté au résultat 55 qu'ils ont encadré.

SITUATION 3

1. Procédure utilisées pour résoudre le problème.
   — **Production n°1** : procédure progressive dans le champ additif (additions).
   L'élève additionne le nombre 12 cinq fois à la suite, il trouve 60. Ce nombre étant supérieur à 56, il barre un « 12 » et recalcule la somme qui vaut 48. Ce nombre est inférieur à 56. Ensuite, il effectue la soustraction de 48 à 56 pour trouver le nombre de billes restantes. Il lui reste à compter le nombre de « 12 » additionnés pour conclure qu'il peut faire 4 paquets de 12 billes et qu'il en reste 8.
   — **Production n°2** : procédure progressive dans le champ additif (soustractions).
   L'élève soustrait 12 à 56 pour trouver 44, puis il réitère ce procédé jusqu'à trouver un nombre inférieur à 12 (on note que, même si la procédure est correcte, l'écriture mathématique en colonnes n'est pas valable à partir du deuxième calcul). Il note à côté chaque paquet de 12 qu'il soustrait, il en trouve 4 et il reste 8 billes.
   — **Production n°3** : procédure progressive dans le champ multiplicatif (multiplications).
   Cet élève calcule le répertoire multiplicatif du 12 jusqu'à obtenir un encadrement de 56, il semble effectuer les calculs en additionnant à chaque fois 12, étant donné son erreur à 12×4 (il a un écart de 2 avec le résultat réel, cet écart est répercuté sur le dernier calcul). Sa réponse est cohérente.

2. Les procédures mises en œuvre sont acceptables puisqu'elles ne demandent pas trop de calculs : tous les élèves effectuent des calculs de proche en proche qui aboutissent assez rapidement au résultat. Cependant, si on choisissait un nombre bien plus grand (par exemple 1 246), les calculs seraient trop longs et fastidieux et les élèves devraient penser à une autre procédure. On peut également faire varier le nombre de billes dans chaque sac (par exemple 57) pour que les calculs soient moins évidents à calculer mentalement.
   Cette situation est donc intéressante dans un premier temps et doit évoluer par la suite avec des nombres plus grands afin de transiter petit à petit vers la méthode experte qui consiste à effectuer une division euclidienne pour une division-quotition.

3. On peut citer les connaissances ou capacités suivantes :
   — connaissance : connaître ses tables de multiplication et d'addition ;
   — capacité : effectuer une multiplication, une soustraction (pour les calculs intermédiaires) ;
   — capacité : savoir faire une approximation afin de trouver le nombre de chiffres au quotient ainsi que le meilleur nombre au quotient par exemple par essai-erreur.