Ministère de l'éducation nationale

Session 2016

PE2-16-PG1
Repère à reporter sur la copie

CONCOURS DE RECRUTEMENT DE PROFESSEURS DES ÉCOLES

Mardi 19 avril 2016
Deuxième épreuve d'admissibilité

Mathématiques	Durée : 4 heures Épreuve notée sur 40

Rappel de la notation :
- première partie : **13 points**
- deuxième partie : **13 points**
- troisième partie : **14 points**

5 points au maximum pourront être retirés pour tenir compte de la correction syntaxique et de la qualité écrite de la production du candidat.

Une note **globale égale ou inférieure à 10 est éliminatoire**.

Ce sujet contient 11 pages, numérotées de 1 à 11. Assurez-vous que cet exemplaire est complet.
S'il est incomplet, demandez un autre exemplaire au chef de salle.

L'usage de la calculatrice électronique de poche à fonctionnement autonome, sans imprimante est autorisé.

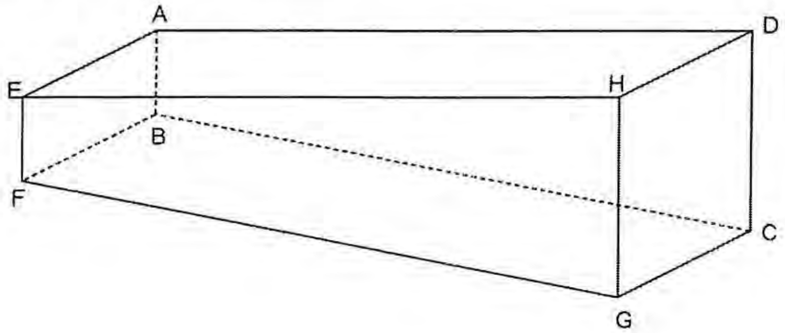
L'usage de tout autre matériel électronique, de tout ouvrage de référence et de tout document est rigoureusement interdit.

N.B : Hormis l'en-tête détachable, la copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine etc.
Tout manquement à cette règle entraîne l'élimination du candidat.

Si vous estimez que le texte du sujet, de ses questions ou de ses annexes comporte une erreur, signalez lisiblement votre remarque dans votre copie et poursuivez l'épreuve en conséquence. De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.

PREMIÈRE PARTIE (13 points)

Monsieur Durand souhaite faire construire une piscine. Cette piscine est représentée sur le schéma ci-dessous, qui n'est pas à l'échelle.



- La surface horizontale apparente EADH est rectangulaire ;
- le fond FBCG, également rectangulaire, est en pente douce ;
- les parois verticales EABF et HDCG sont rectangulaires ;
- la paroi verticale ABCD est un trapèze rectangle en A et D ;
- la paroi verticale EFGH est un trapèze rectangle en E et H ;

La piscine peut être vue comme un prisme droit de bases trapézoïdales ABCD et EFGH.

Dimensions de la piscine de Monsieur Durand

La profondeur minimale EF et la profondeur maximale HG de la piscine sont fixées :

$$EF = 1{,}10 \text{ m et } HG = 1{,}50 \text{ m.}$$

La longueur EH et la largeur AE de la piscine restent à déterminer.

Pour des raisons d'esthétique, Monsieur Durand souhaite que **la longueur de la piscine soit égale à 1,6 fois sa largeur.**

On rappelle les formules suivantes :

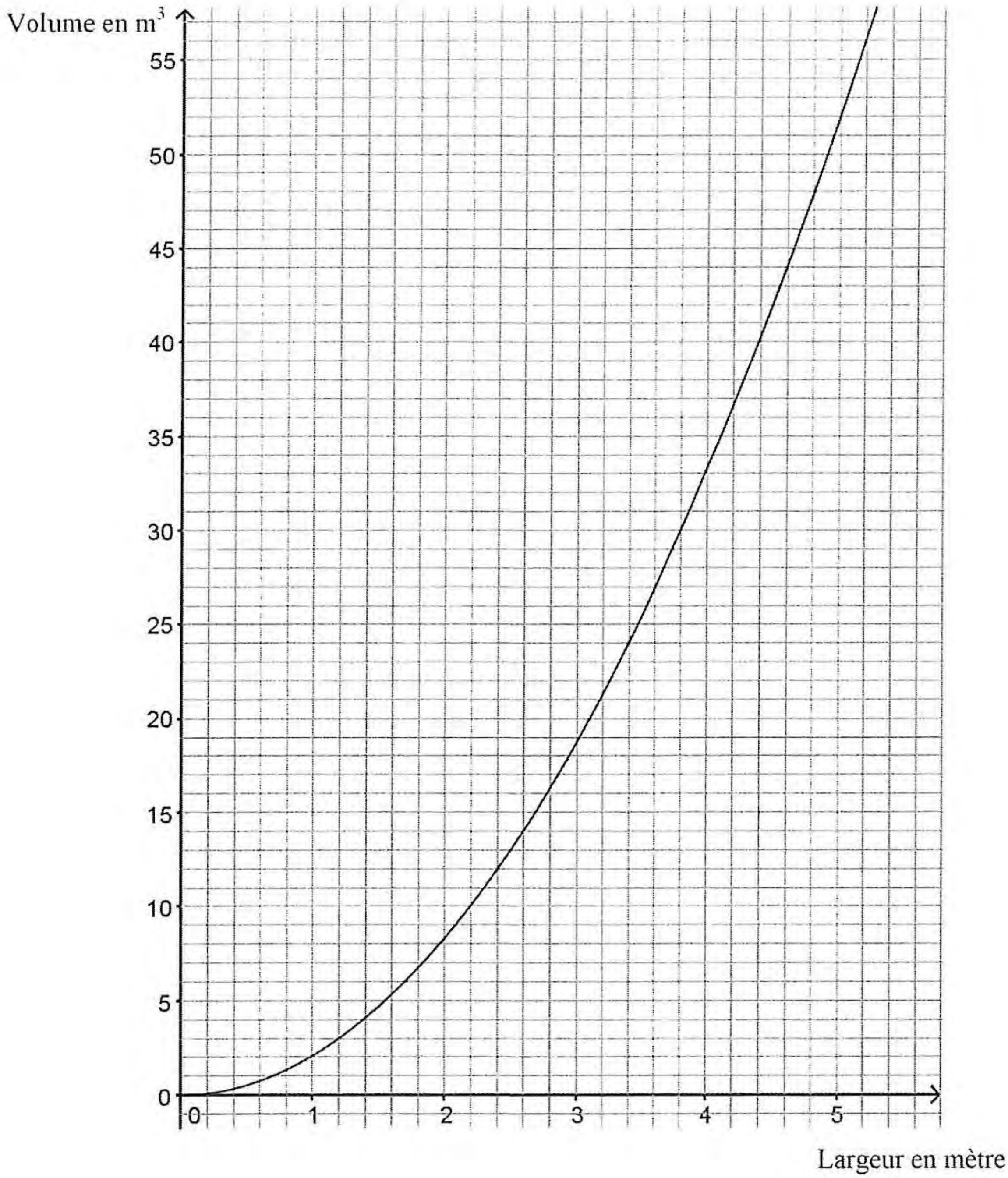
$$\text{Aire du trapèze} = \frac{(\text{grande base} + \text{petite base}) \times \text{hauteur}}{2}$$

$$\text{Volume du prisme droit} = \text{aire de la base} \times \text{hauteur}$$

A. Volume de la piscine

1. Étude graphique

Le graphique donné ci-après représente le volume, en mètre cube, de la piscine en fonction de sa largeur, en mètre.



Répondre par lecture graphique aux questions suivantes :

a) Quel est le volume, en mètre cube, de la piscine si sa largeur vaut 3 m ? Arrondir à l'unité.

b) Quelle est la largeur, en mètre, de la piscine si son volume est 27 m^3 ? Arrondir au dixième.

c) Donner un encadrement du volume, en mètre cube, de la piscine si sa largeur est comprise entre 4 m et 5 m. Arrondir les valeurs utilisées à l'unité.

2. **Étude algébrique**

a) Démontrer que le volume de la piscine, exprimé en mètre cube, est donné par la formule

$$V(x) = 2,08\,x^2$$

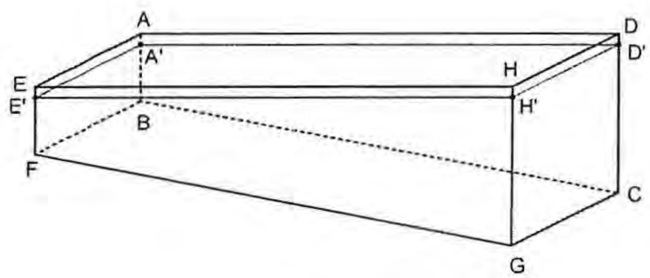
où x désigne la largeur, en mètre, de la piscine.

b) Déterminer par le calcul la valeur exacte de la largeur de la piscine correspondant à un volume de 52 m^3.

B. Mise en eau

Monsieur Durand a choisi pour sa piscine une largeur de 5 m et une longueur de 8 m.
Cette piscine est maintenant construite.

1. Monsieur Durand souhaite que le niveau d'eau soit à 10 cm du bord de la piscine. Le schéma ci-dessous n'est pas à l'échelle.



a) Montrer que la piscine contient alors 48 m^3 d'eau. On peut utiliser les résultats de la partie A.

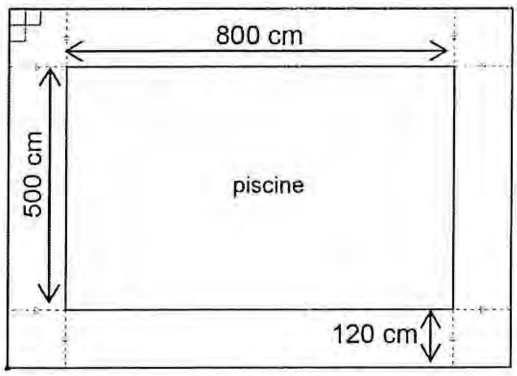
b) Monsieur Durand utilise un tuyau d'arrosage dont le débit est de 18 litres par minute. Quelle est la durée de remplissage de la piscine ? Donner la réponse en jours, heures et minutes, arrondie à la minute.

2. Un dimanche matin à 8 h, le volume d'eau de la piscine est de 48 m^3. Le dimanche suivant à 8 h, Monsieur Durand constate que le niveau d'eau a baissé de 5 cm.
   a) Déterminer la quantité d'eau perdue en une semaine.
   b) Quel pourcentage de la quantité d'eau initiale cela représente-t-il ? Arrondir le résultat au dixième.

3. Monsieur Durand a dépensé 207 € pour l'eau utilisée pour sa piscine en 2015. Si le prix de l'eau augmente de 3% par an, à combien peut-il estimer ce budget annuel en 2020 ?

C. Dallage du sol autour de la piscine

Monsieur Durand veut faire poser des dalles carrées autour de la piscine sur une largeur de 120 cm comme indiqué sur le schéma ci-après où on a représenté dans le coin supérieur gauche la disposition des premières dalles convenue avec le carreleur.
Les dalles utilisées sont toutes identiques et la longueur, en centimètre, de leur côté est un nombre entier.
On néglige l'épaisseur des joints.



1. Monsieur Durand souhaite ne pas avoir à couper de dalles. Quelles sont toutes les valeurs possibles pour la longueur du côté des dalles carrées ?

2. Monsieur Durand choisit des dalles carrées de 20 cm de côté.

a) Combien de dalles seront utilisées ?

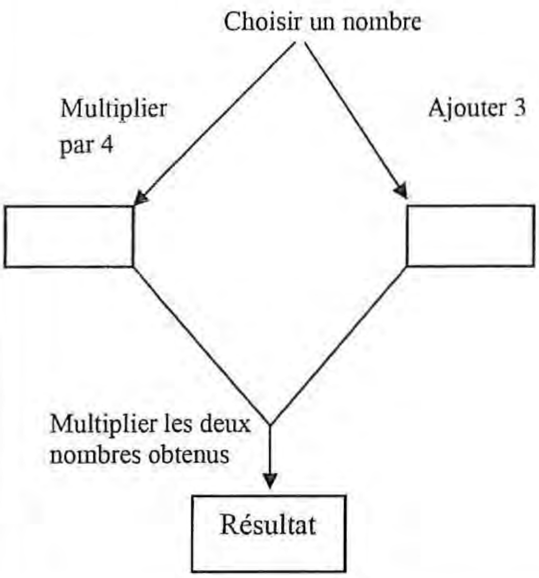
b) En déduire le nombre de dalles nécessaires, s'il avait choisi des dalles carrées de 5 cm de côté.

DEUXIÈME PARTIE (13 points)

Cette partie est constituée de quatre exercices indépendants.

EXERCICE 1

Voici deux programmes de calcul :

Programme 1	Programme 2
- Ouvrir une feuille de calcul de tableur. - Choisir un nombre. - Entrer ce nombre en cellule A1. - Saisir en cellule B1 la formule : $=(2*A1+3)*(2*A1+3)-9$ - Appuyer sur la touche « Entrer ». - Lire la valeur numérique affichée en cellule B1.	

1. **a)** Montrer que si on choisit 3 comme nombre de départ, alors le résultat obtenu avec chaque programme est 72.

   b) Calculer le résultat obtenu avec chaque programme si on choisit $-\frac{5}{4}$ comme nombre de départ.

2. Obtient-on toujours le même résultat avec les programmes 1 et 2 quel que soit le nombre choisi au départ ? Justifier.

3. Quel(s) nombre(s) faut-il choisir pour obtenir 0 avec le programme 1 ? Justifier.

EXERCICE 2

Pour chacune des affirmations ci-dessous, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.
Une réponse fausse n'enlève pas de points, une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

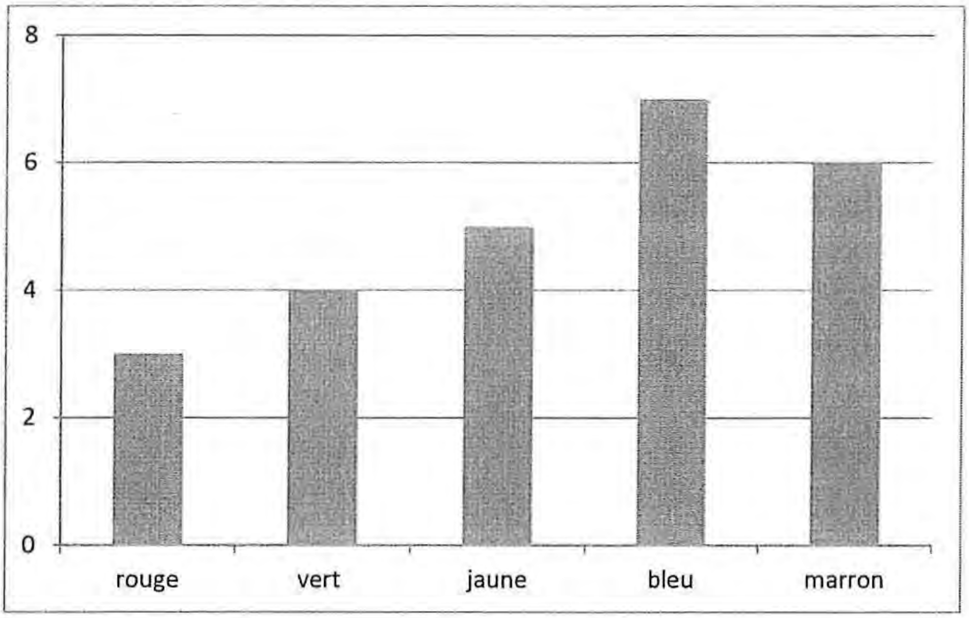
Affirmation 1 : « Le produit de deux nombres décimaux strictement positifs a et b est plus grand qu'au moins un de ces nombres. »

Affirmation 2 : « Pour tout nombre entier naturel n le nombre $(n+1)^2-(n-1)^2$ est un multiple de 4. »

Affirmation 3 : « Pour tout nombre entier naturel n le nombre $(n-1)(n+1)-1$ est le carré d'un nombre entier. »

EXERCICE 3

Une urne contient des boules de couleurs différentes indiscernables au toucher.
Le nombre de boules de chaque couleur dans cette urne est indiqué sur le diagramme ci-dessous :



1. On tire au hasard une boule dans l'urne. On regarde sa couleur et on la remet dans l'urne. Quelle est la probabilité que la boule tirée soit bleue ?

2. On souhaite que la probabilité de tirer une boule bleue soit supérieure ou égale à 0,4. Combien de boules bleues doit-on ajouter au minimum dans l'urne avant le tirage pour qu'il en soit ainsi ?

3. On considère à nouveau l'urne dont la composition est donnée par le diagramme ci-dessus. Combien de boules rouges doit-on ajouter au minimum dans l'urne avant le tirage pour que la probabilité d'obtenir une boule bleue à l'issue d'un tirage au hasard d'une boule soit inférieure ou égale à 0,2 ?

EXERCICE 4

Soit ABC un triangle tel que AB = 65 cm, AC = 56 cm et BC = 33 cm. Soit R le point du segment [AB] tel que AR = 39 cm. La perpendiculaire à [AC] passant par R coupe (AC) en S.

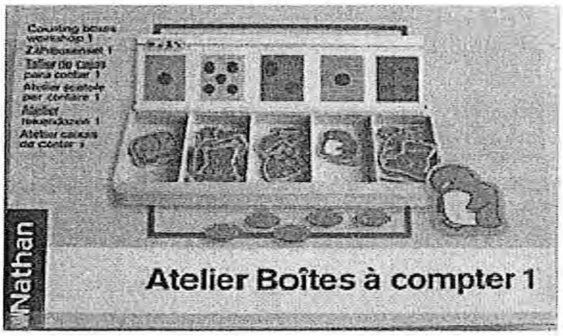
1. Réaliser la figure à l'échelle 1/10.
2. Démontrer que (RS) et (BC) sont parallèles.
3. En déduire la longueur AS.
4. Déterminer la mesure en degré de l'angle $\widehat{ARS}$ arrondie à l'unité.

TROISIÈME PARTIE (14 points)

Cette partie est constituée de trois situations indépendantes.

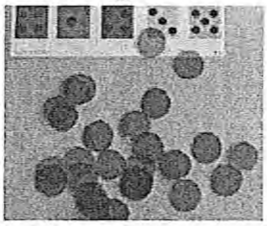
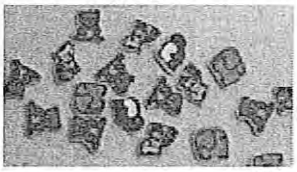
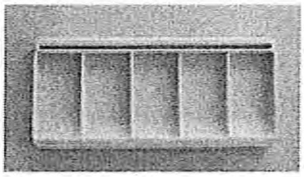
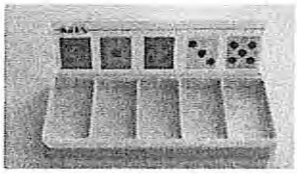
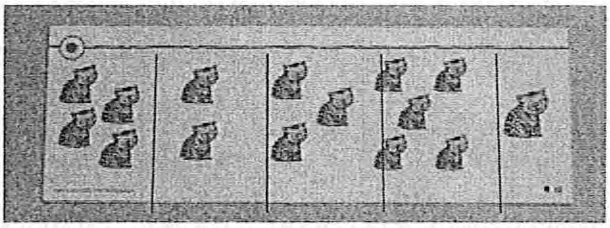
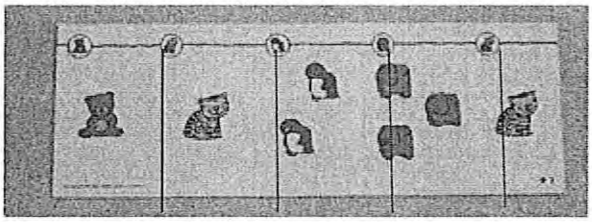
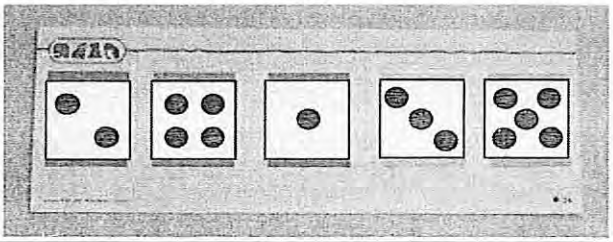
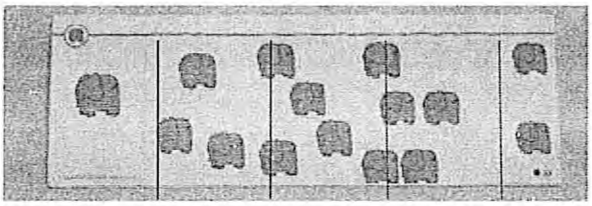
SITUATION 1:

Un enseignant de Moyenne Section de maternelle utilise le jeu ci-dessous avec ses élèves.



Atelier Boîtes à compter 1, Nathan, 2003

La boîte contient le matériel suivant :

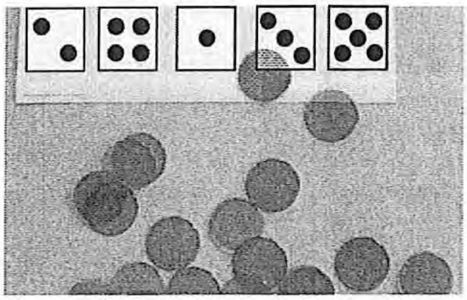
<table>
<tr><td>Des jetons classiques transparents
</td><td>Des jetons-animaux opaques
</td><td colspan="2">Des boîtes à compter où l'on insère une carte
 </td></tr>
<tr><td colspan="4">Des cartes variées comme par exemple</td></tr>
<tr><td colspan="2">Carte A
</td><td colspan="2">Carte B
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Carte C
</td><td colspan="2">Carte D
</td></tr>
</table>

Pour chaque élève, l'enseignant choisit une carte et des jetons (animaux ou classiques). L'objectif du maître est de faire réaliser par l'élève des collections de jetons de cardinaux identiques à ceux de la carte.

1. a) ***Analyse a priori.***

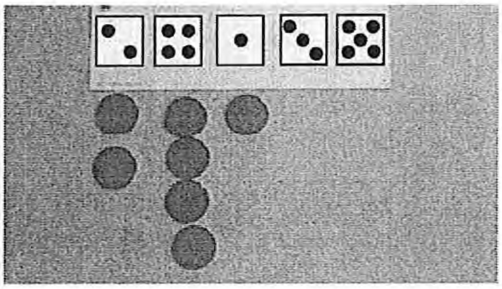
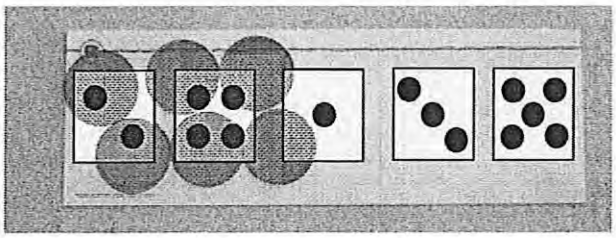
Pour chacune des deux configurations matérielles ci-dessous :

- donner deux méthodes que pourraient utiliser les élèves pour dénombrer les collections proposées.
- donner deux erreurs que les élèves sont susceptibles de faire en réalisant les collections.

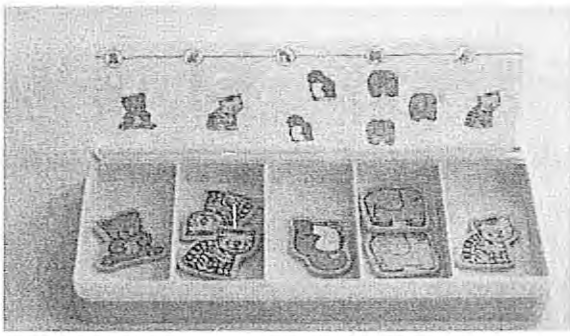
Configuration 1 carte D + boîte + jetons-tigre	*Configuration 2* carte C + pas de boîte + jetons classiques
	

b) Voici deux réalisations d'élèves pour la *configuration 2*.

Que semblent-ils avoir compris tous les deux ? Analyser les différences éventuelles.

Louise	Kévin
	

2. Voici une autre production d'élève en réponse à une autre configuration matérielle.



Citer une facilité et une difficulté qu'apporte le choix d'une configuration matérielle incluant une boîte.

SITUATION 2

Le problème suivant est proposé à une classe de cycle 3.

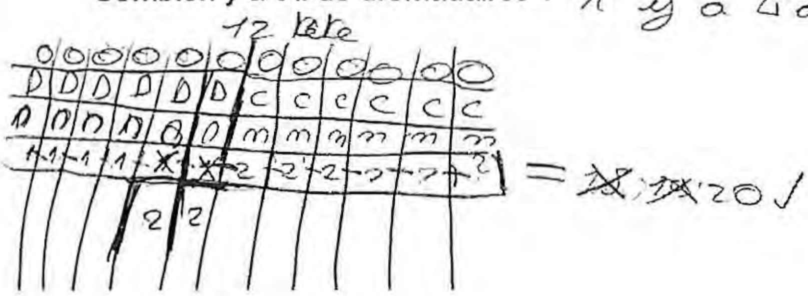
> **« Les chameaux et les dromadaires »**
>
> Dans un troupeau composé de chameaux (2 bosses) et de dromadaires (1 bosse), on compte **12** têtes et **20** bosses.
>
> Combien y a-t-il de dromadaires ?

1. Voici la réponse de Quentin.

Les chameaux et les dromadaires (I)

Dans un troupeau composé de chameaux (2 bosses) et de dromadaires (1 bosse), on compte **12** têtes et **20** bosses.

Combien y a-t-il de dromadaires ? Il y a 4 dromadaire

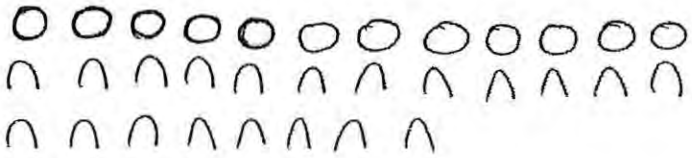


a) Expliquer sa démarche.

b) Appliquer le raisonnement de Quentin au problème suivant :

« Dans un troupeau composé de chameaux (2 bosses) et de dromadaires (1 bosse), on compte **152** têtes et **216** bosses. Combien y a-t-il de dromadaires ? »

2. Voici la réponse de Ramia.



Il y a 4 dromadaires et 8 chameaux

a) Expliquer sa démarche.

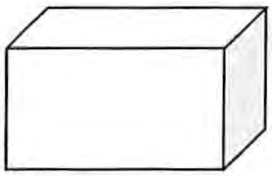
b) Appliquer le raisonnement de Ramia au problème suivant :

« Dans un troupeau composé de chameaux (2 bosses) et de dromadaires (1 bosse), on compte **546** têtes et **700** bosses. Combien y a-t-il de dromadaires ? »

SITUATION 3

L'exercice suivant est donné à des élèves de CM2.

L'aquarium de Pierre a la forme d'un pavé droit.
Quand il verse 4 litres d'eau dans l'aquarium, le niveau monte de 2 cm.



A – De combien monte le niveau d'eau quand il verse 8 litres ?
B – De combien monte le niveau d'eau quand il verse 6 litres ?
C – Combien de litres doit-il verser pour que le niveau d'eau monte de 14 cm ?

Extrait de l'Evaluation Nationale des Acquis des élèves en CM2, mai 2012.

Proposer trois résolutions différentes pour la question B qui peuvent être attendues d'un élève de CM2. Expliciter les propriétés mathématiques sous-jacentes.