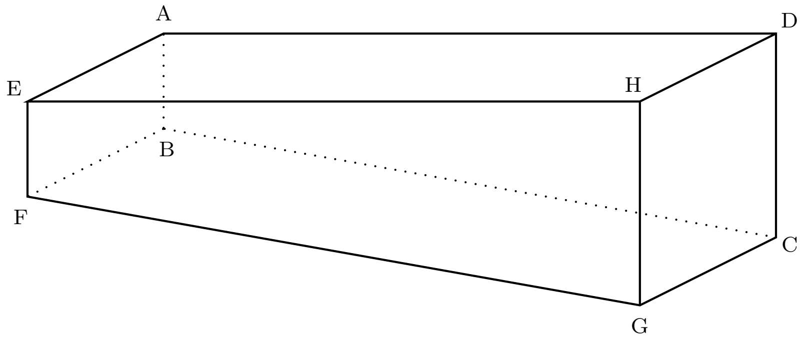
Ce document est un exemple de corrigé du sujet du groupement 1 proposé en avril 2016 au concours de professeur des écoles. Il ne s'agit pas d'un corrigé officiel.
Le sujet initial est indiqué en noir, la correction est en bleu et les remarques en magenta.

1

PREMIÈRE PARTIE (13 points)

Monsieur Durand souhaite faire construire une piscine. Cette piscine est représentée sur le schéma ci-dessous, qui n'est pas à l'échelle.



— La surface horizontale apparente EADH est rectangulaire ;
— le fond FBCG, également rectangulaire, est en pente douce ;
— les parois verticales EABF et HDCG sont rectangulaires ;
— la paroi verticale ABCD est un trapèze rectangle en A et D ;
— la paroi verticale EFGH est un trapèze rectangle en E et H ;

La piscine peut être vue comme un prisme droit de bases trapézoïdales ABCD et EFGH.

Dimensions de la piscine de Monsieur Durand
La profondeur minimale EF et la profondeur maximale HG de la piscine sont fixées :

$$\text{EF} = 1{,}10 \text{ m et HG} = 1{,}50 \text{ m.}$$

La longueur EH et la largeur AE de la piscine restent à déterminer.
Pour des raisons d'esthétique, Monsieur Durand souhaite que **la longueur de la piscine soit égale à 1,6 fois sa largeur.**

On rappelle les formules suivantes :

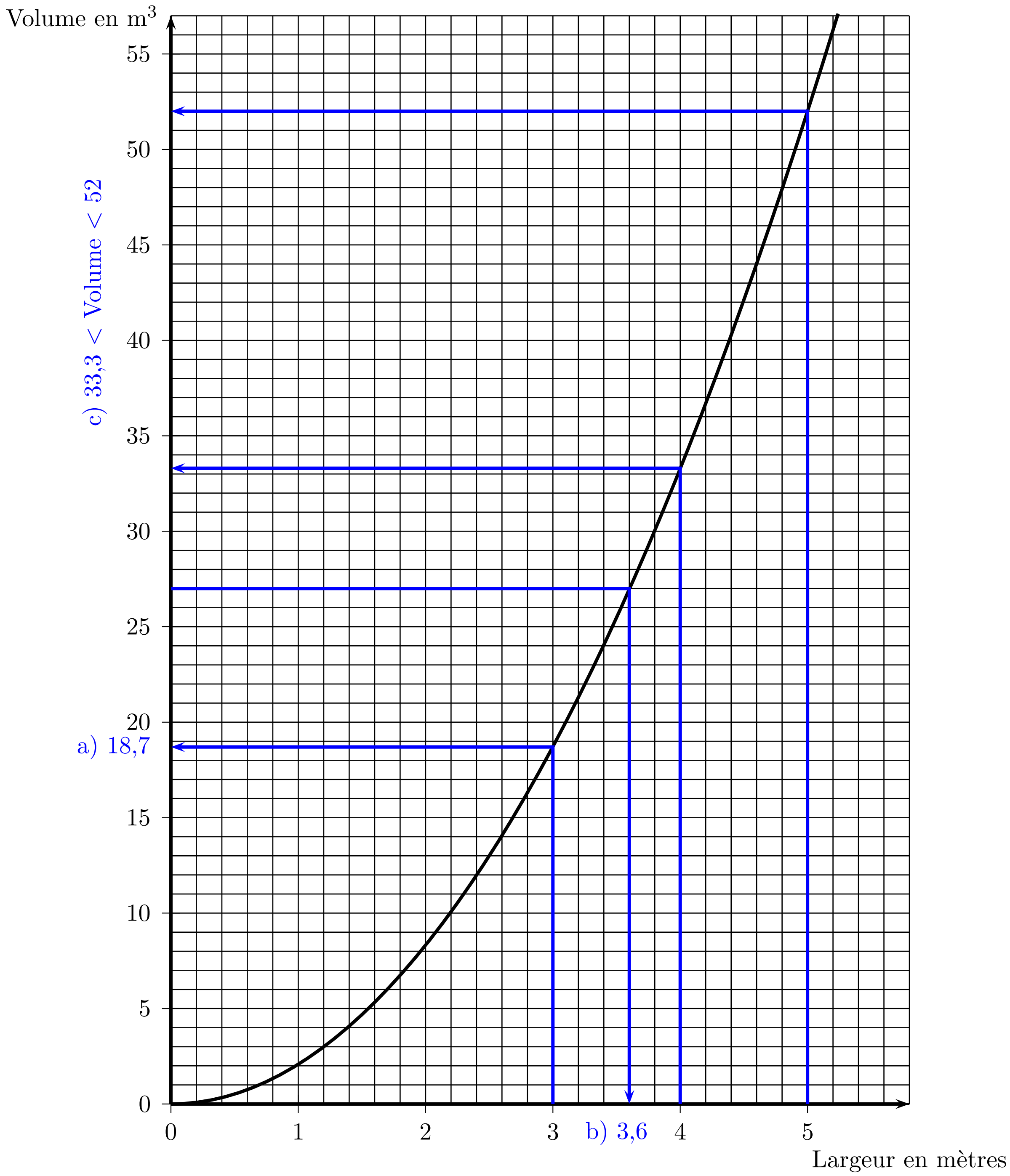
$$\text{Aire du trapèze} = \frac{(\text{grande base} + \text{petite base}) \times \text{hauteur}}{2}$$

$$\text{Volume du prisme droit} = \text{aire de la base} \times \text{hauteur}$$

A. Volume de la piscine

1. Étude graphique

Le graphique donné ci-après représente le volume, en mètre cube, de la piscine en fonction de sa largeur, en mètre.



Répondre par lecture graphique aux questions suivantes :

a) Quel est le volume, en mètre cube, de la piscine si sa largeur vaut 3 m ? Arrondir à l'unité.

Par lecture graphique, on cherche l'image de 3 et on lit environ 18,7.

Le volume de la piscine pour une largeur de 3 m est de 19 m^3 environ.

b) Quelle est la largeur, en mètre, de la piscine si son volume est 27 m^3 ? Arrondir au dixième.

Par lecture graphique, on cherche l'antécédent de 27 et on lit environ 3,6.

Si le volume de la piscine est de 27 m^3, la largeur est de 3,6 m environ.

c) Donner un encadrement du volume, en mètre cube, de la piscine si sa largeur comprise entre 4 m et 5 m. Arrondir les valeurs utilisées à l'unité.

Par lecture graphique, on cherche l'image de l'intervalle $[\,4\,;5\,]$ et on lit environ $[\,33{,}3\,;52\,]$.

Pour une largeur comprise entre 4 m et 5 m le volume sera compris entre 33 m^3 et 52 m^3 environ.

2. Étude algébrique

Dans toute cette partie, les mesures de longueur sont exprimées en mètre, les mesures d'aire en mètre carré et les mesures de volume en mètre cube.

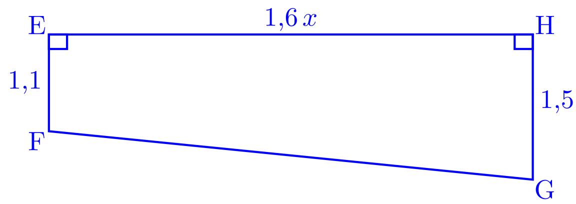
a) Démontrer que le volume de la piscine, exprimé en mètre cube, est donné par la formule

$$V(x) = 2,08\,x^2$$

où x désigne la largeur, en mètre, de la piscine.

Le prisme est composé d'une base trapézoïdale EFGH. Celle-ci, d'après les données de l'énoncé, est un trapèze rectangle en E et H. [1]

La largeur de la piscine est x, sa longueur est donc $1,6\,x$ d'après l'énoncé. On a la figure suivante de la base du trapèze (qui n'est pas à l'échelle) :



- Déterminons l'aire de la base du prisme :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\text{EFGH}}(x) &= \frac{(\text{EF} + \text{HG}) \times \text{EH}}{2} \\ &= \frac{(1,1 + 1,5) \times 1,6\,x}{2} \\ &= \frac{2,6 \times 1,6\,x}{2} \\ \mathcal{A}_{\text{EFGH}}(x) &= 2,08\,x \end{aligned}$$

- Déterminons le volume de la piscine :

$$\begin{aligned} V(x) &= \mathcal{A}_{\text{EFGH}}(x) \times \text{EA} \\ &= 2,08\,x \times x \\ V(x) &= 2,08\,x^2 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Le volume de la piscine pour une largeur de } x \text{ mètres est de } V(x) = 2,08\,x^2 \text{ mètres cubes.}}$

b) Déterminer par le calcul la valeur exacte de la largeur de la piscine correspondant à un volume de 52 m^3.

On résout l'équation suivante :

$$\begin{aligned} V(x) &= 52 \\ 2,08\,x^2 &= 52 \\ x^2 &= \frac{52}{2,08} \\ x^2 &= 25 \\ x &= 5 \text{ ou } x = -5 \end{aligned}$$

La largeur étant un nombre strictement positif, on peut conclure.

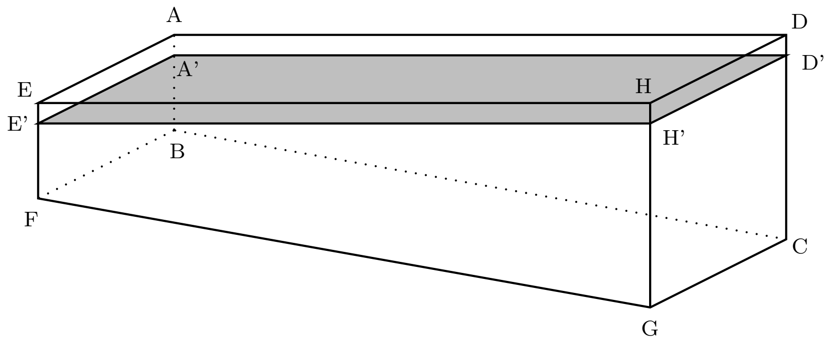
$\boxed{\text{Un volume de 52 m}^3 \text{ correspond à une largeur de 5 m.}}$

1. Attention, le schéma est quelque peu trompeur, et au premier coup d'oeil, on aurait pu croire que le trapèze était rectangle en F et G. Il faut toujours bien lire l'énoncé et ne pas se fier uniquement aux schémas. L'idéal est de faire une figure dans le plan.

B. Mise en eau

Monsieur Durand a choisi pour sa piscine une largeur de 5 m et une longueur de 8 m.
Cette piscine est maintenant construite.

1. Monsieur Durand souhaite que le niveau d'eau soit à 10 cm du bord de la piscine. Le schéma ci-dessous n'est pas à l'échelle.



a) Montrer que la piscine contient alors 48 m^3 d'eau. On peut utiliser les résultats de la partie A.

Le solide AEHDD'H'E'A' est un pavé droit puisque[2] :

- la surface AEHD est horizontale et de forme rectangulaire ;
- le niveau de l'eau est horizontal, et les droites (EA), (AD), (DH) et (HE) sont parallèles respectivement aux droites (E'A'),(A'D'), (D'H') et (H'E') donc, le quadrilatère A'E'H'D' est aussi un rectangle isométrique à AEHD ;
- la paroi AEE'A', qui est verticale, est perpendiculaire à AEHD qui est horizontale.

Pour déterminer le volume de l'eau, il suffit donc de soustraire le volume du pavé AEHDD'H'E'A' à celui de la piscine. On a :

$$\begin{aligned}\text{Volume d'eau} &= V(5) - \text{EA} \times \text{EE'} \times \text{EH} \\ &= 2,08 \times 5^2 - 5 \times 0,1 \times (1,6 \times 5) \\ &= 52 - 4 \\ \text{Volume d'eau} &= 48\end{aligned}$$

$\boxed{\text{La piscine contient 48 m}^3 \text{ d'eau.}}$

b) Monsieur Durand utilise un tuyau d'arrosage dont le débit est de 18 litres par minute. Quelle est la durée de remplissage de la piscine ?
Donner la réponse en jours, heures et minutes, arrondie à la minute.
On a la correspondance : 1 L = 1 dm^3 donc, 1 000 L = 1 000 dm^3 = 1 m^3.
La piscine a alors une capacité de 48 000 litres d'eau.
Sachant que le débit du tuyau est de 18 litres par minute, le calcul $48\,000 \div 18 \approx 2\,666,67$ nous donne une durée d'environ 2 667 minutes pour remplir la piscine.
Or, $2\,667 = 44 \times 60 + 27$ donc, 2 667 min = 44 h 27 min.
Et, $44 = 24 + 20$ donc, 44 h = 1 j 20 h. On peut alors conclure :

$\boxed{\text{M. Durand devra patienter un jour 20 heures et 27 minutes avant que sa piscine ne soit remplie.}}$

2. Fallait-il le démontrer ou simplement l'affirmer ? Personnellement, j'opterais pour la seconde solution…

2. Un dimanche matin à 8 h, le volume d'eau de la piscine est de 48 m^3. Le dimanche suivant à 8 h, Monsieur Durand constate que le niveau d'eau a baissé de 5 cm.

a) Déterminer la quantité d'eau perdue en une semaine.

Le volume d'eau perdue en une semaine correspond au volume d'eau contenue dans un pavé droit de dimensions 5 cm par 5 m par 8 m. Or, $0,05 \times 5 \times 8 = 2$, donc :

M. Durand a perdu 2 mètres cubes d'eau en une semaine.

b) Quel pourcentage de la quantité d'eau initiale cela représente-t-il ? Arrondir le résultat au dixième.

La perte est de 2 m^3 sur un total de 52 m^3.

Ce qui correspond à un pourcentage de $\dfrac{2}{48} \times 100 \approx 4,17\,\%$.

M. Durand a perdu environ 4,2 % de la quantité d'eau initiale en une semaine.

3. Monsieur Durand a dépensé 207 € pour l'eau utilisée pour sa piscine en 2015. Si le prix de l'eau augmente de 3 % par an, à combien peut-il estimer ce budget annuel en 2020 ?

Une augmentation de 3 % correspond à un coefficient multiplicateur de $1 + \dfrac{3}{100} = 1,03$.

On peut calculer de proche en proche le budget pour chaque année entre 2015 et 2020 [3] :

- budget en 2016 : $207\,€ \times 1,03 = 213,21\,€$;
- budget en 2017 : $213,21\,€ \times 1,03 \approx 219,61\,€$;
- budget en 2018 : $219,61\,€ \times 1,03 \approx 226,19\,€$; [4]
- budget en 2019 : $226,19\,€ \times 1,03 \approx 232,98\,€$;
- budget en 2020 : $232,98\,€ \times 1,03 \approx 239,97\,€$;

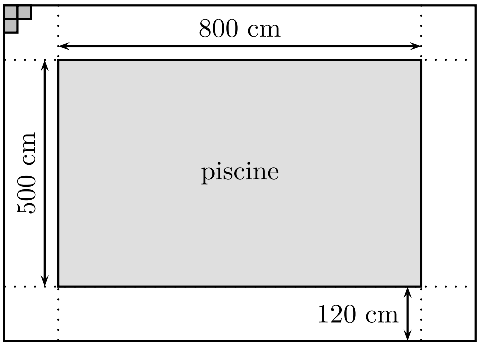
On peut estimer le budget annuel de M.Durand à environ 240 € en 2020.

3. Une solution élégante est d'effecteur un seul calcul pour arriver au résultat : entre 2015 et 2020, il y a cinq années. On peut donc calculer le budget annuel B en 2020 par la formule : $B = 207 \times 1,03^5 \approx 239,97$. Ce résultat est d'autant plus intéressant qu'il élimine les erreurs d'arrondis successifs.

4. Calcul effectué avec la valeur exacte en utilisant la fonction « réponse précédente » de la calculatrice.

C. Dallage du sol autour de la piscine

Monsieur Durand veut faire poser des dalles carrées autour de la piscine sur une largeur de 120 cm comme indiqué sur le schéma ci-après où on a représenté dans le coin supérieur gauche la disposition des premières dalles convenue avec le carreleur.
Les dalles utilisées sont toutes identiques et la longueur, en centimètres, de leur côté est un nombre entier.
On néglige l'épaisseur des joints.



1. Monsieur Durand souhaite ne pas avoir à couper de dalles. Quelles sont toutes les valeurs possibles pour la longueur du côté des dalles carrées ?
La mesure de la taille des dalles doit diviser à la fois la largeur de l'allée de 120 cm, la longueur totale du sol de 1 040 cm et la largeur totale du sol de 740 cm.
Décomposons en produit de facteurs premiers ces trois valeurs :

- $120 = 2^3 \times 3 \times 5$;
- $500 = 2^2 \times 5^3$;
- $800 = 2^5 \times 5^2$.

Le PGCD de 120, 500 et 800 est $2^2 \times 5 = 20$. Donc, la taille des dalles divise 20. Or, les diviseurs de 20 sont $1 ; 2 ; 4 ; 5 ; 10 ; 20$.

Les longueurs possibles des dalles sont 1 cm, 2 cm, 4 cm, 5 cm, 10 cm et 20 cm.

2. Monsieur Durand choisit des dalles carrées de 20 cm de côté.

a) Combien de dalles seront utilisées ?
On peut considérer que l'on a deux types d'allées : deux allées de 1 040 cm (120 cm + 800 cm + 120 cm) par 120 cm et deux allées de 500 cm par 120 cm.

- Dans le premier type d'allée, on peut poser $1\,040 \div 20 = 52$ dalles par $120 \div 20 = 6$ dalles, donc $52 \times 6 = 312$ dalles.
- Dans le second type d'allée, on peut poser $500 \div 20 = 25$ dalles par $120 \div 20 = 6$ dalles, donc $25 \times 6 = 150$ dalles.

Au total, on a donc 2×312 dalles $+ 2 \times 150$ dalles $= 924$ dalles.

M. Durand aura besoin de 924 dalles de 20 cm de côté pour couvrir son pourtour de piscine.

b) En déduire le nombre de dalles nécessaires, s'il avait choisi des dalles carrées de 5 cm de côté.
On a besoin de 16 dalles de 5 cm de côté pour couvrir une dalle de 20 cm de côté (la longueur du côté étant divisée par 4, son aire est divisée par 4^2). Il faut donc 16 fois plus de dalles de 5 cm pour couvrir la même surface. Or, $924 \times 16 = 14\,784$, d'où :

M. Durand aura besoin de 14 784 dalles de 5 cm de côté pour couvrir son pourtour de piscine.

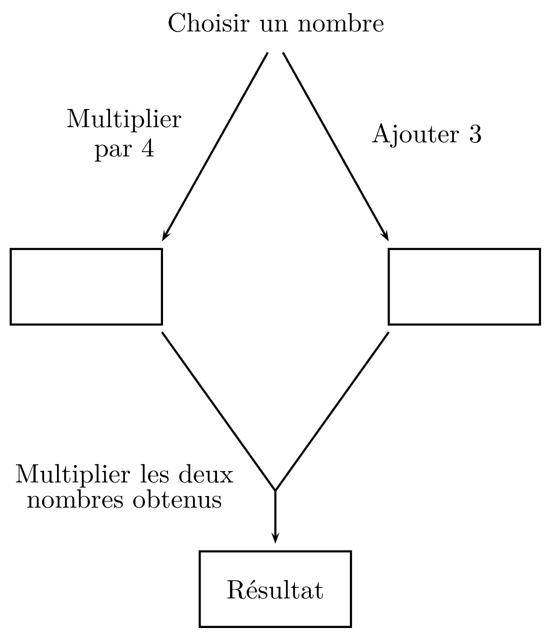
2

DEUXIÈME PARTIE (13 points)

Cette partie est constituée de quatre exercices indépendants.

EXERCICE 1

Voici deux programmes de calcul :

Programme 1	Programme 2
- Ouvrir une feuille de calcul de tableur. - Choisir un nombre. - Entrer ce nombre en cellule A1. - Saisir en cellule B1 la formule : =(2*A1+3)*(2*A1+3)-9 - Appuyer sur la touche « Entrer ». - Lire la valeur numérique affichée en cellule B1.	

1. a) Montrer que si on choisit 3 comme nombre de départ, alors le résultat obtenu avec chaque programme est 72.

Calcul avec le programme 1 :
$(2 \times 3 + 3)(2 \times 3 + 3) - 9 = 72$.

Calcul avec le programme 2 :
$(3 \times 4) \times (3 + 3) = 72$.

$\boxed{\text{En prenant 3 comme nombre de départ, on obtient 72 avec les deux programmes.}}$

b) Calculer le résultat obtenu avec chaque programme si on choisit $-\dfrac{5}{4}$ comme nombre de départ.

Calcul avec le programme 1 :

$\left(2 \times -\dfrac{5}{4} + 3\right)\left(2 \times -\dfrac{5}{4} + 3\right) - 9$

$= \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} - 9$

$= -\dfrac{35}{4}$.

Calcul avec le programme 2 :

$\left(-\dfrac{5}{4} \times 4\right)\left(-\dfrac{5}{4} + 3\right)$

$= -5 \times \dfrac{7}{4}$

$= -\dfrac{35}{4}$.

$\boxed{\text{En prenant } -\dfrac{5}{4} \text{ comme nombre de départ, on obtient } -\dfrac{35}{4} \text{ avec les deux programmes.}}$

2. Obtient-on toujours le même résultat avec les programmes 1 et 2 quel que soit le nombre choisi au départ ? Justifier.
Choisissons x comme valeur de départ. [5]

Expression avec le programme 1 :

$$\begin{aligned} P_1(x) &= (2 \times x + 3)(2 \times x + 3) - 9 \\ &= (2x + 3)^2 - 9 \\ &= (2x)^2 + 2 \times 2x \times 3 + 3^2 - 9 \\ &= 4x^2 + 12x + 9 - 9 \\ P_1(x) &= 4x^2 + 12x \end{aligned}$$

Expression avec le programme 2 :

$$\begin{aligned} P_2(x) &= (4 \times x) \times (x + 3) \\ &= 4x(x + 3) \\ P_2(x) &= 4x^2 + 12x. \end{aligned}$$

Les deux expressions obtenues sont égales quelle que soit la valeur x de départ.

$\boxed{\text{On obtient le même résultat avec les deux programmes quel que soit le nombre choisi au départ.}}$

3. Quel(s) nombre(s) faut-il choisir pour obtenir 0 avec le programme 1 ? Justifier.
D'après la question précédente, on peut utiliser l'une ou l'autre des deux expressions de chaque programme puisqu'il donnent le même résultat.
Choisissons le deuxième programme :

$$\begin{aligned} 4x(x + 3) = 0 &\iff 4x = 0 \text{ ou } x + 3 = 0 \\ &\iff x = 0 \text{ ou } x = -3 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Il faut choisir les nombres 0 ou } -3 \text{ pour obtenir 0 avec le programme 1.}}$

5. Attention, la seule donnée des deux réponses précédentes ne permet pas d'affirmer que le résultat est toujours le même. Lorsqu'on veut prouver qu'une proposition est fausse, il suffit d'un contre-exemple, mais pour montrer que la proposition est vraie, il faut le démontrer. Ici, cela revient à montrer que pour **tous** les nombres réels x de départ, le résultat est le même quel que soit le programme choisi.

EXERCICE 2

Pour chacune des affirmations ci-dessous, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Une réponse fausse n'enlève pas de points, une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. [6]

Affirmation 1 : « Le produit de deux nombres décimaux strictement positifs a et b est plus grand qu'au moins un de ces nombres. »
Soit $a = 0,5$ et $b = 0,8$, alors $a \times b = 0,5 \times 0,8 = 0,4$.
Or, $0,4$ est plus petit que a et plus petit que b.

$\boxed{\text{L'affirmation 1 est fausse.}}$ [7]

Affirmation 2 : « Pour tout nombre entier naturel n le nombre $(n+1)^2 - (n-1)^2$ est un multiple de 4. »

$$\begin{aligned}(n+1)^2 - (n-1)^2 &= (n^2 + 2n + 1) - (n^2 - 2n + 1) \\ &= n^2 + 2n + 1 - n^2 + 2n - 1 \\ (n+1)^2 - (n-1)^2 &= 4n\end{aligned}$$

Le nombre $4 \times n$ est bien un multiple de 4 quel que soit le nombre de départ n choisi.

$\boxed{\text{L'affirmation 2 est vraie.}}$

Affirmation 3 : « Pour tout nombre entier naturel n le nombre $(n-1)(n+1) - 1$ est le carré d'un nombre entier. »
Si on choisit par exemple $n = 1$, on a $(n-1)(n+1) - 1 = (1-1)(1+1) - 1 = -1$.
Or, -1 n'est clairement pas le carré d'un nombre entier.

$\boxed{\text{L'affirmation 3 est fausse.}}$ [8]

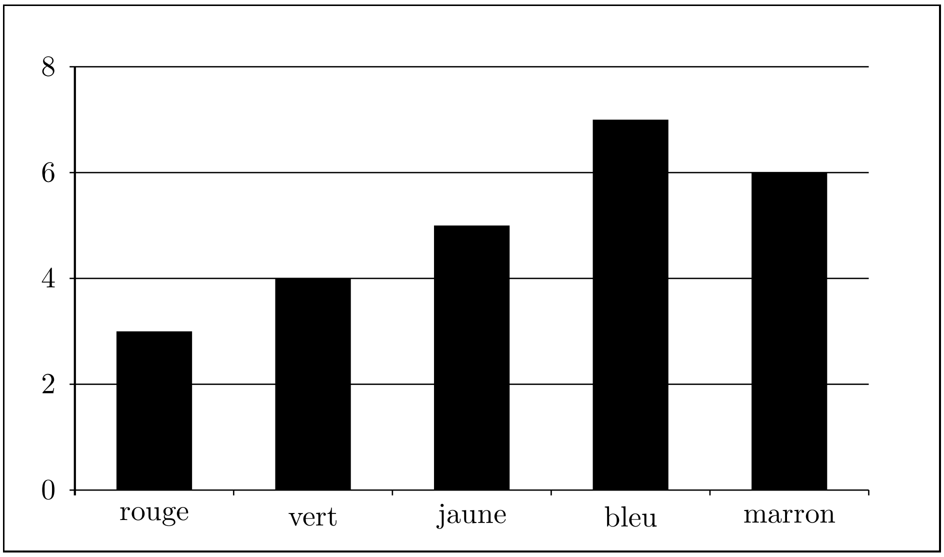
6. Pour montrer qu'une affirmation est fausse, il suffit de trouver un contre-exemple. Pour monter qu'une affirmation est vraie il faut la démontrer.

7. Pour un contre-exemple, on doit trouver deux nombres a et b vérifiant : $0 < ab < a$ et $0 < ab < b$ (le produit est plus petit que les deux nombres a et b).
Or, $0 < ab < a$ est équivalent à $0 < b < 1$ (on divise par a qui est strictement positif),
et, $0 < ab < b$ est équivalent à $0 < a < 1$ (on divise par b qui est strictement positif).
Il suffisait donc de prendre deux nombres compris entre 0 et 1 exclus pour que le contre-exemple fonctionne.

8. En fait, on ne peut jamais obtenir un carré parfait : en effet, si on développe l'expression, on obtient $(n-1)(n+1) - 1 = n^2 - 1^2 - 1 = n^2 - 2$.
Si ce résultat était le carré d'un entier A, on aurait $n^2 - 2 = A^2 \iff n^2 - A^2 = 2 \iff (n-A)(n+A) = 2$.
Or, n et A étant des entiers, $n - A$ et $n + A$ sont des entiers. Leur produit vaut 2 qui est un nombre premier.
Il faudrait alors étudier les quatre cas suivants :
$n - A = 1$ et $n + A = 2$; $n - A = 2$ et $n + A = 1$; $n - A = -1$; $n + A = -2$ et $n - A = -2$ et $n + A = -1$.
Par exemple, pour le premier cas on a : $n = A + 1$ et $n = 2 - A$, soit $A + 1 = 2 - A$, c'est à dire $A = \dfrac{1}{2}$ qui n'est pas un nombre entier. En procédant de la même manière pour les trois autres cas, on aboutit à chaque fois à une absurdité.

EXERCICE 3

Une urne contient des boules de couleurs différentes indiscernables au toucher.
Le nombre de boules de chaque couleur dans cette urne est indiqué sur le diagramme ci-dessous :



1. On tire au hasard une boule dans l'urne. On regarde sa couleur et on la remet dans l'urne. Quelle est la probabilité que la boule tirée soit bleue ?

Les boules sont indiscernables au toucher, nous sommes donc dans un cas d'équiprobabilité qui nous permet d'utiliser la formule suivante : $\mathcal{P} = \dfrac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$.

Il y a 7 boules bleues pour un total de 25 boules ($3+4+5+7+6=25$). D'où : $\mathcal{P} = \dfrac{7}{25}$.

La probabilité de tirer une boule bleue est de $\dfrac{7}{25}$.

2. On souhaite que la probabilité de tirer une boule bleue soit supérieure ou égale à 0,4. Combien de boules bleues doit-on ajouter au minimum dans l'urne avant le tirage pour qu'il en soit ainsi ?

Soit n le nombre de boules bleues à ajouter, la probabilité de tirer une boule bleue est alors de $\mathcal{P} = \dfrac{7+n}{25+n}$.

Pour répondre à la question, on résout l'inéquation :

$$\begin{aligned}
\frac{7+n}{25+n} &\geqslant 0,4 \\
7+n &\geqslant 0,4(25+n) && \text{car } 25+n \text{ est positif} \\
7+n &\geqslant 10+0,4n \\
n-0,4n &\geqslant 10-7 \\
0,6n &\geqslant 3 \\
n &\geqslant \frac{3}{0,6} && \text{car } 0,6 \text{ est positif} \\
n &\geqslant 5
\end{aligned}$$

Il faut ajouter au minimum 5 boules bleues avant le tirage pour que la probabilité de tirer une boule bleue soit supérieure ou égale à 0,4.

3. On considère à nouveau l'urne dont la composition est donnée par le diagramme ci-dessus. Combien de boules rouges doit-on ajouter au minimum dans l'urne avant le tirage pour que la probabilité d'obtenir une boule bleue à l'issue d'un tirage au hasard d'une boule soit inférieure ou égale à 0,2 ?

Soit m le nombre de boules rouges à ajouter, la probabilité de tirer une boule bleue est alors de $\mathcal{P} = \dfrac{7}{25+m}$.

Pour répondre à la question, on résout l'inéquation :

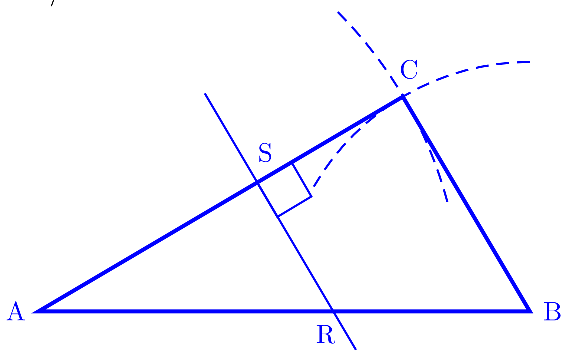
$$\begin{aligned}
\frac{7}{25+m} &\leqslant 0,2 & \\
7 &\leqslant 0,2(25+m) & \text{car } 25+m \text{ est positif} \\
7 &\leqslant 5+0,2m & \\
-0,2m &\leqslant 5-7 & \\
-0,2m &\leqslant -2 & \\
m &\geqslant \frac{-2}{-0,2} & \text{car } -0,2 \text{ est négatif} \\
m &\geqslant 10 &
\end{aligned}$$

Il faut ajouter au minimum 10 boules rouges avant le tirage pour que la probabilité de tirer une boule bleue soit inférieure ou égale à 0,2.

EXERCICE 4

Soit ABC un triangle tel que AB = 65 cm, AC = 56 cm et BC = 33 cm. Soit R le point du segment [AB] tel que AR = 39 cm. La perpendiculaire à (AC) passant par R coupe (AC) en S.

1. Réaliser la figure à l'échelle 1/10.



2. Démontrer que (RS) et (BC) sont parallèles.
   Dans le triangle ABC, le plus grand côté est BC. On a, avec des mesures en cm :
   $AB^2 = 65^2 = 4\,225$ et $AC^2 + BC^2 = 56^2 + 33^2 = 4\,225$.
   Donc, $AB^2 = AC^2 + BC^2$. D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en C. La droite (BC) est alors perpendiculaire à la droite (AC).
   De plus, par construction, la droite (SR) est également perpendiculaire à la droite (AC).
   Or, deux droites parallèles à une même droite sont parallèles entre elles, d'où :

   $\boxed{\text{Les droites (RS) et (BC) sont parallèles.}}$

3. En déduire la longueur AS.
   Les points A, R, B et A, S, C sont alignés dans le même ordre. Les droites (RS) et (BC) sont parllèles. Donc, d'après le théorème de Thalès, avec des mesures en cm, on a :
   $\dfrac{AR}{AB} = \dfrac{AS}{AC}$ soit $\dfrac{39}{65} = \dfrac{AS}{56}$
   donc, $AS = \dfrac{39 \times 56}{65} = 33,6$.

   $\boxed{\text{La longueur AS est de 33,6 cm.}}$

4. Déterminer la mesure en degré de l'angle ARS arrondie à l'unité.
   Le triangle ARS est rectangle en S. On peut donc utiliser les formules de trigonométrie dans ce triangle :

$$\sin(\widehat{ARS}) = \frac{AS}{AR}$$
$$\sin(\widehat{ARS}) = \frac{33,6}{39}$$
$$\widehat{ARS} = \arcsin\left(\frac{33,6}{39}\right)$$
$$\widehat{ARS} = 59,49$$

   $\boxed{\text{L'angle } \widehat{ARS} \text{ a pour mesure environ } 59°.}$

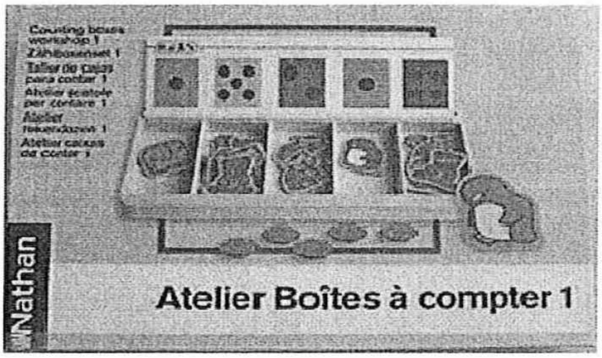
3

TROISIÈME PARTIE (14 points)

Cette partie est constituée de quatre exercices indépendants.

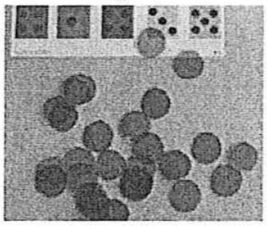
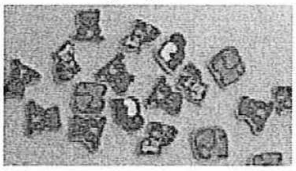
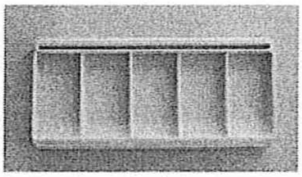
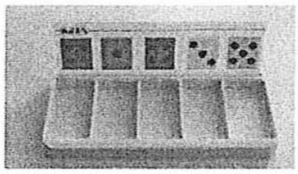
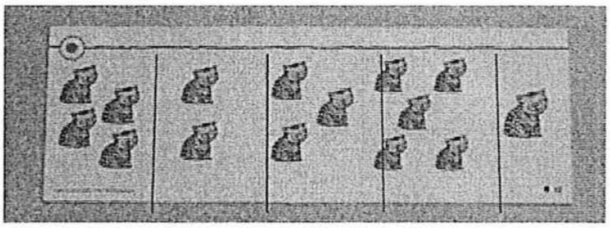
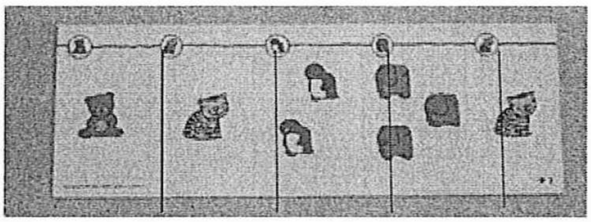
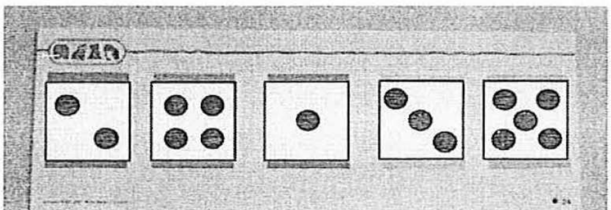
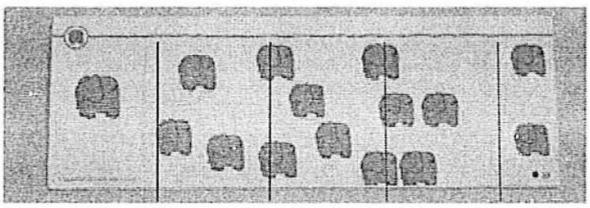
SITUATION 1 :

Un enseignant de Moyenne section de maternelle utilise le jeu ci-dessous avec ses élèves.



Atelier Boites à compter 1, Nathan, 2003

La boite contient le matériel suivant :

<table>
<tr><td>Des jetons classiques transparents
</td><td>Des jetons-animaux opaques
</td><td colspan="2">Des boîtes à compter où l'on insère une carte
 </td></tr>
<tr><td colspan="4">Des cartes variées comme par exemple</td></tr>
<tr><td colspan="2">Carte A
</td><td colspan="2">Carte B
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Carte C
</td><td colspan="2">Carte D
</td></tr>
</table>

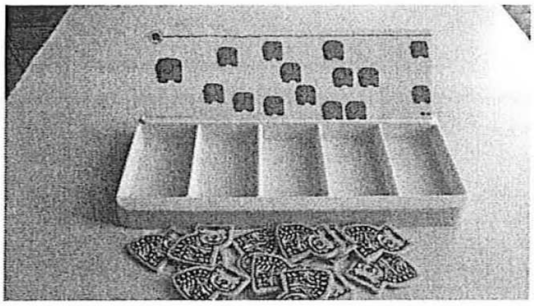
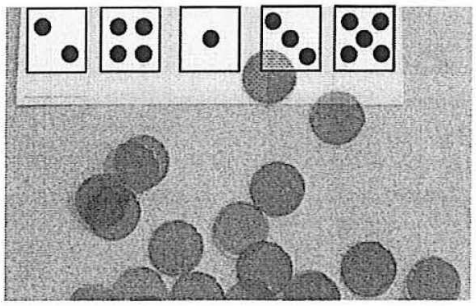
Pour chaque élève, l'enseignant choisit une carte et des jetons (animaux ou classiques).
L'objectif du maître est de faire réaliser par l'élève des collections de jetons de cardinaux identiques à ceux de la carte.

1. a) Analyse a priori.

Pour chacune des deux configurations matérielles ci-dessous :

— donner deux méthodes que pourraient utiliser les élèves pour dénombrer [9] les collections proposées.

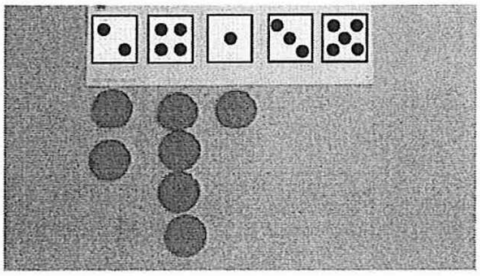
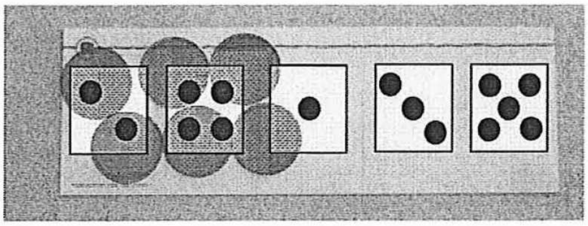
— donner deux erreurs que les élèves sont susceptibles de faire en réalisant les collections.

Configuration 1 carte D + boîte + jetons-tigre	*Configuration 2* carte C + pas de boîte + jetons classiques
	

<table>
<tr><td></td><td>Configuration 1</td><td>Configuration 2</td></tr>
<tr><td>M1</td><td colspan="2">Procédure par subitisation (reconnaissance perceptive immédiate d'une quantité)</td></tr>
<tr><td></td><td>Procédure possible pour des petites quantité (nombres inférieurs à 5). Ici, l'élève « voit » un certain nombre d'éléphants.</td><td>Pour la carte C, cette procédure est la plus simple car les nombres sont représentés sous forme de configurations géométriques particulières : celles des constellations du dé, qui sont une des représentations des nombres vues dès la PS.</td></tr>
<tr><td>M2</td><td colspan="2">Procédure par comptage un à un
Utilisation de la comptine numérique : suite de mots mis en correspondance terme à terme avec les éléments de la collection considérée, le dernier mot-nombre utilisé indiquant la quantité (principe cardinal).</td></tr>
<tr><td>E1</td><td>Procédure par subitisation : l'élève peut se tromper dans la reconnaissance des quantités, surtout si celles-ci dépassent 3.</td><td>Erreur liée au matériel : le fait de ne pas avoir de boite ne favorise pas le rangement des jetons, l'élève va disposer ses jetons sous sa carte, mais certains jetons peuvent se mélanger avec la représentation du nombre précédent.</td></tr>
<tr><td>E2</td><td colspan="2">Erreurs de comptage
• l'élève dénombre deux fois le même objet ou il en oublie un (principe d'adéquation unique) ;
• l'élève se trompe dans l'ordre de la comptine numérique (principe d'ordre stable).</td></tr>
</table>

9. Ici, on parle de dénombrer, c'est à dire exprimer une quantité par un nombre. Or, page précédente, l'objectif est de faire réaliser des collections de jetons de cardinaux identiques : pour cela, un dénombrement n'est pas indispensable, l'élève pourrait tout à fait effectuer une correspondance terme à terme.

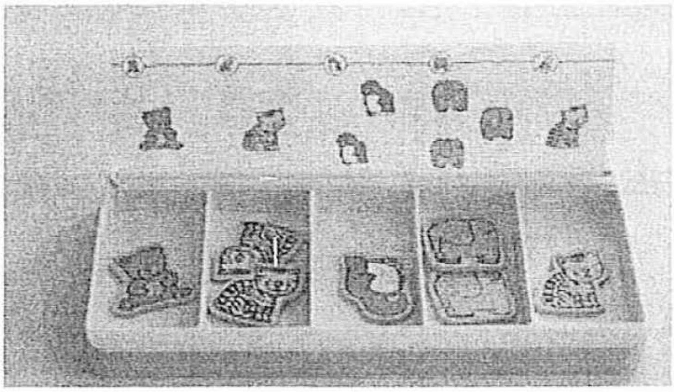
b) Voici deux réalisations d'élèves pour la configuration 2.
Que semblent-ils avoir compris tous les deux ? Analyser les différences éventuelles.

Louise	Kévin
	

Louise et Kévin ont compris l'objectif du maître, à savoir de réaliser des collections de cardinaux identiques à ceux de la carte. Cependant, leurs procédures semblent différentes :

- Louise dispose ses jetons les uns en dessous des autres. On peut imaginer qu'elle a tout d'abord dénombré les jetons de la carte (par subitisation ou comptage), puis qu'elle a réalisé une collection de jetons de même cardinal en les plaçant un à un.
- Kévin semble procéder par correspondance terme à terme en posant un jeton sur chaque point du dé. Cette procédure n'utilise pas le dénombrement mais est tout à fait efficiente, même si, avec des jetons beaucoup plus gros que les points de la carte, l'organisation matérielle pourra poser problème pour les deux dernières constellations (3 et 5).

2. Voici une autre production d'élève en réponse à une autre configuration matérielle.



Citer une facilité et une difficulté qu'apporte le choix d'une configuration matérielle incluant une boîte.

- Une facilité : les jetons représentant les animaux sont bien rangés en regard de la collection de la carte témoin, ne dépassent pas et donc ne se mélangeront pas.
- Une difficulté : il sera difficile pour l'élève de vérifier son résultat pour des quantités supérieures à deux puisqu'alors les jetons vont se recouvrir ou se chevaucher.

SITUATION 2 :

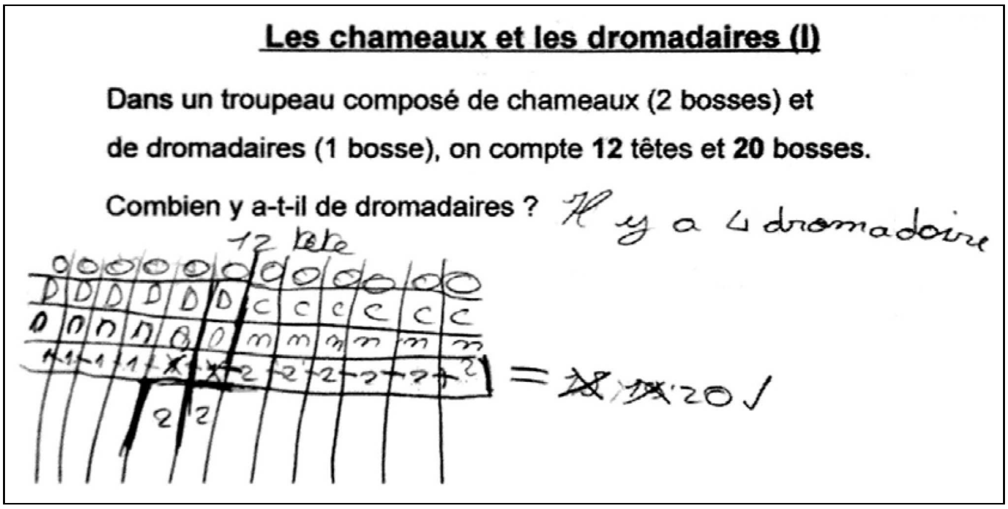
Le problème suivant est proposé à une classe de cycle 3.

« Les chameaux et les dromadaires »

Dans un troupeau composé de chameaux (2 bosses) et de dromadaires (1 bosse), on compte 12 têtes et 20 bosses.

Combien y a-t-il de dromadaires ?

1. Voici la réponse de Quentin.

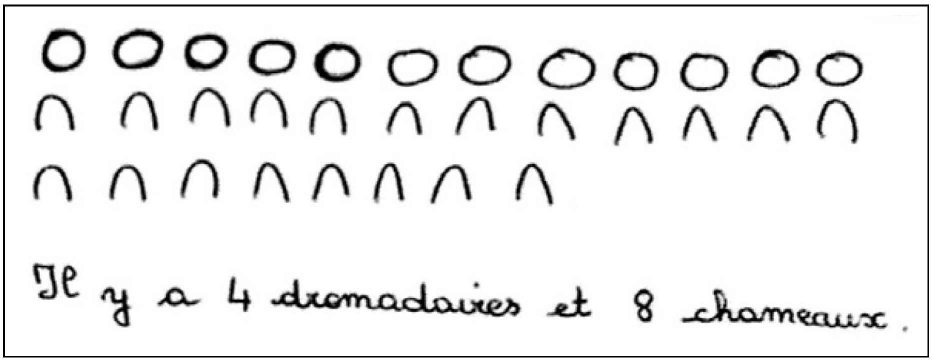


a) Expliquer sa démarche.

Il commence par faire un tableau en modélisant dans la première ligne une tête par colonne ; dans la deuxième ligne, il partage son effectif en deux en testant le résultat avec 6 dromadaires (D) et 6 chameaux (C) ;
dans la troisième ligne, il associe à chaque animal les bosses : « ∩ » pour la bosse du dromadaire et « ⋒ » pour les deux bosses du chameau ;
dans la quatrième ligne, il dénombre le total de bosses en comptant « 1 » pour la bosse du dromadaire et « 2 » pour les deux bosses du chameau. Il trouve 18 bosses, qu'il barre.
S'ensuit alors une procédure par essais-erreurs de proche en proche jusqu'à obtenir 20 bosses : il lui manque des bosses, il va donc successivement remplacer un à un les dromadaire par des chameaux jusqu'à arriver au résultat demandé. Il commence par remplacer un dromadaire par un chameau, il obtient 19 bosses, qu'il barre. Il remplace alors un autre dromadaire par un chameau et il obtient 20 bosses, le résultat demandé.
Enfin, il compte le nombre de dromadaires qu'il lui reste, il trouve 4 qui est la bonne réponse.

b) Appliquer le raisonnement de Quentin au problème suivant :
« Dans un troupeau composé de chameaux (2 bosses) et de dromadaires (1 bosse), on compte **152** têtes et **216 bosses**. Combien y a-t-il de dromadaires ? ».
Il y a 152 têtes, donc 152 animaux. On partage en deux pour obtenir 76 dromadaires et 76 chameaux.
Avec cette configuration, on aurait 76 bosses de dromadaire et 152 bosses de chameau (76×2), soit 228 bosses au total ($76 + 152$). Il y a trop de bosses, il faut donc échanger des chameaux contre des dromadaires.
En remplaçant un chameau par un dromadaire, on obtient 227 bosses ; en remplaçant un deuxième chameau par un dromadaire, on obtient 226 bosses… Étant donné qu'au départ il y avait 12 bosses en trop ($228 - 216$), il faudra remplacer 12 chameaux par 12 dromadaires, il restera donc 64 chameaux ($76 - 12$) et 88 dromadaires ($76 + 12$).

2. Voici la réponse de Ramia.



a) Expliquer sa démarche.

Ramia utilise une procédure de schématisation : elle modélise tout d'abord les 12 têtes des animaux par des cercles. Puis, sous chacune des têtes, elle associe une bosse ($\cap$) jusqu'à avoir associé une bosse par tête.

Enfin, elle continue à « distribuer » ses bosses une à une sur une troisième ligne jusqu'à avoir modélisé ses 20 bosses.

Lorsqu'elle a terminé, elle compte les rangées avec deux bosses : les 8 chameaux et les rangées avec une bosse : les 4 dromadaires. Sa réponse est correcte.

b) Appliquer le raisonnement de Ramia au problème suivant :

« Dans un troupeau composé de chameaux (2 bosses) et de dromadaires (1 bosse), on compte **546** têtes et **700** bosses. Combien y a-t-il de dromadaires ? ».

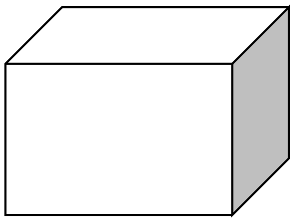
On associe une bosse à chaque tête : il y aura donc 546 bosses associées aux 546 têtes.

Il reste alors 154 bosses à « distribuer » ($700 - 546$), il y aura donc 154 animaux à deux bosses : les chameaux et 392 animaux à une seule bosse : les dromadaires ($546 - 154$).

SITUATION 3 :

L'exercice suivant est donné à des élèves de CM2.

L'aquarium de Pierre à la forme d'un pavé droit.
Quand il verse 4 litres d'eau dans l'aquarium, le niveau monte de 2 cm.



A - De combien monte le niveau d'eau quand il verse 8 litres ?
B - De combien monte le niveau d'eau quand il verse 6 litres ?
C - De combien monte le niveau d'eau quand il verse 14 litres ?

Extrait de l'Evaluation Nationale des Acquis des élèves en CM2, mai 2012.

Proposer trois résolutions différentes pour la question B qui peuvent être attendues d'un élève de CM2.
Expliciter les propriétés mathématiques sous-jacentes.

Le volume d'eau dans l'aquarium en fonction de la hauteur d'eau correspond à l'aire de la base de l'aquarium multipliée par la hauteur d'eau.

Le volume est donc proportionnel à la hauteur d'eau, il en est de même pour la capacité. Sachant cela, on peut proposer les procédures de résolution suivantes : [10]

- **Procédure par passage à l'unité :**
  quand il verse 4 litres d'eau, le niveau monte de 2 cm, donc
  quand il verse 1 litre d'eau, le niveau monte de 0,5 cm (2 cm÷4), donc
  quand il verse 6 litres d'eau, le niveau monte de 3 cm (6×0,5 cm).
- **Propriétés de linéarité additive et multiplicative de la proportionnalité :**
  quand il verse 4 litres d'eau, le niveau monte de 2 cm, donc
  quand il verse 2 litres d'eau, le niveau monte de 1 cm (deux fois moins), donc
  quand il verse 6 litres d'eau, le niveau monte de 3 cm (2 cm + 1 cm).
- **Utilisation de la règle de trois :**
  quand il verse 4 litres d'eau, le niveau monte de 2 cm, donc
  quand il verse 6 litres d'eau, le niveau monte de 3 cm (6 L×2 cm÷4 L).
- **Utilisation d'un rapport de linéarité :**
  pour passer de 4 litres à 6 litres, on multiplie par 1,5.
  Donc, quand il verse 6 litres d'eau, le niveau monte de 3 cm (1,5×2 cm).
- **Coefficient de proportionnalité :**

  On a le tableau suivant :

litres d'eau	4	6
hauteur en cm	2	

  $\downarrow \times 0,5$

  Le coefficient de proportionnalité est 0,5.
  Donc, pour 6 L d'eau versés, le niveau d'eau monte de 3 cm (6×0,5).

10. Trois procédures sont demandées, les trois premières sont les plus classiques et les plus simples car elles ne font pas appel à des coefficients décimaux.