Un corrigé du CRPÉ 2015 - PG 1

Luc Tiennot, ÉSPÉ de la Réunion

Ce corrigé n'est pas le corrigé fourni aux correcteurs par le concepteur du sujet, mais il devrait en être proche.
Mes commentaires, non destinés à être écrits sur la copie, sont en note de bas de page.
Je remercie Nathalie Daval et Dominique Tournès pour leur relecture attentive.

PREMIÈRE PARTIE : PROBLÈME

P étant un polygone de Pick, dans tout le problème nous notons $\mathcal{A}_P$ l'aire du polygone P calculée par les moyens géométriques usuels et $\mathcal{A}'_P$ l'aire de ce même polygone calculée avec la formule de Pick.

Tous les calculs sont faits avec des nombres, d'$u.l.$ pour les longueurs, d'$u.a.$ pour les aires.

A - Calcul de l'aire d'un polygone de Pick sur un exemple

Le polygone $ABCDEF$ peut être décomposé en le triangle ABF, le carré $BCDF$ et le triangle DEF rectangle isocèle en F. Donc

$$\mathcal{A}_{ABCDEF} = \mathcal{A}_{ABF} + \mathcal{A}_{BCDF} + \mathcal{A}_{DEF}$$

- Dans le triangle ABF, la hauteur relative au côté $[BF]$ est $[AK]$ où K est le projeté orthogonal de A sur (BF), donc
$$\mathcal{A}_{ABF} = \frac{BF \times AK}{2} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$$
- Le carré $BCDF$ a pour côté $BF = 5$, donc
$$\mathcal{A}_{BCDF} = BF^2 = 5^2 = 25$$
- Le triangle DEF est la moitié du carré précédent, donc
$$\mathcal{A}_{DEF} = \frac{\mathcal{A}_{ABF}}{2} = \frac{25}{2} = 12{,}5$$

Finalement,
$$\mathcal{A}_{ABCDEF} = 10 + 25 + 12,5 = 47{,}5$$
L'aire du polygone $ABCDEF$ est 47,5 $u.a.$

B - Utilisation de la formule de de Pick sur un exemple

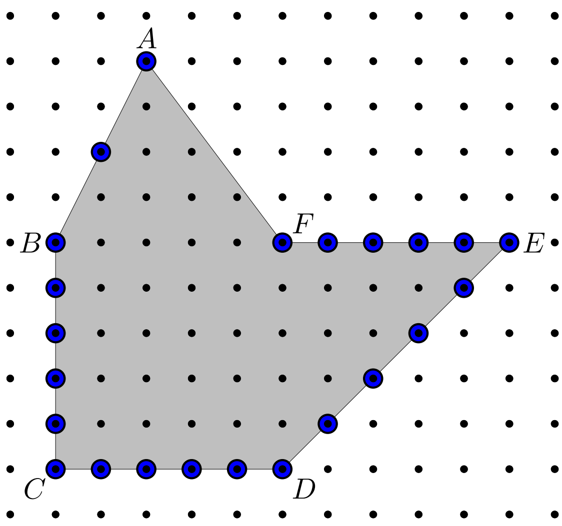
1.

Application de cette formule au polygone $ABCDEF$.

Pour faciliter le dénombrement, reproduisons la figure 1, en colorant en bleu les points du réseau sur le périmètre du polygone $ABCDEF$. Les points du réseau intérieurs sont comptés ligne par ligne en partant de la ligne sous le point A et en descendant.

$$i = 1 + 2 + 4 + 4 + 8 + 7 + 6 + 5 = 37.$$

Les points du réseau sur le périmètre sont comptés segments par segments, en partant de A et en y revenant en tournant dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, en prenant garde à ne pas compter deux fois un sommet.
$$b = 3 + 5 + 5 + 5 + 5 = 23.$$



En appliquant la formule de Pick, on trouve

$$\mathcal{A}'_{ABCDEF} = 37 + \frac{23}{2} - 1 = 47,5.$$

On a bien

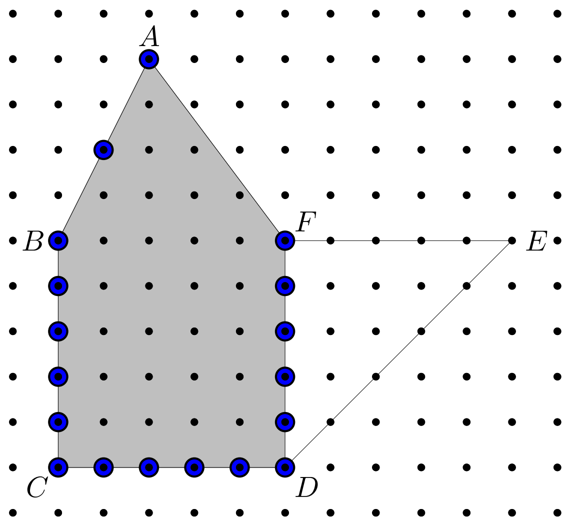
$$\mathcal{A}_{ABCDEF} = \mathcal{A}'_{ABCDEF}.$$

On retrouve, avec la formule de Pick, la même valeur pour l'aire du polygone $ABCDEF$.

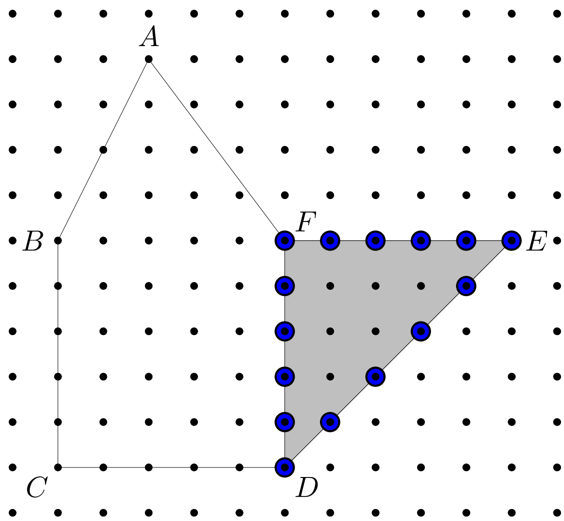
2. Propriété d'additivité des aires

On utilise un dénombrement analogue à la question précédente sur chacun des deux polynomes.

$\mathcal{A}_{ABCDF}$



$\mathcal{A}_{DEF}$



Appliquons la formule de Pick aux deux polygones :

$$b = 3 + 5 \times 3 = 18$$

$$i = 1 + 2 + 4 \times 6 = 27$$

$$\mathcal{A}'_{ABCDF} = 27 + \frac{18}{2} - 1 = 35$$

$$b = 5 \times 3 = 15$$

$$i = 3 + 2 + 1 = 6$$

$$\mathcal{A}'_{DEF} = 6 + \frac{15}{2} - 1 = 12,5$$

On retrouve bien que

$$\mathcal{A}'_{ABCDF} + \mathcal{A}'_{DEF} = 47,5 = \mathcal{A}'_{ABCDEF},$$

ce qui illustre, sur ce cas particulier, la propriété d'additivité des aires.

C - Quelques conséquences de la formule de de Pick

1.

Montrons qu'il n'y a pas de polygone de Pick d'aire 7,5 avec b pair.
Dans la formule de Pick, on calcule une aire en additionnant trois termes, le premier et le troisième sont des entiers, le second est un entier si b est pair et un entier plus un demi si b est impair. Il en résulte que l'aire d'un polygone de Pick est soit un entier, si b est pair, soit un entier plus un demi, si b est impair.
Il n'y a donc pas de polygone de Pick d'aire 7,5 avec b pair.

2.

Soit un polygone de Pick d'aire 7,5.
D'après la question précédente, on sait que b est un entier impair.

- Soit b_{max} la valeur maximale de b. Montrons que $b_{\text{max}} = 17$. D'après la formule de Pick,

$$b = 2\left(\mathcal{A} + 1 - i\right).$$

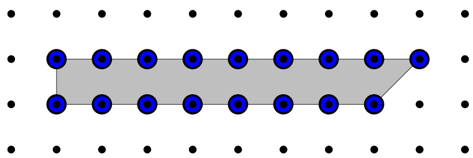
  Ici, $\mathcal{A} = 7,5$, donc

$$b = 17 - 2i.$$

  La valeur maximale de b est obtenue pour la valeur minimale de i. Si le polygone de Pick n'a aucun point intérieur, l'entier naturel i prend sa valeur minimale : $i_{\text{min}} = 0$. On obtient bien

$$b_{\text{max}} = 17.$$

- Tracé d'un polygone de Pick correspondant à cette valeur.
  Le polygone ci-dessous répond à la question [1].



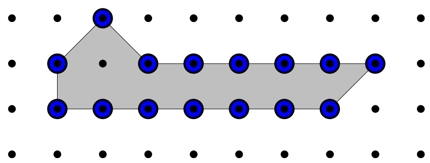
3.

Soit un polygone de Pick d'aire 7,5 et contenant un seul point intérieur.

- Calculons la valeur de b.
  D'après la formule de Pick, $b = 2\left(\mathcal{A} + 1 - i\right)$ avec $\mathcal{A} = 7,5$ et $i = 1$, donc

$$b = 15.$$

- Tracé d'un polygone de Pick d'aire 7,5 vérifiant ces conditions. Le polygone ci-dessous répond à la question [2].



4.

Montrons que le nombre maximal de points sur le bord d'un polygone de Pick d'aire $\mathcal{A}$ quelconque est $2\mathcal{A} + 2$.

1. Il y a évidemment d'autres réponses possibles.
2. Même remarque.

Soit $b_{\max}$ la valeur maximale de b. En utilisant encore une fois $b = 2(\mathcal{A} + 1 - i)$ et en remarquant que $b_{\max}$ est obtenu pour la valeur $i_{\min} = 0$ [3], on trouve $b_{\max} = 2(\mathcal{A} + 1)$, soit

$$b_{\max} = 2\mathcal{A} + 2.$$

D - Démonstration de la formule de de Pick dans le cas d'un rectangle

1.

Exprimons b et i en fonction de L et ℓ.

- Commençons par parcourir le bord supérieur du rectangle de la gauche vers la droite. Si on fait abstraction du point de départ (sommet supérieur gauche), on rencontre L points du réseau sur ce trajet. Parcourons en suivant le bord droit. Le sommet supérieur droit est déjà compté, il y a donc ℓ points sur ce nouveau trajet. Nous avons parcouru un demi-périmètre du rectangle et compté la moitié des points du réseau se trouvant sur le périmètre, soit $L + \ell$. Sur la totalité du périmètre, il y a donc $2(L + \ell)$ points du réseau. D'où :

$$b = 2(L + \ell).$$

- Sur la dimension L (resp. ℓ) du rectangle, il y a $L + 1$ (resp $\ell + 1$) points du réseau. Deux sont sur le périmètre, il y a donc $L + 1 - 2 = L - 1$ (resp $\ell - 1$) points du réseau intérieurs au rectangle. Le nombre total de points intérieurs au rectangle est donc :

$$i = (L - 1)(\ell - 1).$$

2.

Déduisons-en la formule de Pick, dans le cas d'un rectangle.
On sait que

$$\mathcal{A} = L \times \ell.$$

De l'expression de i à la question précédente, on déduit que $L \times \ell = i + (L + \ell) - 1$.
De l'expression de b à cette même question, on déduit que $(L + \ell) = \dfrac{b}{2}$.
Finalement, nous avons prouvé la formule de Pick dans la cas d'un rectangle de Pick :

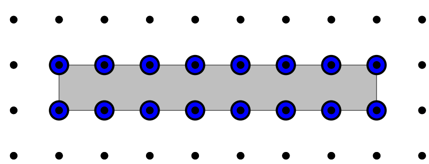
$$\mathcal{A} = i + \frac{b}{2} - 1.$$

DEUXIÈME PARTIE : trois exercices indépendants

Exercice 1
Dans cet exercice, $A \in \mathbb{N}$ et $B \in \mathbb{N}$. Examinons successivement les trois informations.

- 111 est un multiple de A. Comme la décomposition en produits de facteurs premier de 111 est $111 = 3 \times 37$, les seules valeurs possibles pour A sont 1, 3, 37 et 111.
- B est un cube d'un entier. Dans le traitement de l'information suivante, nous indiquerons les valeurs de B qui sont des cubes.
- $A - B \in \mathbb{N}$ et $A - B$ multiple de 10. Donc

3. La valeur $i = 0$ est toujours possible, comme l'illustre la figure de la question C-2, pour une aire égale à un demi nombre naturel impair et comme l'illustre la figure ci-dessous pour une aire égale à un entier naturel.



- Si $A = 1$, alors $B = \underbrace{1}_{1^3}$.
- Si $A = 3$, alors $B = 3$.
- Si $A = 37$, alors $B = 37$ ou $B = \underbrace{27}_{3^3}$ ou $B = 17$ ou $B = 7$.
- Si $A = 111$, alors $B = 111$ ou $B = 101$ ou $B = 91$ ou $B = 81$ ou $B = 71$ ou $B = 61$ ou $B = 51$ ou $B = 41$ ou $B = 31$ ou $B = 21$ ou $B = 11$ ou $B = \underbrace{1}_{1^3}$.

Il n'y a que 3 couples (A, B) où B est un cube.

Finalement, toutes les valeurs possibles pour A et B sont :
- $A = 1$ et $B = 1$;
- $A = 37$ et $B = 27$;
- $A = 111$ et $B = 1$.

Exercice 2

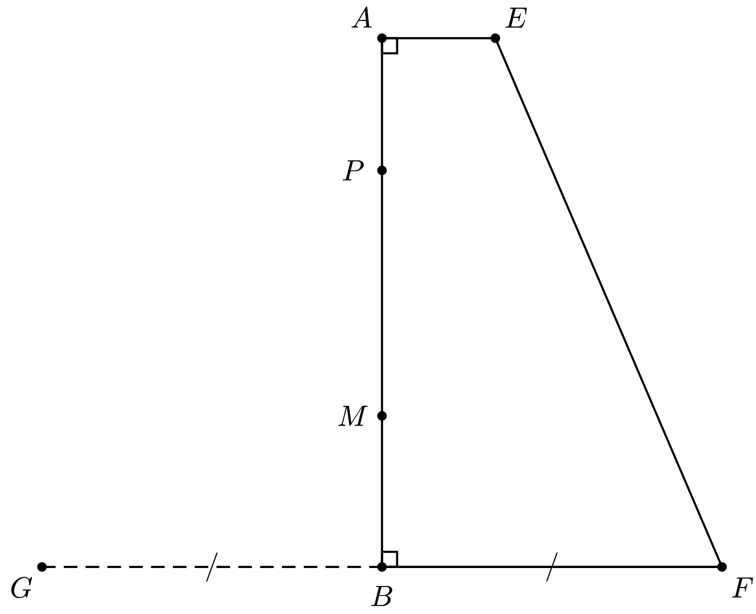
1. Par lecture graphique, le volume de glace obtenu avec 7 L de liquide est d'environ 7,5 L.
2. Par lecture graphique, le volume d'eau liquide nécessaire pour obtenir 9 L de glace est d'environ 8,3 L.
3. Le volume de glace semble proportionnel au volume d'eau liquide car la représentation graphique de la variation d'une des grandeurs en fonction de l'autre est un segment de droite dont le support est une droite passant par l'origine du repère.
4. Soit p le pourcentage dont le volume d'eau augmente en gelant.
$$p = \frac{10,8 - 10}{10} \times 100 = 8.$$
En gelant, le volume d'eau augmente de $8\,\%$[4].
5. La ville fournit $20\,\text{m}^3 = 20\,000\,\text{L}$ d'eau chaque jour, soit $30 \times 20\,000\,\text{L} = 600\,000\,\text{L}$ au bout de 30 jours. Ce qui correspond, d'après la question précédente, à un volume de $600\,000\,\text{L} \times 1,08 = 648\,000\,\text{L}$ de glace.

Exercice 3

Dans cet exercice, toutes les distances sont exprimées en cm.

1. La figure, page suivante, est faite à l'échelle $\frac{1}{2}$[5].
2. $P = (AB) \cap (EG)$.
   - Montrons que pour tout point M de $[AB]$, $EM + MG \geqslant EP + PG$.
     D'après l'inégalité triangulaire, $EM + MG \geqslant EG$.
     Un trapèze isocèle est un quadrilatère convexe, donc ses diagonales se coupent à l'intérieur de celui-ci, donc les points E, P, G sont alignés et dans cet ordre, donc $EG = EP + PG$.
     Finalement,
     $$\forall M \in [AB], \quad EM + MG \geqslant EP + PG.$$
   - Nous venons de montrer que pour tout point M du segment $[AB]$, la valeur minimale de $EM + MG$ est $EP + PG$.
     La symétrie orthogonale d'axe (AB) transforme F en G ; d'autre part, P et M sont leur propre image dans cette symétrie. Une symétrie conserve les distances, donc $MG = MF$ et $PG = PF$.
     On en déduit :
     $$\forall M \in [AB], \quad EM + MF \geqslant EP + PF.$$
     Ce qui signifie que $EM + MF$ est minimale lorsque M est en P.

4. Ce pourcentage est aussi celui dont augmente le volume de *toute* quantité d'eau donnée, et pas seulement de *ce* volume. C'est ce que signifie la proportionnalité montrée à la question précédente.
5. Les points M et P n'étaient pas demandés dans cette question et peuvent être omis sur la figure.



3. a) Les droites (AE) et (BG) sont parallèles, les points E, P, G sont alignés et dans cet ordre et les points A, P, B sont alignés et dans cet ordre, donc les triangles APE et BGP sont semblables[6], donc, en particulier :
$$\frac{AP}{BP} = \frac{AE}{BG}$$
mais $BP = AB - AP = 14 - AP$ et $BG = BF$ puisque le segment $[BF]$ a pour image le segment $[BG]$ dans la symétrie d'axe (AB). Finalement :
$$\frac{AP}{14 - AP} = \frac{3}{9}.$$
   b) En multipliant membre à membre par $3(14 - AP)$ l'égalité obtenue à la question précédente, on trouve $3\,AP = 14 - AP$, donc $4\,AP = 14$, puis $AP = \dfrac{7}{2}$.
   La mesure en cm de la distance AP est 3,5.
4. La valeur minimale de $EM + MF$ est $EP + PF$ d'après la question 2.
   Le triangle APE est rectangle en A, donc, d'après le théorème de Pythagore, $EP^2 = AE^2 + AP^2$.
   Donc $EP^2 = 3^2 + \left(\dfrac{7}{2}\right)^2 = 9 + \dfrac{49}{4} = \dfrac{36+49}{4} = \dfrac{85}{4}$ et $EP = \dfrac{1}{2}\sqrt{85}$.
   Nous avons vu à la question 3 a) que le triangle BGP, donc aussi le triangle BFP, est semblable au triangle APE. De la question 3 b), il résulte que les côtés de BFP sont trois fois plus grands que les côtés correspondants de APE, donc $EF = 3EP = \dfrac{3}{2}\sqrt{85}$.
   Finalement, comme $\dfrac{1}{2}\sqrt{85} + \dfrac{3}{2}\sqrt{85} = 2\sqrt{85}$, la valeur exacte, en cm, de $EM + MF$ est :
$$EM + MF = 2\sqrt{85}$$
   ou, arrondie au dixième, la mesure en cm de $EM + MF$ est 18,4.

TROISIÈME PARTIE

SITUATION 1 : Extrait du manuel « Outil pour les maths » CM1 Magnard (édition 2011)

1. Des raisons pouvant expliquer cette différence de réussite sont[7] :

6. On peut aussi, évidemment, utiliser le théorème de Thalès et sa conséquence.
7. Il suffisait d'en citer 3.

(a) Dans la question 2, l'élève doit trouver les cinq emplacements parmi les cinq proposés. Il s'agit donc d'un QCM. Alors que dans la question 3, aucun emplacement n'est proposé sur le segment représenté. Les réponses sont plus ouvertes.

(b) Dans la question 2, les décimaux ne sont donnés que sous la forme de fractions décimales, alors que dans la question 3, il y a aussi des décimaux donnés sous forme d'une écriture à virgule.

(c) Dans la question 2, le segment travaillé se trouve au début de la demi-droite numérique, alors que dans la question 3, l'origine est absente et on ne peut se repérer qu'avec les entiers 3 et 4.

(d) Dans la question 2, toutes les fractions décimales ont même dénominateur. Les élèves, même n'ayant encore qu'une construction fragile des décimaux, peuvent avoir repéré que $0 = \frac{0}{100}$ et $1 = \frac{100}{100}$. La question 2 peut alors être résolue en n'utilisant que des connaissances sur les entiers.

(e) Dans la question 3, il y a des représentations différentes du même décimal : $3 = \frac{30}{10} = \frac{300}{100}$ et $4 = \frac{40}{10} = \frac{400}{100}$. Dans cette activité, le contrat didactique semblant être que les abscisses entières sont écrites au-dessus de la demi-droite numérique et que les abscisses décimales non entières sont écrites au-dessous, cet élève peut ne pas se croire autorisé à écrire une des fractions décimales citées au même endroit qu'une autre déjà écrite.

(f) De plus, le fait que ces fractions décimales soient des entiers peuvent troubler les élèves qui n'ont pas encore compris que les entiers sont des décimaux.

2. Un nombre décimal est un nombre qui peut s'écrire sous forme d'une fraction décimale.
C'est-à-dire d'une fraction dont le dénominateur est 1, 10, 100, 1000, ...
Cette définition étant illustrée par des exemples.

SITUATION 2 : Extrait du manuel « Tribu des maths » CM2 Magnard (édition 2010)

1. Les erreurs commises par Lara.
   - Tout d'abord, Lara applique une règle d'addition des fractions décimales erronée. Elle écrit la suite des chiffres rencontrés au numérateur (cela provient peut-être d'un souvenir du calcul correct : $a + \frac{b}{10} + \frac{c}{100} = \overline{a,bc}$, où a, b et c sont des entiers entre 0 et 9, qui fonde l'écriture à virgule), mais semble appliquer la même règle aux zéros des différentes puissances de 10 rencontrées au dénominateur. Ou bien, elle pense qu'une fraction est nécessairement plus petite que 1 et ajuste en conséquence le dénominateur. Elle écrit ensuite une écriture à virgule correcte correspondant à cette fraction décimale erronée.
   - Elle déclare alors que cette écriture à virgule est égale à celle obtenue en faisant abstraction de la virgule. Cela peut provenir d'une construction insuffisante des décimaux comme de *nouveaux nombres* différents, en général, des nombres entiers. Les élèves se raccrochent alors aux seuls nombres qu'ils connaissent : les entiers.
   - Elle donne une raison erronée au fait que Max a effectivement tort en ne traitant pas la réponse de Max.
2. Dans le domaine de la numération, Clément semble avoir compris le passage d'une représentation canonique d'un décimal (dans le cas $a + \frac{b}{10} + \frac{c}{100}$, où a, b et c sont des entiers entre 0 et 9), à l'écriture à virgule ($\overline{a,bc}$) correspondante[8].
3. Léonie utilise implicitement, mais avec pertinence, pour répondre à la question, la règle suivante : « Deux décimaux ayant des écritures à virgule différentes sont rangés dans le même ordre que leurs parties entières, si elles sont différentes. Si ces parties entières sont égales, les deux décimaux sont rangés dans le même ordre que leurs chiffres des dixièmes, si ces chiffres sont différents. Si

8. Dans le domaine du calcul, cette fois, il sait aussi qu'on ne connaît que des nombres de $\mathbb{D}^+$, et donc qu'on ne sait pas calculer la différence 2,52 − 2,61. Cela deviendra possible au collège.

ces chiffres sont égaux, les deux décimaux sont rangés dans le même ordre que leurs chiffres des centièmes, si ces chiffres sont différents. »
Cette règle se poursuit indéfiniment aux rangs suivants.

SITUATION 3 :

1. Une lecture superficielle peut laisser penser que tous ces problèmes relèvent de la division $150 \div 8$. Pourtant, au moins deux critères permettent de différencier ces problèmes.
   - Les problèmes P1 et P3 relèvent d'une *division-quotition* (recherche du nombre de parts), alors que le problème P2 relève d'une *division-partition* (recherche de la valeur d'une part).
   - Le problème P1 et la première question du problème P3 peuvent être résolus en cherchant le quotient q de la division euclidienne $150 = 8q + r$ où $r < 8$. La réponse est $q = 18$. Dans le problème $P3$, il faut aussi voir que le reste r est non nul pour répondre à la deuxième question.
     Le problème P2 relève d'une division exacte dans $\mathbb{D}$. La réponse est le quotient : 18,75.
   - On peut aussi remarquer que dans les problèmes P1 et P3 on cherche un nombre entier, alors que dans le problème P2, on cherche un nombre-de, d'une part, non entier, d'autre part : 18,75 €.
2. - Dans une progression sur la division, on peut donner ces problèmes dans l'ordre P3, P1, P2.
   - Justifions-le[9].
     - Le problème P3 est facile à visualiser, voire à mettre en scène (un élève est plus facile à imaginer qu'un cL de liquide). Il peut être résolu par une division euclidienne simple au cycle 3, mais aussi dès le CÉ1 (à cause du registre numérique utilisé) comme problème de recherche pouvant être résolu par des additions itérées.
     - Le problème P1 est proche du précédent du point de vue du calcul. Il peut être donné au CÉ2 ou, plus généralement au cycle 3, dès que le cL a été vu.
     - Le problème P2 demande de calculer un quotient exact qui est un décimal avec deux chiffres après la virgule. Il ne peut être donné qu'à partir du CM1, lorsque le sens des écritures à virgule a été construit.

SITUATION 4 : Technique opératoire de la division

1. Adama et Anaïs effectuent une division en utilisant la technique usuelle, dite de la potence. Adama n'écrit pas les soustractions intermédiaires, Anaïs si. De plus Anaïs écrit le répertoire multiplicatif (de 1 à 9) du diviseur. Seule la méthode d'Anaïs est généralement vue à l'école primaire.
   L'avantage de la méthode d'Adama est de nécessiter moins d'écritures et donc d'arriver plus vite au résultat. Elle convient bien à un élève expert avec la division.
   L'avantage de la méthode d'Anaïs est de décomposer les calculs, d'une part, et de soulager du calcul des produits partiels par 37, le répertoire multiplicatif ayant été écrit une fois pour toutes, ce qui ne nécessite que des additions itérées de 37.
2. - Marie, qui utilise la méthode d'Adama, fait une erreur dans le calcul du quotient, elle trouve 148 et non 1048. Une explication vraisemblable est qu'elle commence par calculer « en 38, combien de fois 37 ? », elle trouve un quotient partiel égal à 1 et un reste aussi égal à 1. Elle « abaisse » alors le chiffre suivant du dividende. Elle se demande alors « en 17, combien de fois 37 ? », elle trouve 0, « 0 ce n'est rien » donc elle n'écrit aucun quotient partiel et « abaisse » alors le chiffre suivant du dividende. Elle trouve alors le bon quotient partiel, 4, et termine correctement la division.
   - Kévin, qui utilise la méthode d'Anaïs, mais sans écrire le répertoire multiplicatif. Pourtant le tâtonnement, à deux reprises, dans le calcul des quotients partiels montre que ce répertoire lui aurait été utile. Il commet une erreur dans la dernière étape, le quotient partiel de l'ordre des unités. Il le trouve inférieur d'une unité à ce qu'il devrait être et trouve donc un « reste » plus grand que le diviseur, ce qui est impossible.

9. D'autres réponses, tout aussi exactes, sont possibles, l'important est de les justifier de manière cohérente du point de vue didactique.