Brevet 2019, série générale

Correction du Brevet 2019 de mathématiques, 04 juillet 2019

• Exercice 1 : (*10 points*)

1) Décomposons les nombres 69 ; 1150 et 4140 en produit de facteurs premiers.

Les premiers nombres premiers sont 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19, 23 etc....

$\boxed{69 = 3 \times 23}$ (3 et 23 sont bien des nombres premiers)

$$\begin{aligned} 1150 &= 2 \times 575 \\ &= 2 \times 5 \times 115 \\ &= 2 \times 5 \times 5 \times 23 \end{aligned}$$

$\boxed{1150 = 2 \times 5^2 \times 23}$ (2 ; 5 et 23 sont bien des nombres premiers)

$$\begin{aligned} 4140 &= 2 \times 2070 \\ &= 2 \times 2 \times 1035 \\ &= 2 \times 2 \times 3 \times 345 \\ &= 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 115 \\ &= 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 23 \end{aligned}$$

$\boxed{4140 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 23}$ (2 ; 3 ; 5 et 23 sont bien des nombres premiers)

2) Le capitaine partage équitablement le trésor entre les marins.

Notons N le nombre de marins.

N doit diviser 69 ; 1150 et 4140. On recherche donc un diviseur commun à ces trois nombres. La décomposition des trois nombres dans la question précédente nous montre que 23 est un diviseur commun à ces trois nombres.

Il y a donc 23 marins.

• **Exercice 2 :** (***19 points***)

1) Le triangle ADM est rectangle en A donc nous pouvons utiliser la trigonométrie.

$$\tan \widehat{ADM} = \frac{\text{longueur du côté opposé à l'angle } \widehat{ADM}}{\text{longueur du côté adjacent à l'angle } \widehat{ADM}} = \frac{AM}{AD} = \frac{AM}{2}$$

$\tan 60 = \dfrac{AM}{2}$ donc $AM = 2 \times \tan 60 \approx 3,46$

Conclusion : [AM] mesure environ 3,46 mètres

2) La proportion de la plaque qui n'est pas utilisée est $\dfrac{MB}{AB}$

Nous savons que $AB = 4$ m. Calculons désormais MB.

Le point M appartient à [AB] donc $AM + MB = AB$ et donc $MB = 4 - AM$.

Par conséquent, $MB \approx 4 - 3,46 \approx 0,54$

La proportion que l'on souhaite est $\dfrac{0,54}{4} = 0,135$

Une valeur approchée au centième de cette proportion est $0,14$.

3) Les triangles PMN, PND et AMD sont rectangles respectivement en P, en P et en A.

Nous savons que dans un triangle la somme de la mesure des angles est égale à 180 degrés.

Dans le triangle AMD : l'angle $\widehat{ADM}$ mesure 60 degrés et l'angle $\widehat{MAD}$ mesure 90 degrés.

L'angle $\widehat{AMD}$ mesure donc 30 degrés. (180 - 90 - 60 = 30).

Dans le triangle PND : $\widehat{NDA} = \widehat{NDP} + \widehat{PDA}$ donc $90 = \widehat{NDP} + 60$, ainsi l'angle $\widehat{NDP}$ mesure 30 degrés.

L'angle $\widehat{DPN}$ mesure 90 degrés et l'angle $\widehat{NDP}$ mesure 30 degrés. Ainsi l'angle $\widehat{PND}$ mesure 60 degrés.

Dans le triangle PNM : $\widehat{MND} = \widehat{MNP} + \widehat{PND}$ donc $90 = \widehat{MNP} + 60$, ainsi l'angle $\widehat{MNP}$ mesure 30 degrés.

L'angle $\widehat{NPM}$ mesure 90 degrés et l'angle $\widehat{MNP}$ mesure 30 degrés. Ainsi l'angle $\widehat{NMP}$ mesure 60 degrés.

Nous savons que deux triangles semblables sont deux triangles qui ont leurs angles deux à deux de même mesure.

Conclusion : Les triangles AMD, PNM et NDP sont semblables.

4) Les triangles NDP et AMD sont semblables.

Le triangle AMD est un agrandissement du triangle NDP. Notons k le coefficient d'agrandissement. Nous savons que $k > 1$.

Déterminons la valeur de k.

Nous pouvons écrire que $k = \dfrac{DM}{DN}$.

AMND est un rectangle donc $ND = MA \approx 3,46$ m.

Le triangle ADM est un triangle rectangle en A. Nous pouvons donc utiliser la trigonométrie dans ce triangle AMD.

$$\cos\widehat{ADM} = \frac{\text{longueur du côté adjacent à l'angle } \widehat{ADM}}{\text{longueur de l'hypoténuse}} = \frac{AD}{DCM} = \frac{2}{DM}$$

On peut donc écrire : $\dfrac{2}{DM} = \cos 60$ donc $DM = \dfrac{2}{\cos 60} = \dfrac{2}{0,5} = 4$.

Par conséquent, $k = \dfrac{4}{3,46} \approx 1,16$

Comme $1,16 < 1,5$, le coefficient d'agrandissement pour passer du triangle NDP au triangle AMD est plus petit que 1,5.

- **<u>Exercice 3 :</u>** (***17 points***)

1) a) Le volume du cylindre C_2 est le volume du cylindre de hauteur 4,2 cm et de diamètre 1,5 cm (donc de rayon 0,75 cm). On notera V_{C_2} ce volume.

Notons V_s le volume du sable. $V_s = \dfrac{2}{3} \times V_{C_2}$

$$V_s = \frac{2}{3} \times \pi \times 0,75^2 \times 4,2 = \frac{4,725\pi}{3} = 1,575 \times \pi \approx 4,95$$

<u>Conclusion :</u> Le volume du sable est environ égal à 4,95 cm^3.

b) Le débit d'écoulement du sable est égal à 1,98 cm^3/min
Donc en 1 min, 1,98 cm^3 de sable se sont écoulés et nous souhaitons savoir maintenant en combien de temps 4,95 cm^3 de sable se sont écoulés.

Notons t le temps recherché.

$t = \dfrac{4,95}{1,98} = 2,5.$
4,95 cm^3 de sable se sont écoulés en 2,5 min soit 2 minutes et 30 secondes (2,5 min = 2min + 0,5 min = 2min + 30 s).

2) a) $1+1+2+6+3+7+6+3+1+2+3+2+3 = 40$
40 tests ont été réalisés.

b) Nous devons vérifier les trois conditions :

<u>Condition 1 :</u> Etendue des temps = 2min 38s - 2min 22s c'est-à-dire 16s et comme $16 < 20$, la condition 1 est vérifiée.

<u>Condition 2 :</u> La série des temps est constituée de 40 temps. Il y a donc un groupe des 20 premiers temps de la série rangéÈ dans l'ordre croissant et un autre groupe constitué des 20 premiers temps de la série rangée dans l'ordre croissant.

Les valeurs qui nous intéressent sont le 20ème temps de la série (rangée dans l'ordre croissant) et le 21ème temps de la série (rangée dans l'ordre croissant).

Le 20ème temps est 2min 29s et le 21ème temps est 2min30.

Tout nombre compris entre 2min29s et 2min30s peut être considéré comme la médiane de cette série de temps.

Conclusion : Le temps médian sera donc bien compris entre 2min29s et 2min31s

Condition 3 : Comme tous les temps commencent par 2min, pour faire la moyenne des temps, il nous suffit de faire la moyenne des secondes des différents temps :

$$m = \frac{22\times 1 + 24\times 1 + 2\times 26 + 27\times 6 + 28\times 3 + 29\times 7 + 30\times 6 + 31\times 3 + 32\times 1 + 33\times 2 + 34\times 3 + 35\times 2 + 38\times 3}{40}$$

$$m = \frac{1204}{40} = 30,1$$

Conclusion : La moyenne des temps est comprise entre 2min28s et 2min 32s.

Ainsi, le sablier ne sera pas éliminé car les trois conditions sont vérifiées.

- **Exercice 4 :** (***19 points***)

1) Avec ce script carré, on obtient un carré de côté 5 cm.

2) Le script 1 : dessin B et le script 2 : dessin A

3) a) En exécutant le script 2, la probabilité que le premier élément soit un carré est $\frac{1}{2}$.

b) Pour les deux premiers éléments dessinés, il y a 4 issues :

1) carré - carré 2) carré - tiret 3) tiret-carré 3) tiret-tiret

La probabilité que ces deux éléments soient des carrés est donc $\frac{1}{4}$.

4) A la ligne 7 du script 2, on peut insérer :

Si nombre aléatoire entre 1 et 2 = 1 alors mettre la couleur du stylo à rouge sinon mettre la couleur du stylo à noir.

- **Exercice 5 :** (***18 points***)

1) a) Le rectangle 3 est l'image du rectangle 4 par la translation qui transforme C en E.

b) Le rectangle 3 est l'image du rectangle 1 par la rotation de centre F et d'angle 90 degrés dans le sens des ziguilles d'une montre.

c) Le rectangle ABCD est l'image du rectangle 2 par l'homothétie de centre D et de rapport 3.

2) Un petit rectangle est une réduction du grand rectangle avec un coefficient de réduction k égal à $\frac{1}{3}$.

Notons $\mathcal{A}$ l'aire d'un petit rectangle.

$$\mathcal{A} = 1,215 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1,215 \times \frac{1}{9} = \frac{1,215}{9} = 0,135$$

L'aire d'un petit rectangle est $0,135$ m^2.

3) Notons L la longueur du rectangle ABCD et l la largeur de ABCD.

Le ratio longueur :largeur est 3 :2 donc $\dfrac{L}{l} = \dfrac{3}{2}$ (ou $\dfrac{L}{3} = \dfrac{l}{2}$)

Donc, $\dfrac{L}{l} = 1,5$ et donc $L = 1,5l$

L'aire de ABCD est $L \times l$ donc $L \times l = 1,215$

On remplace L par $1,5l$ donc $1,5l^2 = 1,215$

Ainsi, $l^2 = \dfrac{1,215}{1,5} = 0,81$.

l est une longueur donc l est un nombre positif et $l = \sqrt{0,81} = 0,9$.

Comme $L = 1,5l$ alors $L = 1,5 \times 0,9 = 1,35$

Conclusion : La longueur du rectangle ABCD est 1,35m et la largeur de ABCD est 0,9m.

• **Exercice 6 :** ***(17 points)***

1) • Avec une programme 1 :

$$5 \rightarrow 15 \rightarrow 16$$

Si on choisit 5 au départ, le résultat de ce programme 1 de calcul est 16.

• Avec une programme 2 :

$5 \rightarrow 4$(à gauche) et $5 \rightarrow 7$(à droite) puis $4 \times 7 = 28$.

Si on choisit 5 au départ, le résultat de ce programme 2 de calcul est 28.

2) a) • Avec une programme 1 :

$$x \rightarrow 3x \rightarrow 3x + 1$$

Comme $A(x)$ est le résultat du programme 1 en fonction du nombre x choisi au départ, on peut dire que $A(x) = 3x + 1$.

b) On cherche un nombre x tel que $A(x) = 0$.

Nous cherchons donc x tel que $3x + 1 = 0$ c'est-à-dire $x = -\dfrac{1}{3}$.

Pour que le résultat du programme 1 soit 0, il faut choisir au départ le nombre $-\dfrac{1}{3}$.

3)

$$\begin{aligned} B(x) &= (x-1) \times (x+2) \\ &= x \times x + x \times 2 - 1 \times x - 1 \times 2 \\ &= x^2 + 2x - x - 2 \\ &= x^2 + x - 2 \end{aligned}$$

$\boxed{B(x) = x^2 + x - 2}$

4) a) $B(x) - A(x) = x^2 + x - 2 - (3x + 1) = x^2 + x - 2 - 3x - 1 = x^2 - 2x - 3$. Or,

$$\begin{aligned}(x+1)(x-3) &= x \times x - x \times 3 + 1 \times x - 1 \times 3 \\ &= x^2 - 3x + x - 3 \\ &= x^2 - 2x - 3\end{aligned}$$

Donc $B(x) - A(x) = (x + 1)(x - 3)$.

b) On cherche des nombres x tels que $A(x) = B(x)$

On veut que $B(x) = A(x)$ c'est-à-dire que $B(x) - A(x) = 0$.

Or, nous venons de voir que $B(x) - A(x) = (x + 1)(x - 3)$

Nous sommes amenés à résoudre $(x + 1)(x - 3) = 0$. Nous reconnaissons une équation-produit nul.

$x + 1 = 0$ ou $x - 3 = 0$ c'est-à-dire $x = -1$ ou $x = 3$

Si on choisit -1 ou 3 au départ, les deux programmes de calcul donnent le même résultat.