Correction (proposée par M. Moriceau) du brevet de mathématiques, 28 juin 2014

☑ Exercice 1 :(5 points)

1) Je vous laisse le soin de tracer cet octogone régulier.

2) A et H sont deux points consécutifs de cet otogone régulier, l'angle au centre $\widehat{AOH}$ mesure 45 degrés $(360 \div 8)$

Nous pouvons écrire que l'angle $\widehat{HOD}$ mesure 180 degrés $(4 \times 45 = 180)$, ainsi les points D,O et H sont alignés. Le segment [DH] est un diamètre du cercle de rayon 3 cm.

Comme le triangle DAH est inscrit dans le cercle de diamètre [DH] et comme [DH] est l'un des trois côtés du triangle DAH donc le triangle ADH est rectangle et a pour hypoténuse le diamètre [DH], ainsi le triangle DAH est rectangle en A.

3) Nous avons vu précédemment que l'angle $\widehat{AOH}$ mesure 45 degrés, ainsi l'angle $\widehat{BOH}$ mesure 90 degrés $(2 \times 45 = 90)$

L'angle $\widehat{BEH}$ est un angle inscrit dans le cercle et cet angle intercepte l'arc de cercle $\overset{\frown}{BH}$. L'angle $\widehat{BOH}$ est un angle au centre, il intercepte également l'arc de cercle $\overset{\frown}{BH}$. Donc, la mesure de l'angle $\widehat{BOH}$ est le double de la mesure de l'angle $\widehat{BEH}$.

Conclusion : $\boxed{\text{L'angle } \widehat{BEH} \text{ mesure 45 degrés}}$

☑ Exercice 2 : (6 points)

1) Notons x le prix (en euros sans doute) d'un cahier.

- Dans le **magasin A**, un cahier coûte x €.
- Dans le **magasin B**, un cahier coûte x €.
- Dans le **magasin C**, un cahier coûte $0,7x$ €.

$(x - \frac{30}{100} \times x = x - 0,3x = x \times (1 - 0,3) = 0,7x)$

x est un nombre positif (car c'est le prix d'un article) donc $0,7x < x$.

Conclusion : $\boxed{\text{Le } \textbf{magasin C} \text{ est plus intéressant pour Léa pour l'achat d'} \textbf{un} \text{ cahier}}$

2) a) Notons x le prix (en euros sans doute) d'un cahier.

- Dans le **magasin A**, deux cahiers coûtent $2x$ €.
- Dans le **magasin B**, deux cahiers coûtent $1,5x$ €.

$(x + \frac{1}{2}x = x + 0,5x = x \times (1 + 0,5) = 1,5x)$

- Dans le **magasin C**, deux cahiers coûtent $1,4x$ €.

$(2 \times 0,7x = 1,4x)$

x est un nombre positif (car c'est le prix d'un article) donc $1,4x < 1,5x < 2x$.

Conclusion : $\boxed{\text{Léa a intérêt à choisir le } \textbf{magasin C} \text{ pour l'achat de } \textbf{deux} \text{ cahiers}}$

2) b) Notons x le prix (en euros sans doute) d'un cahier.

- Dans le **magasin A**, trois cahiers coûtent $2x$ €.

- Dans le **magasin B**, deux cahiers coûtent $2,5x$ €.

$(1,5x + x = 1,5x + x = x \times (1,5 + 1) = 2,5x)$

- Dans le **magasin C**, deux cahiers coûtent $2,1x$ €.

$(3 \times 0,7x = 2,1x)$

x est un nombre positif (car c'est le prix d'un article) donc $2x < 2,1x < 2,5x$.

Conclusion : Léa a intérêt à choisir le **magasin A** pour l'achat de **trois** cahiers

3) Comme Léa achète un cahier, Léa va choisir le magasin C et elle devra payer $0,7x$ € le cahier avant la réduction.

Or la carte de fidélité du magasin C permet d'avoir 10% de réduction, Léa payera donc 90 % du prix du cahier qui est $0,7x$ €.

Léa va payer le cahier $0,63x$ € (car $\dfrac{90}{100} \times 0,7x = 0,9 \times 0,7x = 0,63x$)

Nous pouvons maintenant calculer le pourcentage de rédaction totale que Léa va obtenir.

Au départ, un cahier coûte x € mais finalement elle va payer $0,63x$ € pour l'achat d'un cahier.

Notons p le pourcentage de réduction totale :
$p = (1 - 0,63) \times 100 = 0,37 \times 100 = 37$

Conclusion : le pourcentage de réduction totale que Léa va obtenir est 37 %.

☑ Exercice 3 : (5 points)

1) Si on choisit au départ 8 :

- on soustrait 6 $\rightarrow 8 - 6 = 2$

- on soustrait 2 $\rightarrow 8 - 2 = 6$

- On multiplie les deux résultats $\rightarrow 6 \times 2 = 12$

Conclusion : Si on choisit 8 comme nombre de départ, le résultat du programme est 12.

2) ► Pour la proposition 1 : choisissons au départ un nombre compris entre 1 et 5, par exemple 4.

- on soustrait 6 $\rightarrow 4 - 6 = -2$

- on soustrait 2 $\rightarrow 4 - 2 = 2$

- On multiplie les deux résultats $\rightarrow (-2) \times 2 = -4$

Et -4 est un nombre négatif.

Conclusion : Le programme peut donner un résultat négatif : **la proposition 1 est vraie**

► Pour la proposition 2 : choisissons au départ le nombre $\dfrac{1}{2}$

- on soustrait 6 $\rightarrow \dfrac{1}{2} - 6 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{12}{2} = \dfrac{-11}{2}$
- on soustrait 2 $\rightarrow \dfrac{1}{2} - 2 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{4}{2} = \dfrac{-3}{2}$
- On multiplie les deux résultats $\rightarrow \dfrac{-11}{2} \times \dfrac{-3}{2} = \dfrac{33}{4}$

Conclusion :

Si on choisit $\dfrac{1}{2}$ comme nombre de départ, le programme donne $\dfrac{33}{4}$ comme résultat : **la proposition 2 est vraie**

▶ Pour la proposition 3 : choisissons au départ le nombre x

- on soustrait 6 $\rightarrow x - 6$
- on soustrait 2 $\rightarrow x - 2$
- On multiplie les deux résultats $\rightarrow (x - 6) \times (x - 2)$

On cherche les valeurs de x pour lesquelles $(x - 6) \times (x - 2) = 0$. Nous sommes amenés à résoudre l'équation-produit suivante : $(x - 6) \times (x - 2) = 0$

Dire qu'un produit est nul revient à dire qu'au moins l'un des facteurs de ce produit est nul.

$$\begin{aligned} (x-6)(x-2) = 0 \quad & \text{est équivalent à} \quad x - 6 = 0 \quad \text{ou} \quad x - 2 = 0 \\ & \text{est équivalent à} \quad x - 6 + 6 = 0 + 6 \quad \text{ou} \quad x - 2 + 2 = 0 + 2 \\ & \text{est équivalent à} \quad x = 6 \quad \text{ou} \quad x = 2 \end{aligned}$$

Les solutions de cette équation-produit sont 2 et 6.

Conclusion :

Le programme donne 0 comme résultat si on choisit 2 ou 6 : **la proposition 3 est vraie**

▶ Pour la proposition 4 :

D'après ce qu'on a fait précédemment, on peut écrire que :

$$f(x) = (x - 6) \times (x - 2)$$

(f étant la fonction qui, au nombre choisi au départ, associe le résultat du programme et x est le nombre choisi au départ)

En utilisant la distributivité, nous pouvons écrire que :

$$f(x) = x \times x - 2 \times x - 6 \times x + 6 \times 2 = x^2 - 8x + 12$$

La fonction f n'est pas de la forme $x \mapsto ax$

Conclusion :

la fonction qui, au nombre choisi au départ, associe le résultat du programme n'est pas une fonction linéaire : **la proposition 4 est fausse**

☑ Exercice 4 : (3 points)

a) La fréquence sur le long terme la plus grande est celle correspondant au jeton jaune.
Conclusion : La couleur la plus présente dans le sac est le **jaune**

b) la formule à saisir dans la cellule C2 avant de la recopier vers le bas est =B2/A2.

c) Dans le sac il y a 20 jetons. Notons r le nombre de jetons rouges dans ce sac.

Nous pouvons écrire :
$\frac{r}{20} = \frac{1}{5}$, ainsi $5 \times r = 20$ et donc $r = 4$
Conclusion : Il y a 4 jetons rouges dans le sac

☑ Exercice 5 : (4 points)

Même si aucune justification n'est attendue, je donnerai une justification pour que l'élève comprenne le choix.

- **Question 1 :**

Réponse d : 8

Nous savons que le volume d'une boule de rayon R est donné par la formule suivante :

$$V = \frac{4}{3} \times \pi \times R^3$$

Si on multiplie R par 2 alors R^3 sera multiplié par 8 (car $2^3 = 8$) et donc le volume de la boule sera multiplié par 8.

- **Question 2 :**

Réponse a : 10 m.s^{-1}

Il suffit de diviser 36 par 3,6. Nous avons $36 \div 3,6 = 10$

- **Question 3 :**

Réponse c : $\sqrt{21}$

$$\begin{aligned} \sqrt{525} \div 5 &= \sqrt{25 \times 21} \div 5 \\ &= (\sqrt{25} \times \sqrt{21}) \div 5 \\ &= (5 \times \sqrt{21}) \div 5 \\ &= \sqrt{21} \end{aligned}$$

- **Question 4 :**

$$\boxed{\textbf{Réponse a :}\ 25}$$

$10^{12} = 10^9 \times 10^3$ donc 1 To = 1000 Go

$\dfrac{1,5 \times 1000}{60} = \dfrac{1500}{60} = 25$

☑ Exercice 6 : (6 points)

1) Le point K appartient au segment [QC] donc $QC = QK + KC$

Ainsi, $QK = QC - KC = PA - KC = 0,65 - 0,58 = 0,07$

$QK = 0,07$ m

$\dfrac{QK}{QP} = \dfrac{0,07}{5} = 0,014$

Conclusion : $\boxed{\text{L'inclinaison est égale à 0,014}}$

2) Le triangle QPK est rectangle en Q, nous pouvons donc utiliser la trigonométrie dans ce triangle.

$$\tan\widehat{QPK} = \frac{\text{longueur du côté opposé à l'angle}\,\widehat{QPK}}{\text{longueur de du côté adjacent à l'angle}\,\widehat{QPK}} = \frac{QK}{QP}$$

On a :

$$\tan\widehat{QPK} = \frac{QK}{QP} = 0,014$$

Á l'aide de la touche $\boxed{\tan^{-1}}$ d'une calculatrice, on obtient : $\widehat{QPK} = \tan^{-1}(0,014)$

$\boxed{\text{En conclusion, l'angle } \widehat{QPK} \text{ mesure approximativement } 0,8 \text{ degrés}}$

3) $\widehat{SPA} + \widehat{QPK} = 90\ °$

L'angle $\widehat{SPA}$ mesure $89,2$ degrés (90-0,8) mais cela est une approximation, nous pouvons écrire :

$$\widehat{SPA} = 90 - \tan^{-1}(0,014)$$

Le triangle APS est rectangle en A, nous pouvons donc utiliser la trigonométrie dans ce triangle.

$$\tan\widehat{SPA} = \frac{\text{longueur du côté opposé à l'angle}\,\widehat{SPA}}{\text{longueur de du côté adjacent à l'angle}\,\widehat{SPA}} = \frac{AS}{AP}$$

On a :

$$AS = AP \times \tan\widehat{SPA} = 0,65 \times \tan(90 - \tan^{-1}(0,014)) \approx 46$$

$$AS \approx 46\text{m}$$

$\boxed{\text{En conclusion, la distance AS est environ égale à 46 mètres}}$

☑ Exercice 7 : (7 points)

1) Notons V le volume d'une botte de paille paralllélépipédique.

$$V = L \times l \times h$$

Donc $V = 90 \times 45 \times 35 = 141750$

Le volume de la botte de paille est égale à 141750 cm^3 soit $0,14175$ m^3 (car $141750 \div 10^6 = 0,14175$)

Or, nous savons que 1 m^3 a une masse de 90 kilogrammes donc une botte de paille a une masse de 12,7575 kilogrammes ($0,14175 \times 90 = 12,7575$)

1 tonne = 1000 kg

Une botte de paille a une masse de 0,0127575 tonne ($12,7575 \div 1000 = 0,0127575$)

Une tonne de paille coûte 40 euros donc 0,0127575 tonne coûte $0,0127575 \times 40$ c'est-à-dire approximativement 0,51

$\boxed{\text{En conclusion, une botte de paille coûte environ 0,51 euros}}$

2) a) Nous devons déterminer la longueur JF.

Le point I appartient au segment [JA] donc $AI + IJ = AJ$

Donc $IJ = AJ - AI = 7,7 - 5 = 2,7$

Le triangle IJK est rectangle en I, nous pouvons appliquer le théorème de Pythagore et écrire :
$JF^2 = IJ^2 + IF^2$
Ainsi $JF^2 = 2,7^2 + 3,6^2$
Donc $JF^2 = 20,25$
Comme J^F est une longueur, nous avons $JF = \sqrt{20,25} = 4,5$
$JF = 4,5$ cm

On note S la surface du toit et S' la surface au sol d'une botte de paille de hauteur 35 cm.

$S = 4,5 \times 15,3 = 68,85$ donc $S = 68,85$ m^2

$S' = 0,9 \times 0,45 = 0,405$ donc $S' = 0,405$ m^2

$$\frac{S}{S'} = \frac{68,85}{0,405} = 170$$

$\boxed{\text{Marc doit commander 170 bottes}}$

b) Une botte de paille coûte 0,51 euros donc 170 bottes coûtent $0,51 \times 170$ ($= 86,70$)

$\boxed{\text{Pour isoler le toit, Marc va devoir dépenser 86, 70 euros}}$