Chapitre IX

Produit scalaire dans l'espace

1. Orthogonalité dans l'espace

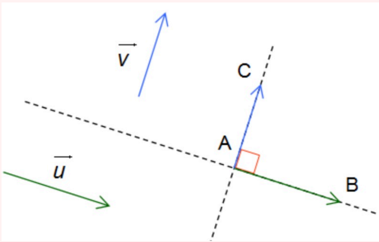
Définition 1

- Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace non colinéaires.

  A partir d'un point A, on place le point B tel que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et le point C tel que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$.

  Si les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires dans le plan (ABC), on dit que les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont **orthogonaux**.

- Deux droites de l'espace sont orthogonales si elles sont dirigées par deux vecteurs orthogonaux.

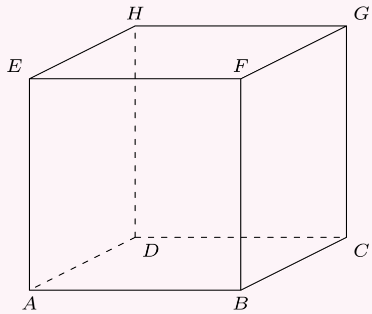


En guise d'explications

- Deux droites sont coplanaires si et seulement si elles sont sécantes ou parallèles.
- Deux droites sécantes sont donc coplanaires ; si en plus elles sont orthogonales, on dit que les droites sont perpendiculaires (« elles se coupent en formant un angle droit »).
- Deux droites orthogonales qui ne sont pas sécantes ne sont pas coplanaires ; elles ne sont donc pas perpendiculaires.

  Par exemple, dans le cube $ABCDEFGH$ ci-contre :

  - Dans le plan EFG, la droite (EF) est perpendiculaire à la droite (FG) : on peut dire que dans l'espace, ces deux droites sont orthogonales.
  - Les droites (EF) et (BC) ne sont pas coplanaires : elles ne peuvent donc être perpendiculaires. En revanche, ces deux droites sont orthogonales.



2. Produit scalaire de deux vecteurs de l'espace

a) Définition du produit scalaire dans l'espace

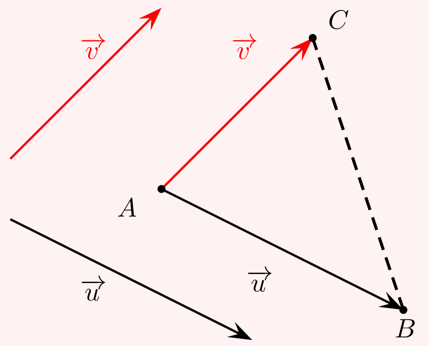
L'espace est muni d'une distance (unité de mesure).

Définition 2

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs **non nuls** de l'espace et A, B, C trois points tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$.

Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires, il existe une infinité de plans contenant les points A, B et C (tous les plans contenant la droite (AB)) ; sinon, il existe un unique plan contenant les points A, B et C.

Le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est défini comme étant le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ dans un plan contenant les points A, B et C :



Le **produit scalaire des vecteurs** $\overrightarrow{AB}$ **et** $\overrightarrow{AC}$ que l'on note $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ est égal au réel : $\dfrac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right)$.

$$\boxed{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right)}$$

Cette relation est appelé **le défaut d'orthogonalité**.

On observe que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ si, et seulement si $AB^2 + AC^2 - BC^2 = 0$, c'est-à-dire si, et seulement si, le triangle ABC est rectangle en A. Les droites (AB) et (AC) sont alors perpendiculaires.
Par conséquent :

Deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul.

$$\boxed{\text{Deux vecteurs } \overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v} \text{ sont orthogonaux si, et seulement si, } \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0.}$$

Définition 3 ▶ Le carré scalaire d'un vecteur

Le carré scalaire d'un vecteur $\overrightarrow{u}$ de l'espace est le réel noté $\overrightarrow{u}^2$ vérifiant $\overrightarrow{u}^2 = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u}$.
On a, comme dans le plan : $\overrightarrow{u}^2 = ||\overrightarrow{u}||^2$ et par suite $||\overrightarrow{u}|| = \sqrt{\overrightarrow{u}^2}$.

b) Dans un repère orthonormé

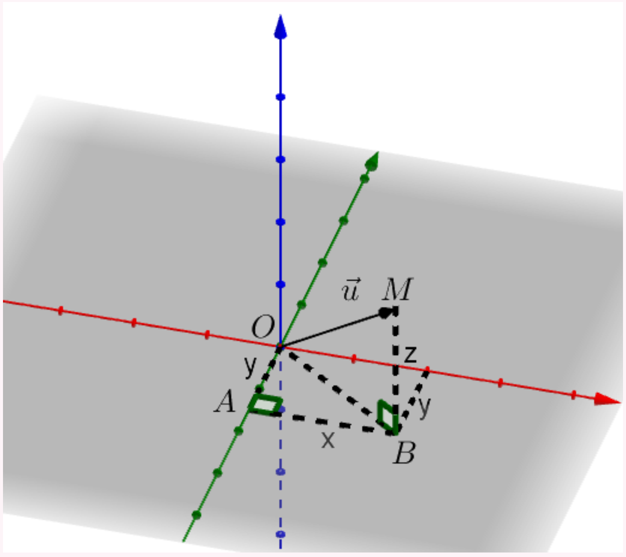
Définition 4

Un repère $\mathcal{R} = (O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ de l'espace est **orthonormé** lorsque les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont deux à deux orthogonaux et de norme 1 :

$$\begin{cases} \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0 \\ \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} = 0 \\ \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} = 0 \\ \|\overrightarrow{u}\| = \|\overrightarrow{v}\| = \|\overrightarrow{w}\| = 1. \end{cases}.$$

En guise d'explications

Pour retrouver la formule de la norme, il suffit d'appliquer le théorème de Pythagore dans le triangle OAB, puis dans le triangle OBM.



Propriété 1 ► Expression analytique du produit scalaire

Dans un repère orthonormé de l'espace, soit $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ deux vecteurs, alors :

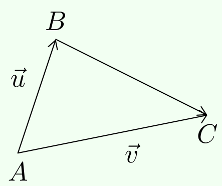
$$\boxed{\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = xx' + yy' + zz'}$$

Dans un repère orthonormé, la norme du vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ est égale à :

$$\boxed{\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

<u>Démonstration</u>

Traçons les représentants $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ à partir du point A :



- $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, donc $AB^2 = x^2+y^2+z^2$.
- $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$, donc $AC^2 = x'^2+y'^2+z'^2$.
- $\vec{u}+\overrightarrow{BC} = \vec{v}$, donc $\overrightarrow{BC} = \vec{v}-\vec{u}$.
  $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}x'-x\\y'-y\\z'-z\end{pmatrix}$, donc $BC^2 = (x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2$.

Ainsi : $\vec{u}\cdot\vec{v} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{2}\left[\underbrace{x^2+y^2+z^2}_{AB^2} + \underbrace{x'^2+y'^2+z'^2}_{AC^2} - \left(\underbrace{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}_{BC^2}\right)\right]$

En développant avec les identités remarquables, puis en réduisant, on obtient l'égalité attendue.

- Si $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{u}$, alors : $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u} = x^2+y^2+z^2$.
- La formule est fausse si le repère n'est pas orthonormé.

Propriété 2

Les propriétés algébriques du produit scalaire dans l'espace sont identiques à celles étudiées dans le plan. Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ du plan, pour tout réel k on a les relations suivantes :

- $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}$: conséquence de la définition
- $\overrightarrow{u} \cdot (k\overrightarrow{v}) = (k\overrightarrow{u}) \cdot \overrightarrow{v} = k(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})$ et $\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}$; on peut le démontrer à l'aide de l'expression analytique.

A partir de ces égalités, on obtient les suivantes :

- $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})^2 = \overrightarrow{u}^2 + 2\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{v}^2$
- $(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) \cdot (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u}^2 - \overrightarrow{v}^2$
- $(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v})^2 = \overrightarrow{u}^2 - 2\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{v}^2$

c) Produit scalaire par projection

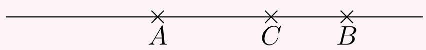
Propriété 3

1. Soient A, B et C trois points alignés :
   - Si C $\in$ [AB], alors $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \mathrm{AB} \times \mathrm{AC}$.
   - Si C $\notin$ [AB], alors $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = -\mathrm{AB} \times \mathrm{AC}$.
2. Soient A, B et C trois points, et H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) :
   - Si H $\in$ [AB], alors $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \mathrm{AB} \times \mathrm{AH}$.
   - Si H $\notin$ [AB], alors $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = -\mathrm{AB} \times \mathrm{AH}$.

Démonstration

1. - Si C $\in$ [AB] :

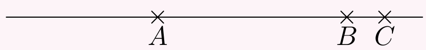
   1^{er} cas :

   : $BC = AB - AC$

   donc $BC^2 = AB^2 - 2 \times AB \times AC + AC^2$.

   $2^{\text{ème}}$ cas :

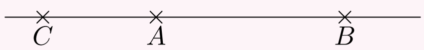
   : $BC = AC - AB$

   donc $BC^2 = AB^2 - 2 \times AB \times AC + AC^2$.

   Dans les deux cas, on retrouve la même expression pour BC^2.

   $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - AB^2 + 2 \times AB \times AC - AC^2\right) = AB \times AC$.

   - Si C $\notin$ [AB]

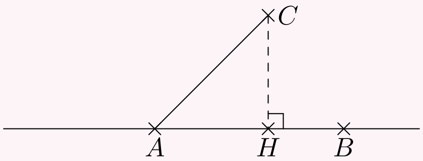
   

   : $BC = AB + AC$

   donc $BC^2 = AB^2 + 2 \times AB \times AC + AC^2$.

   Ainsi $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - AB^2 - 2 \times AB \times AC - AC^2\right) = -AB \times AC$.

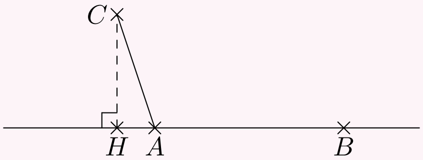
2. • Si H ∈ [AB) :



: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HC}\right)=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HC}$.

Or $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HC}=0$, car les deux vecteurs sont orthogonaux.
Donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}=AB\times AH$.

• Si H ∈ [AB) :



: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HC}\right)=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HC}$.

Or $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HC}=0$, car les deux vecteurs sont orthogonaux.
Donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}=-AB\times AH$.

Propriété 4 ▶ Forme trigonométrique

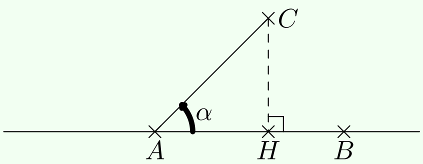
Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace :

$$\boxed{\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\|\overrightarrow{u}\|\times\|\overrightarrow{v}\|\times\cos\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right)}$$

Démonstration

Traçons les représentants $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ à partir d'un point A, ainsi que le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB). Il y a deux possibilités : le point H est sur la demi-droite $[AB)$ ou non.

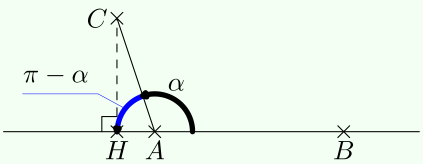
Si H est sur la demi-droite $[AB)$:



Alors $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AH$.
Dans le triangle AHC, l'angle α est compris entre $-\dfrac{\pi}{2}$ et $\dfrac{\pi}{2}$ radians, donc son cosinus est positif.
Ainsi : $\cos\alpha=\dfrac{AH}{AC}$, d'où $AH=AC\times\cos\alpha$.
Ce qui prouve que :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos\alpha$$

Si H n'est pas sur la demi-droite $[AB)$:



Alors $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-AB\times AH$.
Dans le triangle AHC, l'angle $\pi-\alpha$ est compris entre 0 et $\dfrac{\pi}{2}$ radians, donc son cosinus est positif.
De plus, pour tout réel x, $\cos(\pi-x)=-\cos x$.
Ainsi : $\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha=\dfrac{AH}{AC}$, d'où $AH=-AC\times\cos\alpha$.
Ce qui prouve que :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-AB\times(-AC\times\cos\alpha)=AB\times AC\times\cos\alpha$$

Recherche 1 ▶ Calculs d'angles

Exercice 1 : Dans un repère orthonormé de l'espace, si $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}$, déterminer $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

L'angle orienté formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est-il aigu ou obtus ?

Exercice 2 : Dans un repère orthonormé de l'espace, on donne $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\a\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}5a\\2a\\-1\end{pmatrix}$.

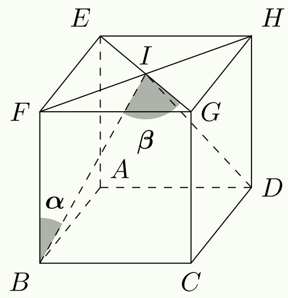
Déterminer les valeurs réelles de a pour lesquelles $\vec{u}\perp\vec{v}$.

Exercice 3 : *Pour calculer un angle géométrique formé par deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on exprime $\vec{u}\cdot\vec{v}$ de deux façons différentes : l'une permettant d'obtenir la valeur du produit scalaire, l'autre faisant intervenir l'angle.*

Soit $ABCDEFGH$, un cube et I le centre de la face $EFGH$.

On se place dans le repère orthonormé $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$.
Déterminer, au degré près, les mesures des angles :

1. $\alpha=\widehat{IBF}$
2. $\beta=\widehat{BID}$



3. Orthogonalité de droites et plans

Propriété 5 ▶ Droite et plan perpendiculaires

Soit $(\mathscr{P})$ un plan : il existe une droite (d) orthogonale à toutes les droites contenues dans $(\mathscr{P})$.
Cette droite est alors sécante avec le plan, et on dit que (d) et $(\mathscr{P})$ sont perpendiculaires (ou orthogonaux).

Droite perpendiculaire à un plan

Propriété 6 ▶ Condition suffisante pour montrer qu'un plan et une droite sont orthogonaux

Si une droite (d) est orthogonale à deux droites sécantes d'un plan (P), **alors** la droite (d) est orthogonale au plan (P).

Souvent, dans la pratique, pour démontrer qu'une droite (d) est orthogonale à un plan (P), on démontre qu'**un vecteur directeur de la droite (d)est orthogonale à deux vecteurs directeurs (donc non colinéaires) du plan (P)**.

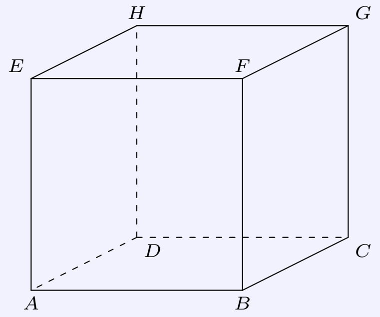
A titre d'exemple

Dans le cube $ABCDEFGH$ ci-contre, démontrons que la droite (EF) est orthogonale au plan (BFG).

- $EFGH$ est une face du cube ; c'est donc un carré. Alors $(EF) \perp (FG)$.
- $ABFE$ est aussi un carré en tant que face du cube ; alors $(EF) \perp (FB)$.
- Les droites (FB) et (FG) sont sécantes en F.

La droite (EF) est orthogonale aux droites (FG) et (FB) du plan (BFG) qui sont sécantes en F.

$\boxed{(EF) \text{ est donc orthogonale au plan } (BFG).}$

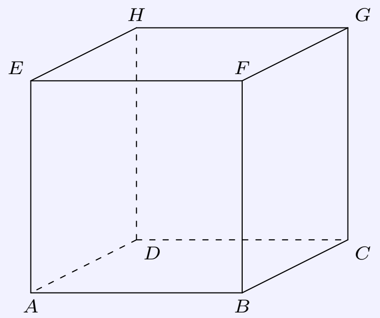


Définition 5 ▸ Vecteur normal

Le vecteur directeur d'une droite orthogonale à un plan (P) est appelé vecteur **normal** à (P).

A titre d'exemple

Dans le cube $ABCDEFGH$ ci-dessus, la droite (EF) est orthogonale aux droites (FG) et (FB) ; le vecteur $\overrightarrow{EF}$ est par conséquent normal au plan (BFG).
De même, le vecteur $\overrightarrow{EF}$ est normal au plan (EAD), le vecteur $\overrightarrow{CG}$ est normal au plan (ABC), etc...

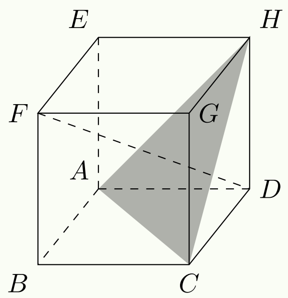


Recherche

Exercice 4 :

Soit $ABCDEFGH$, un cube.
On se place dans le repère $\mathscr{R}\left(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE}\right)$

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (FD).
2. Démontrer que la droite (FD) est orthogonale au plan (ACH).



Aide :
On utilisera le produit scalaire pour démontrer ce résultat :
par exemple, il suffit de montrer que $\overrightarrow{FD} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ *et que* $\overrightarrow{FD} \cdot \overrightarrow{AH} = 0$.

Propriété 7

Tous les vecteurs normaux à un plan (P) sont colinéaires ; ainsi toutes les droites perpendiculaires à un plan sont parallèles.

Propriété 8

- Si deux droites sont parallèles, tout plan perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.
- Si deux plans sont parallèles, toute droite perpendiculaire à l'un est perpendiculaire à l'autre.
- Deux plans distincts, perpendiculaires à une même droite, sont parallèles.

Plan perpendiculaire à deux droites parallèles

Droite perpendiculaire à deux plans parallèles

Définition 6

Deux plans sont dits **perpendiculaires** si l'un des deux plans contient une droite perpendiculaire à l'autre.
Cela revient aussi à dire que deux plans sont **perpendiculaires** si et seulement si leurs vecteurs normaux respectifs sont orthogonaux.

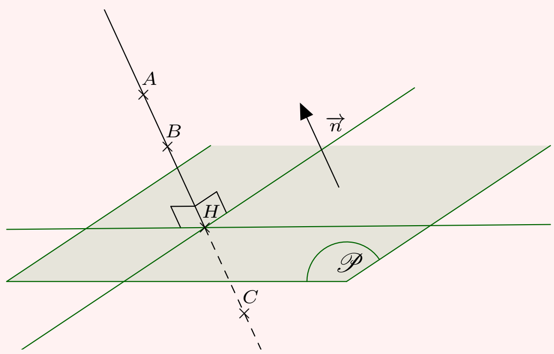
Attention : si deux plans $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{Q})$ sont perpendiculaires, cela n'implique pas que toute droite de $(\mathscr{P})$ est orthogonale à $(\mathscr{Q})$; dans la figure illustrative, le droite (JK) est incluse dans le plan orange, mais n'est pas orthogonale au plan bleu.

Plans perpendiculaires

4. Projeté orthogonal sur un plan

Définition 7

Soit A un point, et $(\mathscr{P})$ un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n}$.
La droite (d), passant par A et dirigée par $\overrightarrow{n}$ est perpendiculaire au plan $(\mathscr{P})$, avec lequel elle est sécante.
Leur unique point d'intersection H est le projeté orthogonal du point A sur le plan $(\mathscr{P})$.



Les points A, B, C et H ont tous le même projeté orthogonal sur $(\mathscr{P})$: H.

A retenir : Pour obtenir le projeté orthogonal du point A sur le plan $(\mathscr{P})$, on fait glisser A sur $(\mathscr{P})$, selon la direction orthogonale à $(\mathscr{P})$.
Un point du plan $(\mathscr{P})$ est son propre projeté orthogonal sur $(\mathscr{P})$.

Propriété 9 ▶ Distance entre un point et un plan

Soient A un point, $(\mathscr{P})$ un plan et H le projeté orthogonal de A sur $(\mathscr{P})$.
La distance entre les points A et H est la plus courte distance entre le point A et un point du plan $(\mathscr{P})$; on la définit comme étant la distance entre le point A et le plan $(\mathscr{P})$.

Démonstration

Supposons que A ne soit pas sur le plan $(\mathscr{P})$, et considérons un point M de $(\mathscr{P})$, distinct de H.
Les points A, H et M engendrent un plan, dans lequel le triangle AHM est rectangle en H : on déduit du théorème de Pythagore que $AM > AH$.

5. Equation cartésienne d'un plan

a) Déterminer l'équation d'un plan dans un repère orthonormal

Propriété 10

Soit $\mathscr{P}$ un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$, et A un point de $\mathscr{P}$.

- Un point M appartient au plan $\mathscr{P}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{n}=0$.
- il existe un réel d tel que le plan $\mathscr{P}$ est l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace vérifiant :

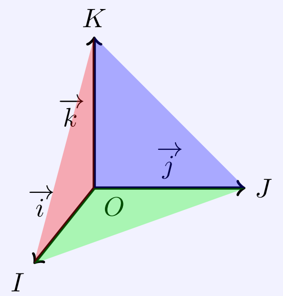
$$ax+by+cz+d=0\ .$$

Propriété 11

Réciproquement, soient $(a,b,c)\neq(0,0,0)$ un triplet de réels ; l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace vérifiant : $ax+by+cz+d=0$ est un plan, de vecteur normal de coordonnées $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

A titre d'exemple

1. Soient $(a,b)\neq(0,0)$ un couple de réels et c un réel.
   On rappelle que dans un plan, l'ensemble des points $M(x,y)$ vérifiant l'équation $ax+by+c=0$ est une droite de vecteur directeur de coordonnées $\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$.
2. On munit l'espace d'un repère orthonormé $(O\,;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$.
   - Le plan (OJK) a pour équation $x=0$ et admet pour vecteur normal le vecteur $\overrightarrow{i}$.
   - Le plan (OIK) a pour équation $y=0$ et admet pour vecteur normal le vecteur $\overrightarrow{j}$.
   - Le plan (OIJ) a pour équation $z=0$ et admet pour vecteur normal le vecteur $\overrightarrow{k}$.



A titre d'exemple 1

Exercice et corrigé proposés par Yvan Monka

Déterminer une équation cartésienne du plan $(\mathscr{P})$ passant par $A(-1\,;2\,;1)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\-3\\1\end{pmatrix}$.

Pour vous aider un corrigé d'Y. Monka.

Recherche 2

Exercice 5 : équation d'un plan dont on connaît un point et un vecteur normal

Déterminer une équation cartésienne du plan $(\mathscr{P})$ passant par $A(1\,;-2\,;3)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}4\\-2\\1\end{pmatrix}$.

Exercice 6 : équation d'un plan dont on connaît trois points distincts
On considère les points $A(0\,;1\,;1)$, $B(-4\,;2\,;3)$ et $C(4\,;-1\,;1)$.
Déterminer, s'il existe, une équation cartésienne du plan $(\mathscr{P})$ défini par ces trois points.

Exercice 7 : équation d'un plan dont on connaît un point et une droite perpendiculaire au plan

Soit $\mathcal{D}$ la droite dont une équation paramétrique est $\begin{cases}x=-2+3t\\y=5\\z=1+t\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$.

Soit A le point de coordonnées $(-1,2,3)$. Après avoir expliqué brièvement que $A\notin\mathcal{D}$, déterminer l'équation du plan perpendiculaire à $\mathcal{D}$ passant par A.

b) Orthogonalité de deux droites

Recherche

On se place dans un repère orthonormé. Pour chacun des exercices,

- Déterminer si les deux droites sont orthogonales.
- Déterminer si les droites sont sécantes et déterminer alors les coordonnées de leur point d'intersection.
- Quelles sont les droites perpendiculaires. justifier précisément.

Exercice 8 : $(d):\begin{cases}x=-2+t\\y=-3t\\z=-7+2t\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$, et $(d'):\begin{cases}x=7+2t'\\y=-4+t'\\z=0,5+t'\end{cases}$, $t'\in\mathbb{R}$.

Exercice 9 : $(\Delta):\begin{cases}x=8+\dfrac{3}{2}t\\y=-6\\z=8+3t\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$, et $(\Delta'):\begin{cases}x=2+4k\\y=-6+5k\\z=-4-2k\end{cases}$, $k\in\mathbb{R}$.

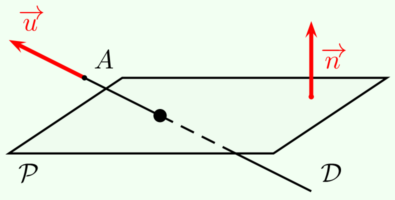
Exercice 10 : $(D):\begin{cases}x=5+5m\\y=1-4m\\z=-2+2m\end{cases}$, $m\in\mathbb{R}$, et $(D'):\begin{cases}x=2-2k\\y=-6-3k\\z=-4-k\end{cases}$, $k\in\mathbb{R}$.

c) Intersection d'une droite et d'un plan

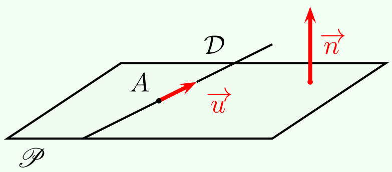
Propriété 12

Soit $\mathcal{D}$ une droite passant par un point A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ et $\mathscr{P}$ un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n}$.

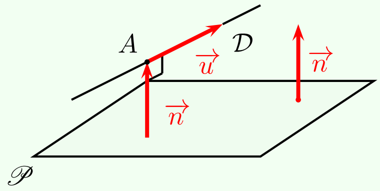
- si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{n}$ ne sont pas orthogonaux, la droite $\mathcal{D}$ et le plan $\mathscr{P}$ sont sécants.
- si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{n}$ sont orthogonaux et si
  - $A \in \mathscr{P}$, la droite $\mathcal{D}$ est incluse dans le plan $\mathscr{P}$;
  - $A \notin \mathscr{P}$, la droite $\mathcal{D}$ est strictement parallèle au plan $\mathscr{P}$.



$\mathcal{D}$ et $\mathscr{P}$ sont sécants



$\mathcal{D}$ est incluse dans $\mathscr{P}$



$\mathcal{D}$ est strictement parallèle à $\mathscr{P}$

A titre d'exemple

Exercice et corrigés proposé par Y. Monka.
Dans un repère orthonormé, le plan (P) a pour équation :

$$2x - y + 3z - 2 = 0$$

Soit $A(1;2;-3)$ et $B(-1;2;0)$
Déterminer l'intersection de la droite (AB) avec le plan (P).

Le corrigé se trouve ici.

Autre exemple : Soit le plan $\mathscr{P}$ d'équation $4x + 3y - 2z + 3 = 0$. Les droites (d_1) et (d_2) sont définies par une représentation paramétrique donnée ci dessous :

$$(d_1)\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1-t \\ y & = & 2+2t \\ z & = & -1+t \end{array}\right. \quad \text{avec } t \in \mathbb{R} \qquad (d_2)\left\{\begin{array}{rcl} x & = & t \\ y & = & 3+t \\ z & = & 3+2t \end{array}\right. \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

1. Le plan $\mathscr{P}$ et la droite (d_1) sont-ils sécants ?

2. Déterminer l'intersection entre le plan $\mathscr{P}$ et la droite (d_2).

d) Coordonnées d'un projeté orthogonal

Recherche

Exercice 11 : On se place dans un repère orthonormé. Soient $A\,(7;8;13)$ et $(\mathscr{P})\,:\,2x + 5y + 6z - 2 = 0$. Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point A sur le plan $(\mathscr{P})$. Calculer AH.

Exercice 12 : L'espace est muni d'un repère orthonormé.
Soit $A\,(x_A; y_A; z_A)$ un point de l'espace et $\mathscr{P}$ un plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$.

1. Démontrer que la distance entre A et $\mathscr{P}$ est donnée par $d\,(A, \mathscr{P}) = \dfrac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$
2. On donne : $T\,(9;2;0)$ et $(\mathscr{P})\,:\,3x + 2y + z - 3 = 0$.
   Calculer la distance entre le point T et le plan $(\mathscr{P})$.

e) Plan médiateur d'un segment

Définition 8

L'espace est muni d'un repère orthonormé.
Soient A et B deux points de l'espace. L'ensemble des points équidistants de A et B (c'est-à-dire l'ensemble des points M vérifiant $MA = MB$) est appelé le plan médiateur du segment $[AB]$; on peut le noter $\mathscr{P}_{[AB]}$.

$$\begin{aligned} AM = BM &\iff (x-x_A)^2+(y-y_A)^2+(z-z_A)^2=(x-x_B)^2+(y-y_B)^2+(z-z_B)^2 \\ &\iff 2(x_B-x_A)x+2(y_B-y_A)y+2(z_B-z_A)z+x_A^2+y_A^2+z_A^2-x_B^2-y_B^2-z_B^2=0 \\ &\iff ax+by+cz+d=0, \text{ avec } \begin{cases} a=2(x_B-x_A) \\ b=2(y_B-y_A) \\ c=2(z_B-z_A) \\ d=x_A^2+y_A^2+z_A^2-x_B^2-y_B^2-z_B^2 \end{cases} \end{aligned}$$

Propriété 13

Soient A et B deux points de l'espace muni d'un repère orthonormé.
le plan médiateur $\mathscr{P}_{[AB]}$ du segment $[AB]$ est le plan perpendiculaire à la droite (AB) passant par le milieu du segment $[AB]$. $\mathscr{P}_{[AB]}$ a donc pour vecteur normal $\overrightarrow{AB}$ et passe par le milieu du segment $[AB]$.

Démonstration laissée en exercice

Recherche

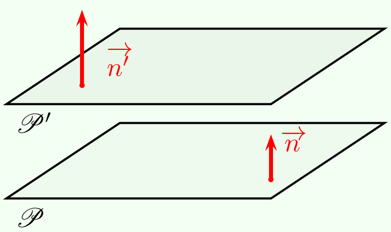
Exercice 13 : L'epsace est muni d'un repère orthonormé.
Soient $A(-8;5;-3)$ et $B(-8;-8;1)$ deux points de l'espace.
Déterminer de deux manières différentes l'équation cartésienne du plan médiateur du segment $[AB]$.

f) Intersection de deux plans

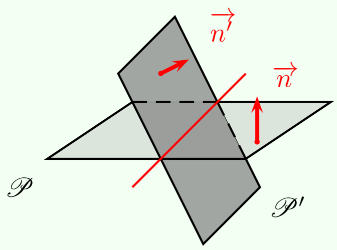
Propriété 14

On rappelle que deux plans sont soit confondus, soit strictement parallèles, soit sécants en une droite.
Soient deux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ de vecteurs normaux respectifs $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$.

- si $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ sont colinéaires alors $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont parallèles (confondus ou strictement parallèles).
- si $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ ne sont pas colinéaires alors $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont sécants et leur intersection est une droite.



$\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont parallèles



$\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont sécants

A titre d'exemple 2

Exercice et corrigés proposés par Y. Monka.

On considère deux plans de l'espace :
$(P): \quad -x+2y+z-5=0$
$(P'): \quad 2x-y+3z-1=0$
Déterminer une représentation paramétrique de la droite d'intersection (d) des plans (P) et (P').

Le corrigé se trouve en cliquant là.

Recherche

Exercice 14 : On considère les plans $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ respectivement d'équation $2x-3y+z-1=0$; $4x-5y+3z-3=0$ et $x+2y+4z-6=0$.

a. Démontrer que les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants.

b. Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$, intersection de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

c. Démontrer que les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_3$ sont perpendiculaires.

Exercice 15 : L'espace est muni d'un repère orthonomé $(O\ ;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath},\ \vec{k})$. Soit $\mathscr{P}$ le plan d'équation : $2x-3y+z-6=0$.

a. Montrer que le plan $\mathscr{P}$ coupe les axes Ox, Oy et Oz respectivement en : $A(3\ ;\ 0\ ;\ 0)$, $B(0\ ;\ -2\ ;\ 0)$ et $C(0\ ;\ 0\ ;\ 6)$.

b. On considère le point $D(5\ ;\ -3\ ;\ 1)$.

1. Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{AD}$ est normal au plan $\mathscr{P}$.
2. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathscr{Q}$ passant par le point D et parallèle au plan $\mathscr{P}$.

c. Soit $\mathscr{T}$ le plan d'équation : $x+y+z-3=0$.

1. Démontrer que les points A et D appartiennent au plan $\mathscr{T}$.
2. Déterminer un vecteur $\vec{n}$ normal au plan $\mathscr{T}$ et prouver que $\vec{n}$ est un vecteur du plan $\mathscr{P}$.
3. Déterminer l'intersection des plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{T}$.