PARTIE 1

Problème : autour du théorème de Pythagore (13 points)

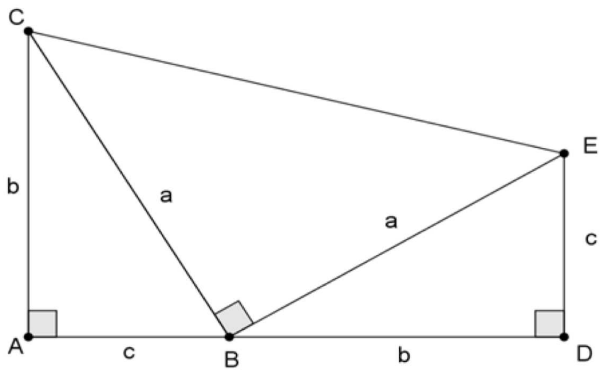
L'objet de ce problème est la démonstration, par une méthode classique, du théorème de Pythagore, et son utilisation pour calculer des distances une situation concrète.
Ce problème comprend deux parties A et B. Ces deux parties sont indépendantes.

Dans tout le problème, on désigne par Théorème de Pythagore l'énoncé suivant :
Dans un triangle rectangle, la somme des carrés des côtés de l'angle droit est égale au carré de l'hypoténuse.

Partie A : démonstration par la méthode attribuée à Abraham Garfield (1839-1881), 20e président des États-Unis

Bref aperçu historique. . . 1
Pythagore de Samos était un mathématicien grec de la fin du 6e siècle avant JC.
Le théorème de Pythagore (appelé ainsi depuis le milieu du XXe siècle) était connu auparavant des Chinois et Babyloniens : des textes gravés sur une tablette d'argile ont été trouvés.
Chez les égyptiens, les arpenteurs se servaient d'une corde à treize nœuds qui permettait de mesurer des distances mais aussi de construire, sans équerre, un angle droit puisque les 13 nœuds permettaient de construire un triangle rectangle dont les dimensions étaient (3-4-5).
James Abram Garfield (élu Président des Etats-Unis en 1880, tué le 19 septembre1881) propose l'une des très nombreuses démonstrations du théorème de Pythagore.

Dans la figure ci-dessous, les triangles ABC, BDE, BCE sont rectangles respectivement en A, D et B.
On pose : AB = DE = c ; AC = BD = b ; BC = BE = a.



Question 1.

Justifier que les points A, B et D sont alignés.

Déterminons l'angle géométrique $\widehat{ABD}$:
les deux triangles ABC et EDB ont leurs trois côtés égaux deux à deux, ils sont donc isométriques et possèdent des angles deux à deux égaux.

On a alors $\widehat{ABC} = \widehat{DEB}$ et $\widehat{BCA} = \widehat{EBD}$. *(1)*

D'autre part, les angles $\widehat{CAB}, \widehat{CBE}$ et $\widehat{BDE}$ sont tous trois des angles droits, ils sont donc égaux. *(2)*

D'où, par décomposition des angles :
$$\begin{aligned}\widehat{ABD} &= \widehat{ABC} + \widehat{CBE} + \widehat{EBD} \\ &= \widehat{ABC} + \widehat{CBE} + \widehat{BCA} && \textit{d'après (1)} \\ &= \widehat{ABC} + \widehat{CAB} + \widehat{BCA} && \textit{d'après (2)}\end{aligned}$$

Propriété 2

Dans un triangle quelconque, la somme de la mesure des angles est égale à 180°.

On a alors $\widehat{ABD} = 180°$ ce qui correspond à un angle plat.

Conclusion : *les points A, B et D sont alignés.*

Question 2.

Justifier que le quadrilatère ADEC est un trapèze.

Définition 3

Un **trapèze** est un quadrilatère convexe qui possède deux côtés parallèles.

Le triangles ABC est rectangle en A donc, les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires ;
le triangles BDE est rectangle en D donc, les droites (BD) et (DE) sont perpendiculaires ;
or, les points A, B et C étant alignés, les droites (AB), (BD) et (AD) sont confondues

On a alors (AC)⊥(AD) et (DE)⊥(AD).

Propriété 4

Si deux droites sont perpendiculaires à une même droite, alors elles sont parallèles entre elles.

Dans le quadrilatère ADEC, les droites (DE) et (AC) sont parallèles, donc les côtés [DE] et [AC] sont parallèles.

Conclusion : *le quadrilatère ADEC est un trapèze.*

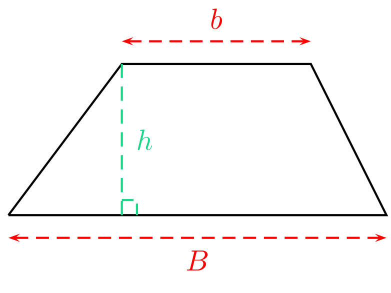
Question 3.

Exprimer de deux manières différentes l'aire du trapèze ADEC en fonction de a, b et c.

i) À partir de la formule de l'aire d'un trapèze.

Propriété 5

Aire du trapèze de petite base b, de grande base B et de hauteur h : $\mathcal{A} = \dfrac{(b+B) \times h}{2}$



Dans la configuration de l'exercice, la petite base est DE $= c$, la grand base AC $= b$ et la hauteur AD $= c + b$;
d'où : $\mathcal{A}(\text{ADEC}) = \dfrac{(c+b)\times(c+b)}{2} = \dfrac{(b+c)^2}{2}$.

ii) Par sommation d'aires.

Le trapèze ADEC est composé des trois triangles rectangles ABC, BCE et BDE, son aire est donc la somme des aires des triangles ABC, BCE et BDE.

Propriété 6

Aire du triangle de base b et de hauteur h : $\mathcal{A} = \dfrac{b\times h}{2}$.

Remarque : dans le cas d'un triangle rectangle, la hauteur et la base correspondent aux deux côtés adjacents à l'angle droit.

$\mathcal{A}(\text{ABC}) = \dfrac{b\times c}{2}$; $\mathcal{A}(\text{BCE}) = \dfrac{b\times c}{2}$; $\mathcal{A}(\text{BDE}) = \dfrac{a\times a}{2}$.

D'où $\mathcal{A}(\text{ADEC}) = \dfrac{bc}{2} + \dfrac{bc}{2} + \dfrac{a^2}{2} = \dfrac{2bc + a^2}{2}$.

Conclusion : $\boxed{\mathcal{A}(ADEC) = \dfrac{(b+c)^2}{2} = \dfrac{2bc+a^2}{2}.}$

Question 4.

En déduire l'égalité : $a^2 = b^2 + c^2$.

D'après la question 3 précédente, on a l'égalité : $\dfrac{(b+c)^2}{2} = \dfrac{2bc + a^2}{2}$.
On développe les deux membres de l'égalité.

Rappel des identités remarquables :

Propriété 7

i) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;
ii) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;
iii) $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

$$\begin{aligned}
\frac{(b+c)^2}{2} = \frac{2bc+a^2}{2} &\iff (b+c)^2 = 2bc + a^2 \quad \textit{on multiplie par 2 les deux membres de l'égalité}\\
&\iff b^2 + 2bc + c^2 = 2bc + a^2 \quad \textit{on développe le premier membre suivant la propriété 7i)}\\
&\iff b^2 + \cancel{2bc} + c^2 - \cancel{2bc} = \cancel{2bc} + a^2 - \cancel{2bc} \quad \textit{on soustrait } 2bc \textit{ des deux côtés de l'égalité}\\
&\iff b^2 + c^2 = a^2.
\end{aligned}$$

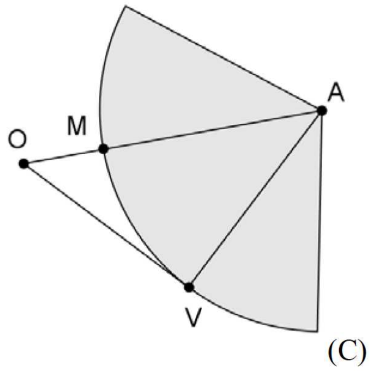
Conclusion : $\boxed{\textit{on obtient bien } a^2 = b^2 + c^2.}$

Partie B : une application sur théorème de Pythagore

La courbure terrestre limite la vision lointaine sur Terre.
Plus l'altitude du point d'observation est élevée, plus la distance théorique de vision est grande.

Dans cet exercice, la Terre est assimilée à une sphère de centre A de rayon 6 370 km.
La figure 1 ci-dessous représente une partie d'une vue en coupe de la Terre, qui ne respecte pas les échelles. (C) désigne le cercle de coupe, de centre A et de rayon 6 370 km.

Figure 1



Le point O représente l'emplacement des yeux d'un observateur. Le point M est le point d'intersection de la demi-droite [AO) et du cercle (C).
On considère que M se situe au niveau de la mer ; la longueur OM représente alors l'altitude à laquelle se trouvent les yeux de cet observateur.
La droite (OV) est tangente en V au cercle (C).
Le point V représente le point limite de vision de l'observateur. La longueur OV est appelée *portée visuelle théorique*.

Question 1.

Les points O, M et V étant définis comme ci-dessus, montrer que la portée visuelle théorique OV, exprimée en km, est donnée par la formule :

$$\mathrm{OV} = \sqrt{\mathrm{OM}^2 + 12\,740 \times \mathrm{OM}} \text{ où OV et OM sont exprimées en km.}$$

La droite (OV) est tangente en V au cercle (C). Donc, d'après la propriété suivante :

Propriété 8
Soit (d) la tangente au point A au cercle ($\mathcal{C}$) de centre O, alors (d) est perpendiculaire au rayon [OA].

(OV) et (AV) sont perpendiculaires donc, le triangle AOV est rectangle en V.
D'après le théorème de Pythagore, on a : $\mathrm{OA}^2 = \mathrm{OV}^2 + \mathrm{AV}^2 = \mathrm{OV}^2 + 6\,370^2$. *(1)*

De plus, les points O, M et A sont alignés, donc $\mathrm{OA} = \mathrm{OM} + \mathrm{MA} = \mathrm{OM} + 6\,370$. *(2)*

En substituant la valeur de OA de *(2)* dans *(1)*, on obtient : $(\mathrm{OM} + 6\,370)^2 = \mathrm{OV}^2 + 6\,370^2$

équivalent à $\mathrm{OV}^2 = (\mathrm{OM} + 6\,370)^2 - 6\,370^2$

$$\iff \mathrm{OV}^2 = \mathrm{OM}^2 + 2 \times 6\,370 \times \mathrm{OM} + \cancel{6\,370^2} - \cancel{6\,370^2}.$$

$$\iff \mathrm{OV}^2 = \mathrm{OM}^2 + 12\,740 \times \mathrm{OM}.$$

On prend la racine carrée des deux membres qui sont positifs.

Conclusion : $\boxed{OV = \sqrt{OM^2 + 12\,740 \times OM}.}$

Question 2.

Calculer la portée visuelle théorique d'un observateur placé au niveau de la mer et dont les yeux sont situés à 1,70 m du sol (on arrondira au dixième de kilomètre près).

On cherche la mesure de OV lorsque OM $= 1,70$ m. On connait la relation liant OV et OM d'après la question précédente, il faut tout d'abord convertir OM en km : OM $= 0,0017$ km.

Puis on applique la formule : $\text{OV} = \sqrt{0,0017^2 + 12\,740 \times 0,0017}$

$$\text{OV} = \sqrt{0,00000289 + 21,658}$$

$$\text{OV} = \sqrt{21,65800289}$$

$$\text{OV} = 4,653815949.$$

Conclusion : *la portée visuelle théorique d'un observateur placé au niveau de la mer et dont les yeux sont situés à 1,70 m du sol est de 4,7 km.*

Question 3.

On considère la fonction f :

$$f : h \to \sqrt{h^2 + 12\,740h}$$

On a donc OV $= f$(OM), où OV et OM sont exprimées en km.
On donne ci-après la représentation graphique de la fonction f.

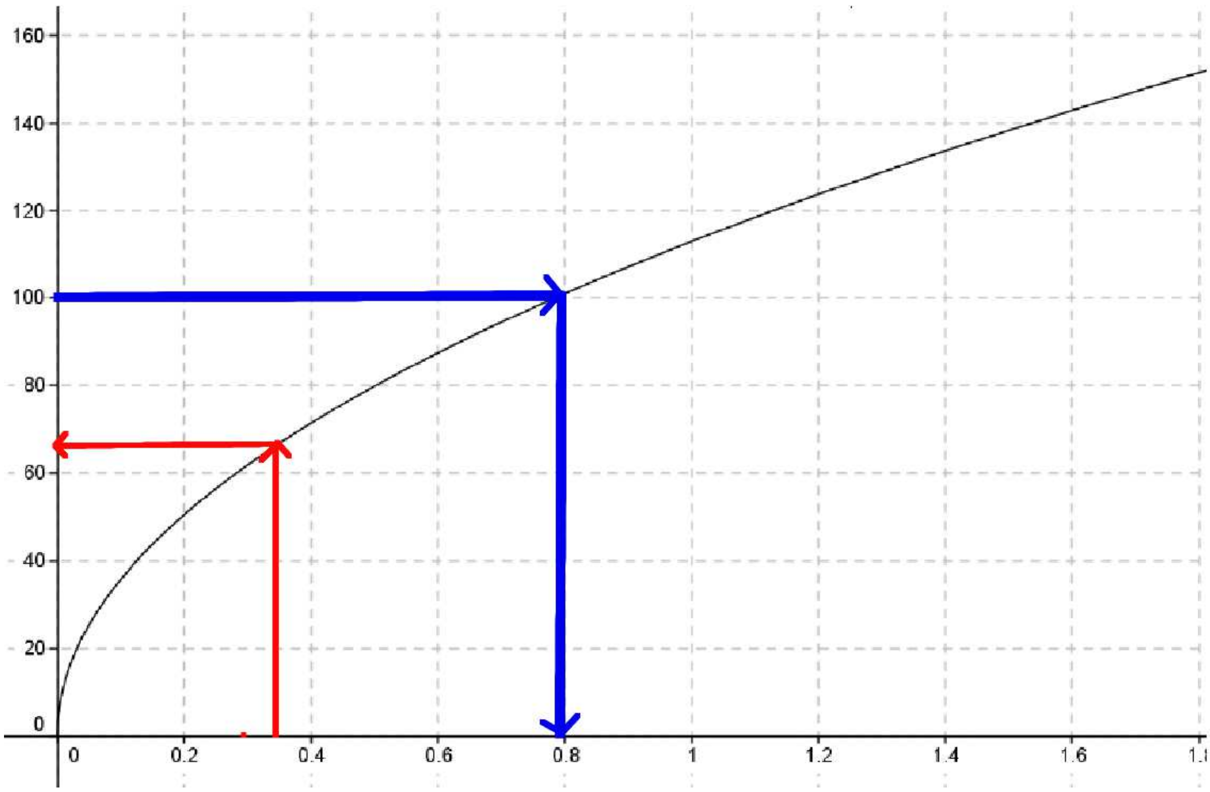


figure 2

On lit sur l'axe des abscisses la distance OM, c'est à dire l'altitude correspondant à h, en km. Sur l'axe des ordonnées on lit la distance OV, la portée visuelle, toujours en km.

3.1

À quelle altitude doit-on se situer pour avoir une portée visuelle théorique de 100 kilomètres ?

Pour avoir une portée visuelle théorique de 100 km, il faut trouver l'abscisse du point de la courbe ayant comme ordonnées 100, on lit (en bleu sur la figure 2) environ 0,8 km (on dit que 0,8 est un antécédent de 100 par la fonction f).

Conclusion : *pour avoir une portée visuelle théorique de 100 kilomètres, il faut se situer à une altitude de 800 mètres.*

3.2

Un observateur situé au dernier étage de la Tour Eiffel dont l'altitude est environ 350 mètres pourrait-il théoriquement voir la mer ?

Pour un observateur situé à une altitude de 350 mètres, il faut trouver l'ordonnée du point de la courbe ayant comme abscisse 0,35. On lit (en rouge sur la figure 2) environ 67 km (on dit que 67 c'est l'image de 0,35 par la fonction f).

Conclusion : *un observateur situé au dernier étage de la Tour Eiffel aura une portée visuelle théorique de 67 km, ce qui ne lui permettra pas de voir la mer, située à environ 150 km à vol d'oiseau de Paris.*

3.3

L'affirmation suivante est-elle vraie : « si on est deux fois plus haut sur la Terre, alors on a une vision théorique deux fois plus grande » ?

Par exemple :
si l'on se place à une altitude de 0,2 km, on lit une vision théorique d'environ 50 km ;
si l'on se place à une altitude de 0,4 km, on lit une vision théorique d'environ 70 km, qui n'est pas deux fois plus grande que 50 km.

Nous avons trouvé un contre-exemple, cela suffit pour affirmer que l'affirmation est fausse.

Conclusion : *l'affirmation est fausse.*

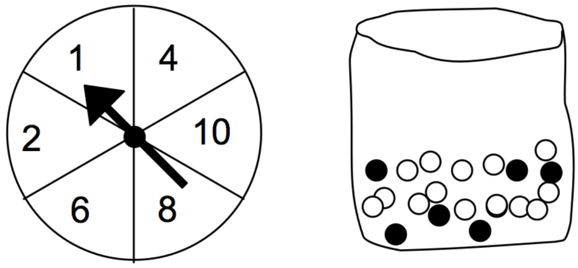
Remarque : si l'affirmation était vraie, on serait dans une situation de proportionnalité, et la représentation graphique de f serait linéaire ce qui n'est pas le cas.

PARTIE 2

Exercices indépendants (13 points)

Exercice 1

Un stand à la foire du printemps propose un jeu dans lequel il faut d'abord faire tourner une roulette. Ensuite, **si** la roulette s'arrête sur un nombre pair, le joueur peut tirer une bille dans un sac.
La roulette et le sac sont représentés ci-contre.



D'après PISA M471Q01

Des prix sont distribués aux joueurs qui tirent une bille noire. Suzy tente sa chance une fois.

Quelle est la probabilité que Suzy gagne un prix ?

On note P l'événement « La roulette s'arrête sur un nombre pair » et $\overline{P}$ l'événement « La roulette s'arrête sur un nombre impair ».

On suppose que les portions de disque représentant les nombres sont identiques et que les billes sont indiscernables au toucher pour pouvoir affirmer que l'on est dans un cas d'équiprobabilité.

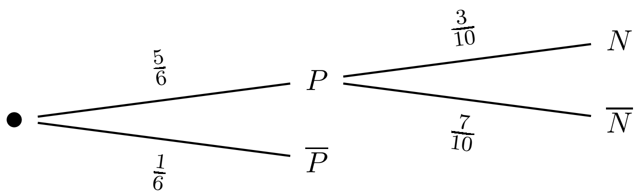
Propriété 9
Quand les résultats d'une expérience aléatoire ont la même probabilité alors la probabilité d'un événement A est égale à $\mathcal{P}(A) = \dfrac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$.

On a alors $\mathcal{P}(P) = \dfrac{5}{6}$ et $\mathcal{P}(\overline{P}) = \dfrac{1}{6}$.

Dans le cas où Suzy tombe sur un nombre pair, on note N l'événement « Suzy tire une bille noire » et $\overline{N}$ l'événement « Suzy tire une bille blanche ».

On a alors $\mathcal{P}(N) = \dfrac{6}{20} = \dfrac{3}{10}$ et $\mathcal{P}(\overline{N}) = \dfrac{14}{20} = \dfrac{7}{10}$.

On peut modéliser la situation par un arbre de probabilités pondéré :



Propriété 10
Dans un arbre, la probabilité du résultat (ou issue) auquel conduit un chemin est égal au produit des probabilités le long du chemin.

On note G l'événement « Suzy gagne un prix », la probabilité de gagner un prix correspond au chemin (P, N) d'où $\mathcal{P}(G) = \dfrac{5}{6} \times \dfrac{3}{10} = \dfrac{15}{60} = \dfrac{1}{4}$.

Conclusion : *la probabilité que Suzy gagne un prix est de un quart.*

Exercice 2

Lors d'un tournoi de Bowling, on note les résultats des 15 joueurs.

268 220 167 211 266 152 270 279 192 191 164 229 223 222 246

Le nombre maximal de point réalisable par un joueur est 300.
Quel résultat peut-on supprimer sans modifier la moyenne des résultats ?

On commence par calculer la moyenne des scores que l'on note $\overline{m}$:

$$\overline{m} = \frac{268+220+167+211+266+152+270+279+192+191+164+229+223+222+246}{15}$$

$$\overline{m} = \frac{3300}{15} = 220.$$

La moyenne des résultats est de 220 points, ce qui veut dire qu'un score ayant cette valeur dans la série ne fera pas varier sa moyenne, donc :

☆ *Conclusion :* $\boxed{\textit{on peut supprimer le résultat 220 sans changer la moyenne des résultats.}}$

Exercice 3

La longueur officielle d'un marathon est 42,195 km.
Lors d'un marathon un coureur utilise sa montre-chronomètre. Après 5 km de course, elle lui indique qu'il court depuis 17 minutes et 30 secondes.

Question 1.

Le coureur pense que s'il gardait cette allure tout au long de la course, il mettrait moins de 2 h 30 en tout. A-t-il raison ?

Ce problème est un problème de proportionnalité puisque le coureur garde la même allure tout au long de la course. De plus, 17 minutes et 30 secondes correspondent à 17,5 minutes, on peut alors utiliser le tableau de proportionnalité suivant :

Distance parcourue en km	5	42,195
Temps réalisé en minutes	17,5	x

On cherche la quatrième proportionnelle correspondant à x, ce qui peut se faire par exemple grâce à un « produit en croix » :

$$5 \times x = 17,5 \times 42,195 \Longleftrightarrow x = \frac{17,5 \times 42,195}{5} = 144,1825.$$

Or, 2 h 30 correspondent à 2×60 min + 30 min =150 min,
et $144,1825 < 150$ donc :

☆ *Conclusion :* $\boxed{\textit{le coureur à raison : à cette allure, il mettrait moins de 2 h 30.}}$

Question 2.

En réalité la vitesse moyenne du coureur pendant les vingt premiers kilomètres a été 16 km/h et cette vitesse a chuté de 10% pour le restant du parcours.
Quel a été son temps de parcours ? Donner la réponse en heures, minutes, secondes, centièmes de seconde (le cas échéant).

i) Calcul du temps mis pendant les vingt premiers kilomètres.

Propriété 11
La vitesse moyenne d'un objet qui parcourt une distance d en un temps t est donnée par la formule $v = \dfrac{d}{t}$.

Dans notre cas, on connait $v = 16$ km/h et $d = 20$ km.
D'où $16 \text{ km/h} = \dfrac{20 \text{ km}}{t} \iff t = \dfrac{20}{16} \text{ h} = \dfrac{5}{4} \text{ h} = 1,25 \text{ h}$.

ii) Calcul de la vitesse moyenne sur le reste du parcours.

On peut tout d'abord déterminer la diminution de vitesse : $16 \text{ km/h} \times \dfrac{10}{100} = 1,6 \text{ km/h}$.
Donc, la vitesse moyenne devient $v = 16 \text{ km/h} - 1,6 \text{ km/h} = 14,4 \text{ km/h}$.

iii) Calcul du temps mis pendant le reste du parcours.

Il reste $42,195 \text{ km} - 20 \text{ km} = 22,195 \text{ km}$ à parcourir à une vitesse moyenne de 14,4 km/h.
On utilise la même formule que dans (i) et on obtient :
$14,4 \text{ km/h} = \dfrac{22,195 \text{ km}}{t} \iff t = \dfrac{22,195}{14,4} \text{ h} = 1,541319\underline{4} \text{ h}$.

iv) Calcul du temps total.

$1,25 \text{ h} + 1,541319\underline{4} \text{ h} = 2,791319\underline{4}$ heures.
Ce qui donne 2 heures et $0,791319\underline{4} \times 60 = 47,4791\underline{6}$ minutes,
ou encore 2 heures 47 minutes et $0,4791\underline{6} \times 60 = 28,75$ secondes.

☆ *Conclusion :* *le temps de parcours a été de 2 heures 47 minutes 28,75 secondes.*

Exercice 4

Le problème suivant a été proposé à des élèves.

Je suis parti à neuf heures moins dix ; je suis arrivé à 10h40.
Quelle a été la durée de mon parcours ? Explique comment tu as trouvé.

Question 1.
Indiquer le cycle et le niveau de classe auxquels set énoncé peut être proposé.

Les premières notions de durées apparaissent dès le cycle 2, mais seulement pour *repérer des événements de la journée en utilisant les heures et demi-heures.*

Au cycle 3, on entre dans le vif du sujet avec des notions plus précises :

- *Connaître les unités de mesure suivantes et les relations qui les lient : l'heure, la minute, la seconde, le mois, l'année* en CE2 ;
- *Connaître et utiliser les unités usuelles de mesure des durées* en CM1 ;
- *Calculer une durée à partir de la donnée de l'instant initial ou de l'instant final* en CM2.

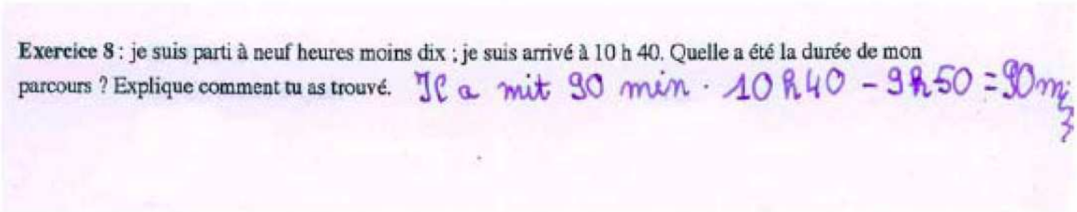
On est ici en présence d'un problème de calcul de durée à partir de la donnée de l'instant initial et final, donc

☆ *Conclusion :* *on peut proposer cet énoncé en cycle 3, CM2*

Question 2.

Pour chacune des deux productions d'élèves reproduites ci-dessous, décrire la procédure utilisée et analyser les erreurs commises en formulant des hypothèses sur leurs origines.

Thomas :


Exercice 8 : je suis parti à neuf heures moins dix ; je suis arrivé à 10 h 40. Quelle a été la durée de mon parcours ? Explique comment tu as trouvé. Il a mit 90 min · 10 h40 − 9h50 = 90min

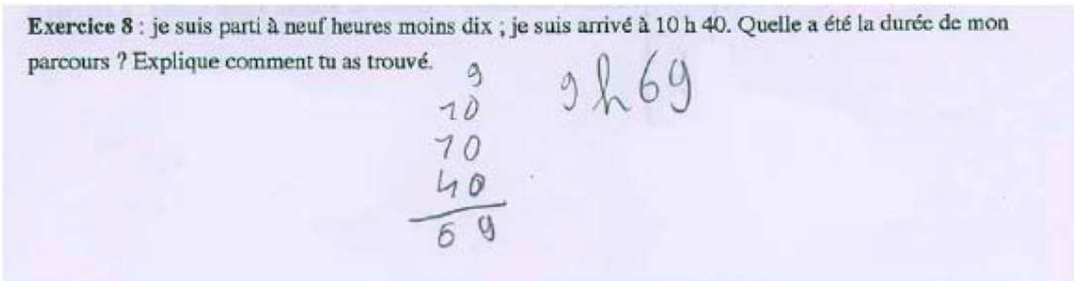
Thomas commence par convertir l'écriture en lettres en horaire, puis effectue une soustraction.

Il commet deux erreurs :

- la première dans la conversion de « neuf heures moins 10 ». Il scinde les deux informations « neuf heures » et « moins dix » en deux parties distinctes : « neuf heures » correspond à 9h00, et « moins dix » à 50 minutes, dans le système sexagésimal. Il regroupe alors ces deux informations : 9h50. Soit Thomas n'a pas acquis complètement le fonctionnement du système horaire, soit il s'agit d'une erreur d'étourderie.
- il émet un raisonnement correct en utilisant une soustraction pour le résultat. En revanche, la seconde erreur est liée au fait qu'il n'utilise pas le système en base 60, mais utilise la soustraction décimale (le résultat est alors cohérant et la soustraction décimale maitrisée).

  En effet : $\begin{array}{cr} & 1\ 0,{}_{1}4 \\ - & {}_{1}9,5 \\ \hline & 0,9 \end{array}$.

Kevin :


Exercice 8 : je suis parti à neuf heures moins dix ; je suis arrivé à 10 h 40. Quelle a été la durée de mon parcours ? Explique comment tu as trouvé.

$\begin{array}{r} 9 \\ 10 \\ 10 \\ 40 \\ \hline 69 \end{array}$ 9 h 69

Kévin, quant à lui, additionne toutes les valeurs numériques qu'il trouve, qu'elles soient exprimées en lettres ou en chiffres. Cette somme lui donne le nombre de minutes à partie de 9 heures.

Il commet plusieurs erreurs :

- il additionne ensemble des valeurs numériques n'ayant pas la même unité (des heures et des minutes) ;
- il effectue une addition à la place d'une soustraction ;
- l'écriture de son résultat n'est pas celle attendue dans notre système d'écriture des heures.

Kévin n'a peut-être pas compris le sens de l'exercice et s'est contenté d'additionner tous les nombres qu'il trouvait, il ne semble pas non plus avoir intégré notre système horaire, et enfin, il ne s'est pas posé la question de la cohérence de son résultat avec l'énoncé.

PARTIE 3

Analyse d'exercices proposés à des élèves et de productions d'élèves relevant de la proportionnalité. (14 points)

Cette partie vise l'analyse mathématique de plusieurs situations mettant en oeuvre le concept de proportionnalité.
Pour répondre aux différentes questions, le candidat pourra se référer s'il le souhaite à l'extrait du document d'accompagnement des programmes de collège présenté dans **l'annexe 1.**

Annexe 1
Extrait du document : Ressource pour les classes de 6e, 5e, 4e, 3e de collège
La proportionnalité au collège - EDUSCOL

Niveau	Cadres	Types de nombres	Procédures de résolution
Cycle 3	Grandeurs	- Naturels - Décimaux simples (rapport scalaire ou coefficient du type 1,5 ou 2,5…)	Raisonnement proportionnel, utilisant : - Propriété additive - Propriété d'homogénéité - Passage par l'unité - Coefficient de proportionnalité « simple »
Sixième	Grandeurs	- Naturels - Décimaux simples - Quotients (plus le nombre pi)	Raisonnement proportionnel, utilisant : - Propriété additive - Propriété d'homogénéité - Passage par l'unité - Coefficient de proportionnalité
Cinquième	Grandeurs Numérique	- Naturels - Décimaux - Quotients (plus le nombre π)	Formulation et utilisation des propriétés : - Propriété additive - Propriété d'homogénéité - Passage par l'unité Coefficient de proportionnalité
Quatrième	Grandeurs Numérique Graphique	- Naturels - Décimaux - Quotients (plus le nombre π)	- Utilisation des propriétés travaillées en 6e et 5e - Egalité de quotients et produits en croix - Caractérisation graphique (sans justification)
Troisième	Grandeurs Numériques Graphiques	- Naturels - Décimaux - Quotients (plus les nombre π, $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; …)	- Modélisation et traitement à l'aide d'une fonction linéaire - Les procédures envisagées antérieurement restent disponibles

I. Situation A

Le problème ci-dessous a été donné en évaluation à des élèves de cycle 3.

Énoncé A
À chaque saut, une sauterelle avance de 30 cm. Combien de sauts doit-elle faire pour parcourir 15 mètres ?

Question 1.

Dans cet énoncé, qu'est-ce qui indique que la situation est une situation de proportionnalité ?

Le début de la phrase « *À chaque saut, une sauterelle avance de 30 cm.* » montre une situation de proportionnalité.

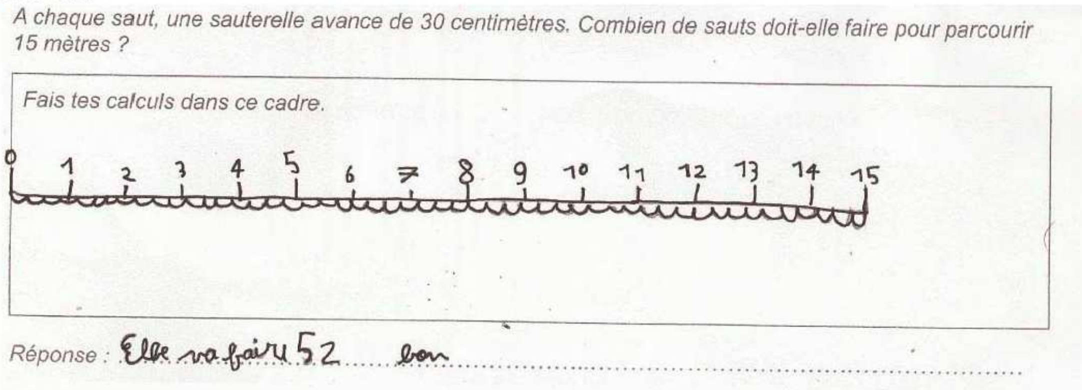
Question 2.

Le problème a été proposé à 4 élèves, E1, E2, E3 et E4 dont les productions sont données en **annexe 2**. Pour chacun des 4 élèves.

a. Expliquer, en argumentant à partir des traces écrites de l'élève, si la procédure qui semble avoir été utilisée témoigne d'une mise en œuvre correcte des propriétés mathématiques de la proportionnalité.

b. Émettre une hypothèse sur la cause des erreurs éventuelles.

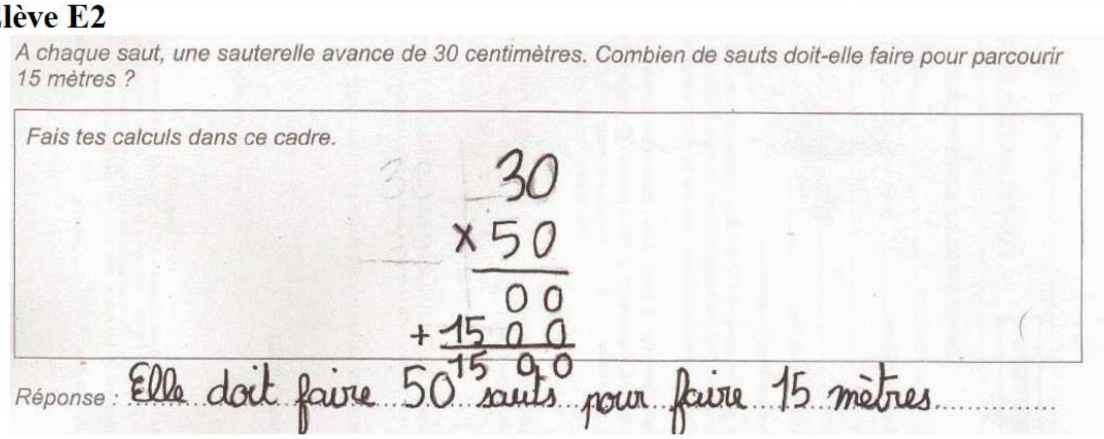
Élève E1



a. L'élève E1 a représenté une échelle graduée en mètres, régulièrement espacée, puis il a dessiné des « petits ponts » représentant les sauts. Enfin, il a compté le nombre de « petits ponts ». Il s'agit d'une procédure de proportionnalité étant donné que chaque saut mesure bien 30 cm.

b. Il aurait pu trouver le résultat exact en ayant construit un axe gradué beaucoup plus précis : en effet, l'axe n'est pas tracé à la règle, et même si les graduations semblent correctement espacées, les « petits ponts » sont représentés de manière très peu précise.
Il a dû penser que dans un mètre, c'est à dire 100 cm, il y a un peu plus de 3 sauts ($30+30+30 = 90$ qui est plus petit que 100), mais un peu moins de 4 sauts ($30 + 30 + 30 + 30 = 120$ qui est plus grand que 100). Il a alors dessiné pour chaque graduation un peu plus de 3 petits ponts.

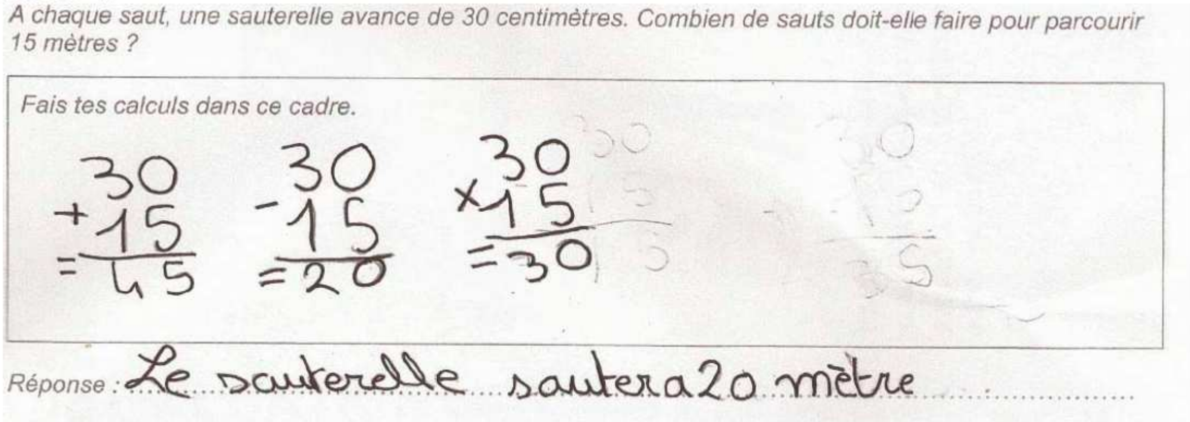
Élève E2



a. L'élève E2 semble avoir commencé par effectuer une division érонée avec un dividende égal à 30, ce qui peut montrer qu'il a reconnu un problème pouvant se résoudre à l'aide d'une division euclidienne. Il a ensuite effacé pour effectuer une multiplication exacte qui donne un résultat correct.

b. Le résultat est juste, mais on ne sait pas comment l'élève a déterminé le nombre à multiplier par 30 pour obtenir le résultat car il n'a donné aucune trace intermédiaire. Il est possible qu'il ait utilisé les propriétés d'homogénéité et/ou d'additivité du type « *un saut mesure 30 cm, donc 10 sauts mesurent 300 cm. . .* »

Élève E3


A chaque saut, une sauterelle avance de 30 centimètres. Combien de sauts doit-elle faire pour parcourir 15 mètres ?

Fais tes calculs dans ce cadre.

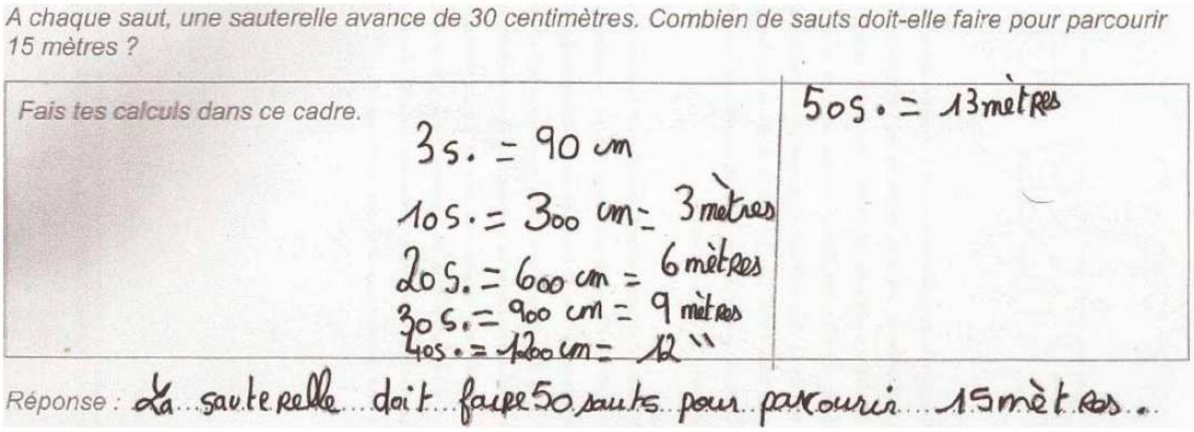
30 + 15 = 45   30 − 15 = 20   30 × 15 = 30

Réponse : Le sauterelle sautera 20 mètre

a. L'élève E3 effectue les différents types d'opérations qu'il connait, mis à part la division. Il donne ensuite l'un des résultats qui lui semble peut-être le plus cohérent ?
Il n'y a aucune situation de proportionnalité dans ses calculs.

b. On peut observer que la compréhension de l'énoncé et de l'utilisation des différentes opérations ne semblent pas être assimilées, les techniques opératoires ne sont pas maitrisées (seule l'addition est juste). La réponse n'est pas non plus en relation avec la question posée.
Nous sommes en présence d'un élève qui ne sait pas comment résoudre ce problème, il sait implicitement que la résolution passe par un calcul, mais il ne sait pas lequel.

Élève E4


A chaque saut, une sauterelle avance de 30 centimètres. Combien de sauts doit-elle faire pour parcourir 15 mètres ?

Fais tes calculs dans ce cadre.

3s. = 90 cm
10s. = 300 cm = 3 mètres
20s. = 600 cm = 6 mètres
30s. = 900 cm = 9 mètres
40s. = 1200 cm = 12 "

50s. = 13 mètres

Réponse : La sauterelle doit faire 50 sauts pour parcourir 15 mètres.

a. L'élève E4 semble utiliser différentes propriétés de la proportionnalité qui peuvent être la propriété additive (10 sauts mesurent 300 cm, 20 sauts mesurent 600 cm, donc 30 sauts mesurent 900 cm), l'homogénéité (10 sauts mesurent 300 cm, son double 20 sauts mesurent le double de 300 cm) et le coefficient de proportionnalité simple (un saut mesure 30 cm, donc 3 sauts mesurent 3 fois 30 cm) mais on ne connait pas exactement le cheminement pour obtenir ses calculs, ni si plusieurs techniques ont été utilisées.
Les conversions sont exactes ainsi que la phrase de conclusion.

b. Une seule erreur à noter, relevant sûrement d'un faute d'étourderie, l'élève indique que 50 sauts mesurent 13 mètres dans le deuxième cadre de calcul, alors que sa réponse est bien 15 mètres.

Question 3.
D'un point de vue théorique, cette situation de proportionnalité peut être modélisée par une fonction linéaire du nombre de sauts.

c. Expliciter cette fonction.

d. Donner la réponse attendue en utilisant cette fonction.

c. Un saut mesure 30 cm, on souhaite connaître le nombre de sauts à effectuer pour obtenir 15 m.
Il faut tout d'abord harmoniser les unités de mesures pour obtenir un résultat cohérent.
S l'on garde le résultat en cm, alors un saut mesure 30 cm et x saut mesurent $30 \times x$ cm.

Définition 12
La fonction f qui à tout nombre x associe le nombre ax s'appelle **fonction linéaire** de coefficient a. Elle se note $f : x \to ax$ ou $f(x) = ax$.

Soit y le résultat en cm, on a alors $y = 30x$ où x est le nombre de sauts effectués. Ceci est bien l'équation d'une fonction linéaire.

Conclusion : *cette situation peut être modélisée par la fonction* $\boxed{f : x \to 30x}$.

d. On souhaite résoudre l'équation : $f(x) = 1\,500 \iff 30x = 1\,500$

$$\iff x = \frac{1\,500}{30}$$
$$\iff x = 50.$$

Conclusion : *la sauterelle devra effectuer 50 sauts pour parcourir 15 mètres.*

II. Situation B

Le problème ci-dessous a été donné à des élèves à l'entrée en sixième.

Énoncé B
6 objets identiques coûtent 150 €. Combien coûtent 9 de ces objets ?

Question 1.
Dans cet énoncé, qu'est-ce qui indique que la situation est une situation de proportionnalité ?

Le fait que les objets soient « *identiques* » indique une situation de proportionnalité.

Question 2.
D'un point de vue mathématique, qu'est-ce qui différencie cet énoncé du précédent ?

La plus grande différence vient du fait que, dans l'énoncé précédent, on nous donne la valeur d'un seul objet, ce qui simplifie ensuite la procédure à effecteur. Dans ce deuxième énoncé, on nous donne le prix pour 6 objets.
Nous sommes donc dans une différence mathématique de l'ordre de la technique de proportionnalité.

Une autre différence résulte dans les unités : en effet, le premier énoncé utilise différentes unités (les centimètres et les mètres) alors que celui-ci n'en utilise qu'une : les euros.
Nous sommes donc dans une différence mathématique de l'ordre des conversions.

Question 3.
Proposer trois méthodes possibles pour résoudre cet exercice en cycle 3, et pour chacune expliciter les propriétés mathématiques utilisées.

D'après l'extrait du document de l'annexe 1, on dispose de quatre procédures de résolution :

- propriété additive ; (P1)
- propriété d'homogénéité : (P2)
- passage par l'unité ; (P3)
- coefficient de proportionnalité « simple ». (P4)

Nous allons utiliser ces procédures afin de résoudre le problème. On remarque tout d'abord qu'il n'est pas possible de trouver un coefficient de proportionnalité « simple » au niveau du cycle 3 pour passer de 6 à 9 (ce coefficient serait 1,5), ni entre 6 et 150 (qui serait 25). Cette dernière procédure est donc à bannir dans un tel niveau.

Méthode 1 : 6 objets identiques coûtent 150 €, donc 3 objets identiques coûtent 75 € (P2, on prend la moitié des objets, donc la moitié du prix) ;
Or, $9 = 6 + 3$, donc 9 objets identiques coûtent 150 € + 75 € = 225 € (P1).

Méthode 2 : 6 objets identiques coûtent 150 €, donc 3 objets identiques coûtent 75 € (P2, on prend la moitié des objets, donc la moitié du prix) ;
donc 9 objets identiques coûtent 3×75 € = 225 € (P2, on prend le triple des objets).

Méthode 3 : 6 objets identiques coûtent 150 €, donc 1 objet coûte six fois moins : 150 € $\div$ 6 = 25 € ; et 9 objets identiques coûtent neuf fois plus : 9×25 € = 225 € (P3).

☆ *Conclusion :* *si 6 objets coûtent 150 €, alors 9 objets coûtent 225 €.*

III. Situation C

En classe de CM2, un professeur propose le travail suivant aux élèves :

Énoncé C

Un pavé droit a pour base un carré de côté 2 cm. On fait varier sa hauteur et on s'intéresse à son volume.

1. *Complète le tableau de valeurs suivant*

Hauteur du prisme droit	*2 cm*	*3 cm*	*4 cm*	*5 cm*	*6 cm*	*10 cm*
Volume du prisme droit						

2. *Place sur la feuille les six points correspondant aux six colonnes du tableau. [le professeur a distribué une feuille de papier quadrillé sur laquelle les deux axes gradués d'un repère orthogonal ont été tracés. Sur l'axe des abscisses il a indiqué : hauteur du pavé droit, et sur celui des ordonnées : volume du pavé droit]*
3. *Que constates-tu ? vérifie avec ta règle.*

Question 1.

Citer une nouvelle caractérisation de la proportionnalité mise en évidence dans cet exercice.

Cet exercice permet de mettre en évidence une propriété graphique de la proportionnalité qui est le fait que les points formés par les couples de nombres associés sont alignés sur une droite passant par l'origine du repère.

Question 2.

Dans cet énoncé, c'est la hauteur du pavé droit qui varie. Si le professeur avait choisi de faire varier la longueur du côté du carré de la base, qu'est-ce que cela aurait changé ? Justifier.

Propriété 13

Le volume d'un pavé droit de côtés l, L et h se calcule suivant la formule $\mathcal{V} = l \times L \times h$

Dans le cas d'un pavé droit à base carrée de côté c et de hauteur h, on a $\mathcal{V} = c \times c \times h$.

On obtient les deux situations suivantes :

variation de la hauteur h	**variation du côté du carré de base c**
$\mathcal{V} = 2 \times 2 \times h$	$\mathcal{V} = c \times c \times 2.$
$\mathcal{V} = 4h$	$\mathcal{V} = 2\,c^2$

La première formule $\mathcal{V} = 4h$ caractérise bien une situation de proportionnalité puisqu'il s'agit d'une fonction linéaire ; en revanche, la seconde formule $\mathcal{V} = 2\,c^2$ ne montre pas une situation de proportionnalité (la fonction obtenue est une parabole et dans ce cas, il n'y aurait pas eu alignement des points.

VI. Situation D

Dans le document ressource « le nombre au cycle 3 » on trouve, au chapitre proportionnalité, les lignes suivantes :

Le terme de « proportionnalité » apparaît dans les programmes 2008 [BO2008] au cycle 3 [. . .] mais la notion de proportionnalité est présente dans les situations mathématiques depuis la maternelle. En effet, les jeux d'échange sont déjà des problèmes relevant de la proportionnalité.
Exemple : Une bille bleue vaut deux billes rouges. Si je te donne 3 billes bleues, combien me donnes-tu de billes rouges ?

Question 1.

En quoi le problème ci-dessus est-il un problème de proportionnalité ?

Ce problème est un problème de proportionnalité puisqu'une bille bleue vaudra toujours deux billes rouges. Ici, le coefficient de proportionnalité vaut 2, il est « simple ».

Question 2.

Expliciter une procédure de résolution envisageable en grande section de maternelle.

On peut utiliser une procédure de manipulation :

si l'on dispose de matériel (billes de couleurs rouge et bleue), on peut faire des collections successives : chacune comporterait une bille bleue et deux billes rouges. Lorsque l'élève arrive à la troisième collection (donc la troisième bille bleue), il s'arête et dénombre les billes rouges.

Ou encore procéder à des échanges successifs : « À chaque fois que je te donne une bille bleue, tu me donnes deux billes rouges. ». Les échanges s'arrêtent à la troisième bille bleue.