Considérons un entier $n \geqslant 1$, $z_1, \dots, z_n$ des nombres complexes et

$$s \coloneqq \sum_{k=1}^{n} z_k$$

Écrivons $s = |s|u$ avec u de module 1, en posant $u \coloneqq 1$ si $s = 0$ et $\dfrac{s}{|s|}$ sinon.

$$|s| = \operatorname{Re}(|s|) = \operatorname{Re}\left(\frac{s}{u}\right) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Re}\left(\frac{z_k}{u}\right)$$

donc, en utilisant I.1 pour majorer chaque terme de la somme,

$$|s| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left|\frac{z_k}{u}\right| \quad \text{d'où} \quad \left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |z_k|.$$

Traitons maintenant le cas d'égalité, qui s'écrit

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Re}\left(\frac{z_k}{u}\right) = \sum_{k=1}^{n} |z_k| \quad \text{ou encore} \quad \sum_{k=1}^{n} \left(\left|\frac{z_k}{u}\right| - \operatorname{Re}\left(\frac{z_k}{u}\right)\right) = 0.$$

- Toujours d'après I.1, tous les termes de la dernière somme sont positifs ou nuls, donc si cette somme est nulle, ils sont tous nuls et donc, si l'on suppose les z_k tous non nuls, pour tout entier $1 \leqslant k \leqslant n$, il existe $\mu_k \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\frac{z_k}{u} = \mu_k \quad \text{soit tel que} \quad z_k = \left(\frac{\mu_k}{\mu_1}\right) \mu_1 u = \frac{\mu_k}{\mu_1} z_1 \coloneqq \lambda_k z_1 \quad \text{avec} \quad \lambda_k \in \mathbb{R}_+^*.$$

- Réciproquement, si pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$ il existe $\lambda_k \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $z_k = \lambda_k z_1$,

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| = \left|\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\right) z_1\right| = \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\right) |z_1| = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k |z_1| = \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k z_1| = \sum_{k=1}^{n} |z_k|.$$