MATHÉMATIQUES

CORRECTION DU BREVET (DNB) MÉTROPOLE, RÉUNION, MAYOTTE, SEPTEMBRE 2009

Correction proposée par Mr MORICEAU
Saint Denis (RÉUNION), le 20 octobre 2009

1° partie : Activités numériques

☑ Exercice 1 :

$$\frac{1404}{3465} = \frac{1404 \div \mathbf{3}}{3465 \div \mathbf{3}} = \frac{468}{1155}$$

La fraction obtenue est-elle irréductible ?

On remarque que 468 est divisible par 3, en effet, $4+6+8=18$ et 18 est un multiple de 3 ($18 = 6 \times 3$).

On remarque également que 1155 est divisible par 3, en effet, $1+1+5+5=12$ et 12 est un multiple de 3 ($12 = 4 \times 3$).

Les nombres 468 et 1155 ont **au moins** deux diviseurs communs : 1 et 3.

Par conséquent, les nombres 468 et 1155 ne sont pas premiers entre eux.

En conclusion, la fraction $\dfrac{468}{1155}$ n'est pas irréductible.

Remarque : on aurait pu rendre cette fraction irréductible en divisant 468 et 1155 par le $PGCD$ de 468 et 1155 mais cela n'est pas demandé !

☑ Exercice 2 :

On tire au hasard une boule dans une urne où on a placé 25 boules. Ces boules sont de même taille et sont indiscernables.

Notons $P(B)$ la probabilité de l'événement : « tirer une boule blanche »

D'après l'énoncé, on peut écrire : $P(B) = 0,32$.

D'autre part, nous savons que :

$$P(B) = \frac{\text{nombre de boules blanches dans l'urne}}{\text{nombre total de boules dans l'urne}}$$

Notons N_b le nombre de boules blanches dans l'urne
Nous pouvons écrire :

$$0,32 = \frac{N_b}{25}$$

Donc $Nb = 0,32 \times 25 = 8$
Il y a donc 8 boules blanches dans l'urne et 17 boules noires dans cette urne $(17 = 25 - 8)$

Les boules **noires** sont les plus nombreuses dans l'urne.

☑ Exercice 3 :

Notons q la quantité (en litre) correspond à une dose.

Nous pouvons écrire :

$$3q + 5q = 6$$

Donc, $8q = 6$ et donc $q = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} = 0,75$
On utilise 3 doses de sirop.
$3 \times 0,75 = 2,25$

Pour obtenir 6 litres de cette boisson, on doit utiliser $2,25$ litres de sirop.

☑ Exercice 4 :

1. On utilise le programme B :

On choisit **le nombre** 3.

- On multiplie ce nombre par 5 : $3 \times 5 = 15$
- On retranche 4 : $15 - 4 = 11$
- On multiplie par 2 : $11 \times 2 = 22$

$\boxed{\text{Si on choisit le nombre 3, le résultat obtenu est 22 avec le programme } B}$

2. On utilise le programme A :

On choisit **le nombre** -2.

- On multiplie ce nombre par 3 : $(-2) \times 3 = -6$
- On ajoute 7 : $-6 + 7 = 1$

$\boxed{\text{Si on choisit le nombre } -2\text{, le résultat obtenu est 1 avec le programme } A}$

3. a) On utilise le programme A :

On choisit **un nombre** x.

- On multiplie ce nombre par 3 : $x \times 3 = 3x$
- On ajoute 7 : $3x + 7$

Pour que le résultat du programme A soit (-2), nous sommes amenés à résoudre l'équation $3x + 7 = -2$

$$\begin{aligned} 3x + 7 &= -2 \\ 3x + 7 \mathbf{- 7} &= -2 \mathbf{- 7} \\ 3x &= -9 \\ \frac{3x}{\mathbf{3}} &= \frac{-9}{\mathbf{3}} \\ x &= -3 \end{aligned}$$

-3 est la solution de l'équation $3x + 7 = -2$.

$\boxed{\text{Si on choisit le nombre } -3\text{, le résultat obtenu est } -2 \text{ avec le programme } A}$

3. b) On utilise le programme B :

On choisit **un nombre** x.

- On multiplie ce nombre par 5 : $x \times 5 = 5x$
- On retranche 4 : $5x - 4$
- On multiplie par 2 : $2 \times (5x - 4) = 10x - 8$

Pour que le résultat du programme B soit 0, nous sommes amenés à résoudre l'équation $10x - 8 = 0$

$$\begin{aligned}
10x - 8 &= 0 \\
10x - 8 + \mathbf{8} &= 0 + \mathbf{8} \\
10x &= 8 \\
\frac{10x}{\mathbf{10}} &= \frac{8}{\mathbf{10}} \\
x &= 0,8
\end{aligned}$$

$0,8$ est la solution de l'équation $10x - 8 = 0$.

$\boxed{\text{Si on choisit le nombre } 0,8\text{, le résultat obtenu est } 0 \text{ avec le programme } B}$

4. Soit y le nombre qu'il faut choisir pour obtenir le même résultat avec les deux programmes A et B.

y est la solution de l'équation $3y + 7 = 10y - 8$.

Résolvons donc l'équation $3y + 7 = 10y - 8$.

$$\begin{aligned}
3y+7 &= 10y-8 \\
3y+7 \quad \textbf{- 7} &= 10y-8 \quad \textbf{- 7} \\
3y &= 10y-15 \\
3y \quad \textbf{- 10y} &= 10y-15 \quad \textbf{- 10y} \\
-7y &= -15 \\
\frac{-7y}{\textbf{-7}} &= \frac{-15}{\textbf{-7}} \\
y &= \frac{15}{7}
\end{aligned}$$

$\frac{15}{7}$ est la solution de l'équation $3y+7=10y-8$.

> Le nombre qu'il faut choisir pour obtenir le même résultat avec les deux programmes A et B est : $\frac{15}{7}$

2° partie : Activités géométriques

☑ Exercice 1 :

Il est demandé de rédiger deux des quatre questions. Je rédigerai les quatre pour les lecteurs.

1.
Le point G est le symétrique du point F par rapport au point O donc O est le milieu du segment $[FG]$.

D'autre part, nous savons que O est le milieu du segment $[AB]$.

Les diagonales du quadrilatère $AFBG$ se coupent donc en leur milieu O.

Le quadrilatère $AFBG$ est un parallélogramme.

2.
Plaçons nous dans le triangle ABC,
O est le milieu du segment $[AB]$ et F est le milieu du segment $[AC]$.

D'après le **théorème de la droite des milieux**, nous pouvons affirmer que la droite (FO) est parallèle à la droite (CB).

3.
- Les droites (CD) et (CE) sont sécantes en C.
- Les points C, A et D sont alignés.
- Les points C, B et E sont alignés.
- Les droites (AB) et (DE) sont parallèles.

Nous pouvons donc appliquer le théorème de THALES et écrire :

$$\frac{AC}{CD} = \frac{BC}{CE} = \frac{AB}{DE}$$

d'où :

$$\frac{1,8}{CD} = \frac{BC}{CE} = \frac{4,5}{12}$$

Pour calculer CD, utilisons

$$\frac{1,8}{CD} = \frac{4,5}{12}$$

Donc,

$$CD = \frac{1,8 \times 12}{4,5} = 4,8$$

Conclusion : La longueur CD est égale à $4,8\,\text{cm}$

4.
Le triangle CDE est rectangle en C donc l'angle $\widehat{ECD}$ mesure 90°.

Le point A appartient au segment $[CD]$ et le point B appartient au segment $[CE]$, l'angle $\widehat{BCA}$ mesure donc 90°.

Le triangle BAC est rectangle en C.

Le triangle BAC est rectangle en C, nous pouvons donc appliquer les relations trigonométriques dans ce triangle rectangle.

Nous avons :

$$\cos \widehat{BAC} = \frac{\text{longueur du côté adjacent à l'angle } \widehat{BAC}}{\text{longueur de l'hypoténuse}} = \frac{AC}{AB}$$

Ainsi,

$$\cos \widehat{BAC} = \frac{1,8}{4,5} = 0,4$$

Á l'aide de la touche $\boxed{\cos^{-1}}$ d'une calculatrice, on obtient :

$$\widehat{URV} = \cos^{-1}(0,4) \approx 66$$

En conclusion, l'angle $\widehat{BAC}$ mesure 66° (au degré près)

☑ **Exercice 2 :**

1. A vous de faire ! (le triangle HOM est rectangle en H tel que : $OH = 5$ cm et l'angle $\widehat{HOM}$ mesure 30°)

2. La base d'un cône de rayon est un disque.
Il faut tracer un cercle de rayon $[HM]$ (se servir de la première question : à l'aide d'un compas, on a la longueur HM qui correspond au rayon du cercle).
A vous de faire !

3.
Le triangle HOM est rectangle en H, nous pouvons donc appliquer les relations trigonométriques dans ce triangle rectangle.

Nous avons :

$$\tan \widehat{HOM} = \frac{\text{longueur du côté opposé à l'angle } \widehat{HOM}}{\text{longueur du côté adjacent à l'angle } \widehat{HOM}} = \frac{HM}{OH}$$

On a :

$$HM = OH \times \tan \widehat{HOM}$$

Donc,

$$HM = 5 \times \tan 30 \approx 2,9$$

Conclusion : la longueur HM est égale à $2,9$ cm (arrondi au mm près)

4.

On verse de l'eau dans le cône jusqu'au quart de sa hauteur, on obtient donc un petit cône qui se trouve à l'intérieur du grand cône. Ce petit cône est **une réduction** du grand cône.

Le coefficient de réduction est $\frac{1}{4}$.

On peut écrire :

$$V_{\text{eau}} = \left(\frac{1}{4}\right)^3 \times V_{\text{cône}} = \frac{1}{64} \times V_{\text{cône}}$$

Notons p le pourcentage du volume total du cône occupé par l'eau.

$$p = \frac{V_{\text{eau}}}{V_{\text{cône}}} \times 100 = \frac{1}{64} \times 100 = \frac{100}{64} \approx 1,6$$

Conclusion : le pourcentage du volume total du cône occupé par l'eau est $1,6\%$ (au dixième près)

3° partie : Problème

☑ Partie I : Format d'un rectangle

1. Tableau de la feuille annexe 2 :

	Rectangle 1	Rectangle 2	Rectangle 3	Rectangle 4	Rectangle 5
Longueur L	32	36	60	80	128
Largeur l	18	27	45	45	72
$\frac{L}{l}$ sous forme irréductible	$\frac{16}{9}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{16}{9}$	$\frac{16}{9}$

2.

a) Les rectangles du tableau qui ont le même format que le rectangle 1 sont les **rectangles** 4 **et** 5.

b) Le rectangle du tableau qui a le même format que le rectangle 2 est le **rectangle** 3.

3. Un rectangle a un format $\frac{16}{9}$.

a) Ce rectangle est au format $\frac{16}{9}$ et sa largeur est 54 mm.

On peut donc écrire :

$$\frac{L}{54} = \frac{16}{9}$$

Ainsi,

$$L = \frac{54 \times 16}{9} = 96$$

Conclusion : La longueur de ce rectangle est égale à 96 mm

b) A vous de faire !

c) Ce rectangle est au format $\frac{16}{9}$ et sa largeur est l (mm) et sa longueur L (mm).

On peut donc écrire :

$$\frac{L}{l} = \frac{16}{9}$$

Ainsi,

$$L = \frac{16}{9} \times l$$

Conclusion :

$$L = \frac{16}{9} \times l$$

☑ Partie II : Étude graphique

1.
Le point P_1 a pour coordonnées $(18; 32)$

Le point P_2 a pour coordonnées $(27; 36)$

Le point P_3 a pour coordonnées $(45; 60)$

Le point P_4 a pour coordonnées $(45; 80)$

Le point P_5 a pour coordonnées $(72; 128)$

Le graphique est à la fin de ce document.

2. On peut faire la conjecture suivante sur la position des points correspondant aux rectangles dont le format $\frac{16}{9}$: ces points appartiennent à une même droite passant par l'origine du repère.

3. D'après la question 3.c) de la partie I, on sait que pour un rectangle de longueur L, de largeur l et de format $\frac{16}{9}$, L et l sont liées par la relation :

$$L = \frac{16}{9} \times l$$

.

L est donc une **fonction linéaire** de l.

Tous les points M correspondant à un rectangle de format $\frac{16}{9}$ se trouvent sur une droite passant par l'origine du repère.

Le rectangle 1 a pour format $\frac{16}{9}$, donc le point P_1 appartient à cette droite.
Cette droite est donc la droite (OP_1)

Si un point M correspondant à un rectangle de longueur L, de largeur l et de format $\frac{16}{9}$ alors ce point M appartient à la droite (OP_1).

☑ Partie III : Étude graphique : diagonale des rectangles

1. Le rectangle a pour longueur $L = 32$ mm et pour largeur $l = 18$ mm.

Notons $ABCD$ ce rectangle, on a : $AB = L$ mm et $BC = l$ mm.

$ABCD$ est un rectangle donc le triangle ABC est un triangle rectangle en B. Nous pouvons appliquer le théorème de Pythagore et écrire :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

On a donc :

$$AC^2 = 32^2 + 18^2 = 1348$$

Par conséquent, $AC = \sqrt{1348} \approx 36,7$

La diagonale du rectangle 1 mesure 36,7 mm (au dixième près)

2. Considérons un écran de télévision au format $\dfrac{16}{9}$.

Notons D la longueur de la diagonale de cet écran. Cet écran a pour longueur L et pour largeur l.

Comme à la question précédente, on peut écrire (d'après le théorème de Pythagore) que :

$$D^2 = L^2 + l^2$$

Pour un tel rectangle, on sait que $L = \dfrac{16}{9} \times l$

Donc

$$D^2 = \left(\frac{16}{9}\right)^2 \times l^2 + l^2$$

Or, $\left(\dfrac{16}{9}\right)^2 = \dfrac{16^2}{9^2} = \dfrac{256}{81}$

$$
\begin{aligned}
D^2 &= \frac{256}{81} \times l^2 + l^2 \\
D^2 &= \frac{256}{81} \times l^2 + 1 \times l^2 \\
D^2 &= \left(1 + \frac{256}{81}\right) \times l^2 \\
D^2 &= \left(\frac{81}{81} + \frac{256}{81}\right) \times l^2 \\
D^2 &= \frac{337}{81} \times l^2 \\
D &= \sqrt{\frac{337}{81}} \times l
\end{aligned}
$$

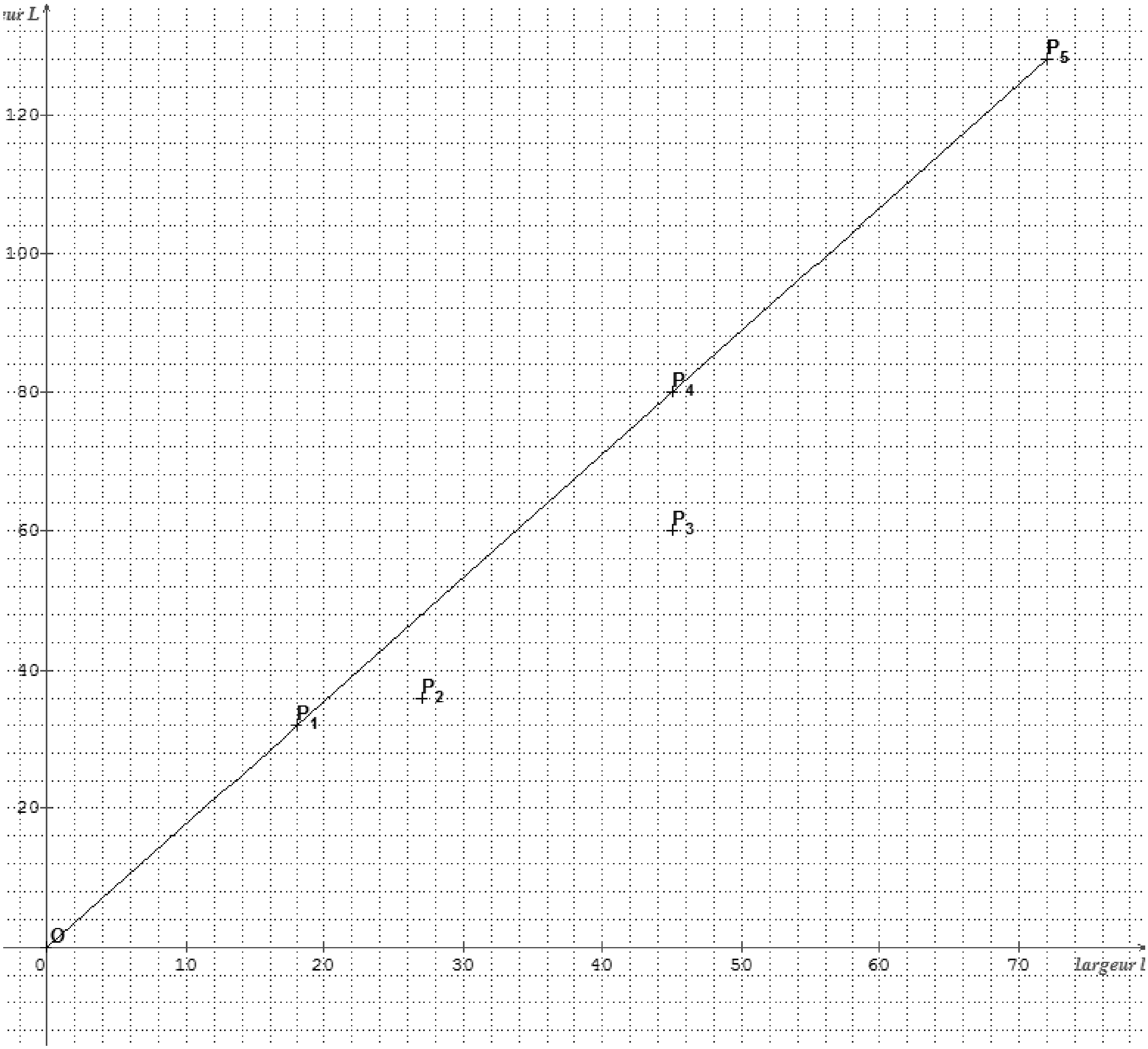
Or

$$\sqrt{\frac{337}{81}} \approx 2,04$$

Donc,

$$D \approx 2,04\, l$$

Pour les écrans de télévision au format $\frac{16}{9}$, la longueur de la diagonale vaut approximativement le double de la largeur.


eur L
120
100
80
60
40
20
0
10
20
30
40
50
60
70
largeur l
O
P1
P2
P3
P4
P5