MATHÉMATIQUES

CORRECTION du sujet de MATHÉMATIQUES du BACCALAURÉAT (série S) - ILE de la RÉUNION, session 2009

SAINT DENIS, ILE DE LA RÉUNION , 24 JUIN 2009

Exercice 1 : *QCM*

▶ Il est demandé de répondre sans justification mais pour le lecteur, il me semble judicieux de donner une justification sommaire.

• **Première question :** **Réponse** c.

$z = 1 - 2i + e^{i\theta}$ donc $z - (1 - 2i) = e^{i\theta}$. En passant au module, nous obtenons :
$|z - (1 - 2i)| = |e^{i\theta}|$ Comme $|e^{i\theta}| = 1$ alors $|z - (1 - 2i)| = 1$ et donc $AM = 1$ avec A le point d'affixe $1 - 2i$.

• **Deuxième question :** **Réponse** d.

$z' = -iz - 2i$. Nous savons que $e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$
On peut donc écrire que $z' = e^{-i\frac{\pi}{2}}z - 2i$
Donc,

$$\begin{aligned}
z' &= e^{-i\frac{\pi}{2}}z - 1 + 1 - i - i\\
z' + 1 + i &= e^{-i\frac{\pi}{2}}z + 1 - i\\
z' - (-1 - i) &= e^{-i\frac{\pi}{2}}z + i(-1 - i)\\
z' - (-1 - i) &= e^{-i\frac{\pi}{2}}z - (-i) \times (-1 - i)\\
z' - (-1 - i) &= e^{-i\frac{\pi}{2}}z - e^{-i\frac{\pi}{2}} \times (-1 - i)\\
z' - (-1 - i) &= e^{-i\frac{\pi}{2}}(z - (-1 - i))
\end{aligned}$$

• **Troisième question :** **Réponse** c.

$$\begin{aligned}
|z - 1 + i| = |z + 1 + 2i| &\Leftrightarrow |z - (1 - i)| = |z - (-1 - 2i)|\\
&\Leftrightarrow AM = CM\\
&\Leftrightarrow \text{Le point M appartient à la médiatrice du segment}[AC]
\end{aligned}$$

• **Quatrième question :** **Réponse** a.

Posons $z = x + iy$ où x et y sont des réels.
On a : $|z|^2 = x^2 + y^2$ et donc $z + |z|^2 = x + x^2 + y^2 + iy$

$$z + |z|^2 = 7 + i \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x + x^2 + y^2 & = & 7 \\ y & = & 1 \end{array} \right.$$

Donc,

$$z + |z|^2 = 7 + i \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x^2 + x + 1 & = & 7 \\ y & = & 1 \end{array} \right.$$

Donc,

$$z + |z|^2 = 7 + i \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x^2 + x - 6 & = & 0 \\ y & = & 1 \end{array} \right.$$

Donc,

$$z + |z|^2 = 7 + i \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -3 \,\mathrm{et}\, x = 2 \\ y & = & 1 \end{array} \right.$$

Donc,

$$z + |z|^2 = 7 + i \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} z & = & -3 + i \\ z & = & 2 + i \end{array} \right.$$

Exercice 2 :

Partie A :

1) D'après le graphique, on peut conjecturer que la fonction f croît sur $[0; 1]$ puis décroît sur $[1; +\infty[$. La fonction f atteint un maximum en $x = 1$. Nous pouvons conjecturer également que :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

2) f est la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = xe^{-x}$.

La fonction f est définie et dérivable sur $[0; +\infty[$.

Pour tout $x \in [0; +\infty[$ $\qquad f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1 - x)$

Pour tout réel x, $e^{-x} > 0$ (ceci reste vrai a fortiori sur $[0; +\infty[$).

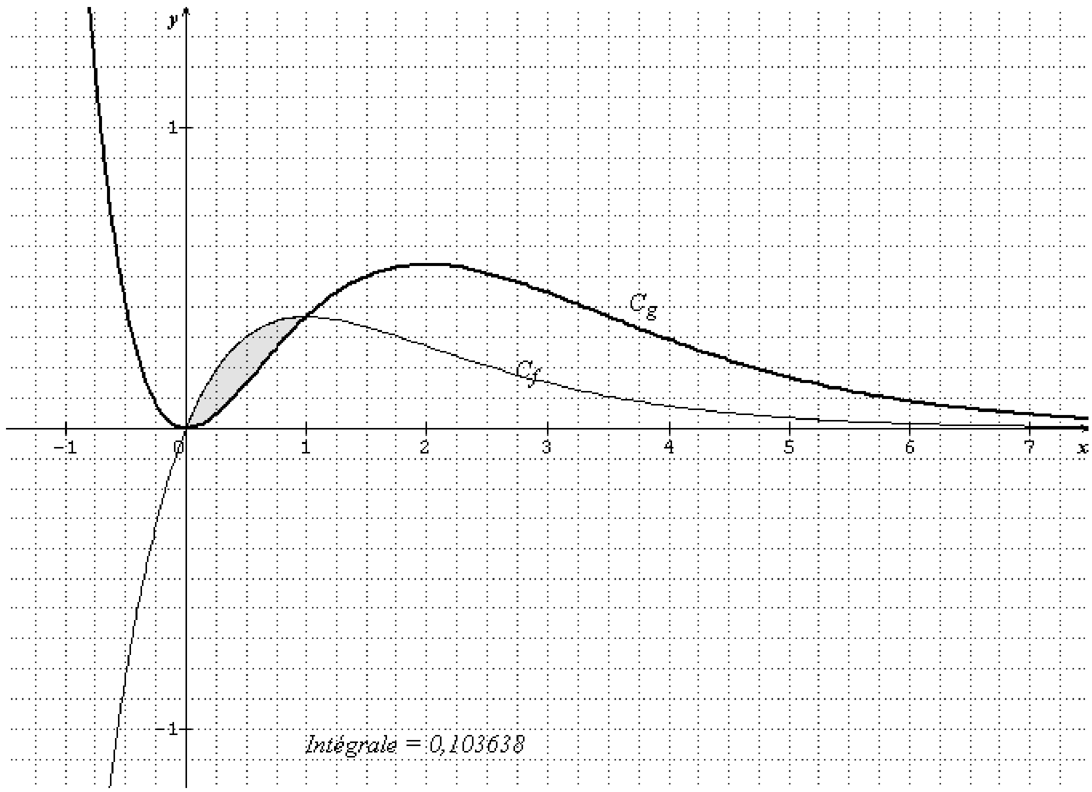
Le signe de $f'(x)$ est celui de $1 - x$.

Donc, $f'(x) > 0$ pour $x \in [0; 1[$ et $f'(x) < 0$ pour $x \in]1; +\infty[$. (et $f'(x) = 0$ pour $x = 1$).

Donc, la fonction f est croissante sur $[0; 1]$ puis est décroissante sur $[1; +\infty[$ (et $f(1) = \dfrac{1}{e}$).

D'autre part, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} xe^{-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$ car nous savons que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

3) Les deux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ont été construites pour x réel : ne prendre en compte que les réels x positifs.



4) Il semble que :

- Les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ se coupent en deux points O et A d'abscisses respectives 0 et 1.
- la courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de la courbe $\mathcal{C}_g$ pour $x \in [0;1]$.
- la courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de la courbe $\mathcal{C}_g$ pour $x \in [1;+\infty[$.

Montrons maintenant ces conjectures :

Pour savoir la position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport à la courbe $\mathcal{C}_g$, déterminons le signe de $f(x) - g(x)$ suivant les valeurs de x.

Pour tout $x \in [0;+\infty[$, $f(x) - g(x) = xe^{-x} - x^2e^{-x} = xe^{-x}(1-x)$

Pour tout $x \in [0;+\infty[$, $e^{-x} > 0$. Le signe de $f(x) - g(x)$ est celui de $x(1-x)$.

Or, pour $x \in [0;1]$ $\quad x(1-x) \geq 0$ et pour tout $x \in [1;+\infty[$ $\quad x(1-x) \leq 0$.

Donc, pour $x \in [0;1]$ $\quad f(x) - g(x) \geq 0$ et pour tout $x \in [1;+\infty[$ $\quad f(x) - g(x) \leq 0$.

Donc, pour $x \in [0;1]$ $\quad f(x) \geq g(x)$ et pour tout $x \in [1;+\infty[$ $\quad f(x) \leq g(x)$.

Remarquons que $f(0) = g(0) = 0$ et $f(1) = g(1) = \dfrac{1}{e}$

En conclusion,

- Les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ se coupent en deux points O et A de coordonnées respectives $(0;0)$ et $(1;\frac{1}{e})$.
- la courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de la courbe $\mathcal{C}_g$ pour $x \in [0;1]$.
- la courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de la courbe $\mathcal{C}_g$ pour $x \in [1;+\infty[$.

Partie B :

1) voir dessin (page précédente)

2)

$$I = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 xe^{-x}\,dx$$

Prouvons que $I = 1 - \dfrac{2}{e}$

Considérons les fonctions u et v définies par : $u(x) = x$ et $v(x) = -e^{-x}$. Ces fonctions sont dérivables (sur l'intervalle d'intégration) admettant des dérivées u' et v' continues sur ce même intervalle.

Une intégration par parties est légitime.
Nous avons :

Nous avons : $u'(x) = 1$ et $v'(x) = e^{-x}$

$u(x) = x$	$u'(x) = 1$
$v'(x) = e^{-x}$	$v(x) = -e^{-x}$

$$\begin{aligned} I &= \textstyle\int_0^1 xe^{-x}\,dx \\ &= [-xe^{-x}]_0^1 + \textstyle\int_0^1 e^{-x}\,dx \\ &= -\frac{1}{e} - [e^{-x}]_0^1 \\ &= -\frac{1}{e} - \frac{1}{e} + 1 \\ &= 1 - \frac{2}{e} \end{aligned}$$

3) Soit H la fonction définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $H(x) = -(x^2+2x)e^{-x}$.

a) La fonction H est définie et dérivable sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

Pour tout $x \in [0;+\infty[$ $\quad H'(x) = (-2x-2)e^{-x} - e^{-x}(-x^2-2x) = e^{-x}(x^2-2)$

On peut écrire : $H'(x) = x^2e^{-x} - 2e^{-x} = g(x) - 2e^{-x}$

b) De la question précédente, on peut écrire : $g(x) = H'(x) + 2e^{-x}$

Notons G une primitive de g sur $[0; +\infty[$.

$G(x) = H(x) - 2e^{-x} = e^{-x}(-x^2 - 2x - 2) = -e^{-x}(x^2 + 2x + 2)$

Une primitive de g sur $[0; +\infty[$ est G tel que : $G(x) = -e^{-x}(x^2 + 2x + 2)$

4) Notons $\mathfrak{a}$ l'aire de la partie du plan comprise entre les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Comme $f(x) \geq g(x)$ pour tout $x \in [0; 1]$, on peut écrire que :

$$\mathfrak{a} = \int_0^1 (f(x) - g(x))\, dx = \int_0^1 f(x)\, dx - \int_0^1 g(x)\, dx \qquad \text{(linéarité de l'intégrale)}$$

$$\text{Or} \quad \int_0^1 g(x)\, dx = G(1) - G(0) = -\frac{5}{e} + 2 \quad \text{et} \quad \int_0^1 f(x)\, dx = I = 1 - \frac{2}{e}$$

Donc,

$$\mathfrak{a} = 1 - \frac{2}{e} - (-\frac{5}{e} + 2) = \frac{3}{e} - 1$$

$$\boxed{\mathfrak{a} = \frac{3}{e} - 1}$$

Exercice 3 :

1)
a) On peut écrire que : $p\,(C) = p\,(A \cap B)$

Comme les événements A et B sont indépendants alors $p\,(A \cap B) = p\,(A) \times p(B)$.

Donc, $p\,(C) = p\,(A) \times p\,(B) = 0,02 \times 0,01 = 0,0002$

$$\boxed{p\,(C) = 0,0002}$$

b) On peut écrire que : $p\,(D) = p\,(A \cup B)$

Or, nous savons que :

$$p\,(A \cup B) = p\,(A) + p\,(B) - p\,(A \cap B)$$

Donc, $p\,(D) = p(A) + p\,(B) - p\,(C) = 0,02 + 0,01 - 0,0002 = 0,0298$

$$\boxed{p\,(D) = 0,0298}$$

c) E est l'événement contraire de D donc $p\,(E) = 1 - p\,(D) = 1 - 0,0298 = 0,9702$

$$\boxed{p\,(E) = 0,9702}$$

d) On désire calculer $p_A(B)$.

$$\begin{aligned} p_A(B) &= \frac{p\left(A \cap B\right)}{p\left(A\right)} \\ &= \frac{p\left(A\right) \times p\left(B\right)}{p\left(A\right)} \\ &= p\left(B\right) \\ &= 0,01 \end{aligned}$$

$$\boxed{p_A(B) = 0,01}$$

2)

a) Notons X la variable aléatoire qui à tout prélèvement de 100 sacs associe le nombre de sacs défectueux.

Les expériences qui consistent à prendre un sac et regarder son état sont des expériences identiques et indépendantes.

A chaque expérience, il y a deux issues possibles :

- le sac est défectueux
- le sac n'est pas défectueux

X suit donc une loi binomiale de paramètres n et p avec $n = 100$ et $p = 0,03$.

nous pouvons écrire :

$$\text{pour tout k} \in [0;100] \quad p\left(X = k\right) = \binom{100}{k}(0,03)^k(1-0,03)^{100-k}$$

b) Notons $p\left(F\right)$ la probabilité recherchée.

On peut écrire : $p\left(F\right) = p\left(X \geq 1\right) = 1 - p\left(X = 0\right)$

$$p\left(X = 0\right) = \binom{100}{0}(0,03)^0(0,97)^{100} = (0,97)^{100} = 0,05 \quad \text{(au centième près)}$$

Donc, $p\left(F\right) = 1 - 0,05 = 0,95$

$$\boxed{\text{p (F)= 0,95}}$$

Interprétation :

$$\boxed{\text{Pour 100 sacs prélevés, il y a 95\% chances qu'il y ait au moins un sac défectueux}}$$

c) Notons $E(X)$ l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.

Comme X une loi binomiale de paramètres n et p alors $E(X) = n \times p$.

Donc, $E(X) = 100 \times 0,03 = 3$

$$\boxed{E(X) = 3}$$

Interprétation :

En moyenne, pour cent sacs prélevés, trois sacs sont défectueux

Exercice 4 : Exercice pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1) Le plan (P) a pour équation : $ax + by + cz + d = 0$.

Comme ce plan (P) est orthogonal à (BC) alors un vecteur normal au plan (P) est le vecteur $\overrightarrow{BC}$.

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BC}$ sont : $\overrightarrow{BC}(-1; 1; 0)$

Ainsi, $a = -1$, $b = 1$ et $c = 0$.

Le plan (P) a pour équation : $-x + y + d = 0$.

Comme le point A appartient au plan (P), les coordonnées de ce point vérifient l'équation du plan (P).

Ainsi, $-x_A + y_A + d = 0$ et donc $d = -1$.
Le plan (P) a pour équation : $-x + y - 1 = 0$ ou $x - y + 1 = 0$.

$$\boxed{\text{Le plan } (P) \text{ a pour équation : } x - y + 1 = 0}$$

2) Considérons le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x - y + 1 & = & 0 \\ -y + z & = & 0 \\ -x + z + 1 & = & 0 \end{array}\right.$$

Notons (S_1) ce système. Ce système est équivalent à :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & y - 1 \\ z & = & y - 2 \\ -(y-1) + y - 2 + 1 & = & 0 \end{array}\right.$$

Ce système est équivalent à :

$$\begin{cases} x = t-1 \\ y = t \quad (t \text{ est un réel}) \\ z = t-2 \end{cases}$$

b) Pour déterminer l'intersection des trois plans (P), (Q) et (R), il faut résoudre le système (S_1) qui a pour solution :

$$\begin{cases} x = t-1 \\ y = t \quad (t \text{ est un réel}) \\ z = t-2 \end{cases}$$

Ce système correspond à la représentation paramétrique d'une droite (d).

Si $t = 3$ alors cette droite (d) passe par le point E de coordonnées $E(2;3;1)$.

c) La droite (d) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{u}\,(1;1;1)$.

Les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$ ont pour coordonnées :

$$\overrightarrow{BC}(-1;1;0) \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{BD}(-1;0;1)$$

$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{BC} = -1\times1+1\times1+1\times0 = 0$ et $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{BD} = -1\times1+0\times1+1\times1 = 0$

Le vecteur $\overrightarrow{u}$ est donc orthogonal à deux vecteurs (les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$) non colinéaires du plan (BCD).

Le vecteur $\overrightarrow{u}$ est un vecteur normal du plan (BCD).

$$\boxed{\text{La droite } (d) \text{ est orthogonale au plan } (BCD)}$$

Comme le vecteur $\overrightarrow{u}$ est un vecteur normal du plan (BCD) alors le plan (BCD) a pour équation : $x+y+z+d=0$.

Comme le point B appartient au plan (BCD), les coordonnées de ce point vérifient l'équation du plan (BCD).

Ainsi, $x_B+y_B+z_B+d=0$ et donc $d=-4$.
Le plan (BCD) a pour équation : $x+y+z-4=0$.

$$\boxed{\text{Le plan } (BCD) \text{ a pour équation : } x+y+z-4=0}$$

3)
- Une équation cartésienne du plan (ABC) parallèle à $(O;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j})$ est $z=0$.
- Une équation cartésienne du plan (ABD) parallèle à $(O;\overrightarrow{i};\overrightarrow{k})$ est $y=2$.
- Une équation cartésienne du plan (ACD) parallèle à $(O;\overrightarrow{j};\overrightarrow{k})$ est $x=1$.

4)
a) Soit M un point de la droite (d). Les coordonnées de ce point M sont $(x_M;y_M;z_M)$.

Il existe un réel t tel que :

$$\begin{cases} x_M = t-1 \\ y_M = t \\ z_M = t-2 \end{cases}$$

Pour montrer que le point M est équidistant des plans (ABC), (ABD) et (ACD), calculons la distance de ce point M à chacun des plans cités précédemment.

Rappelons qu'à la question précédente (3)), nous avions déterminé l'équation cartésienne des plans (ABC), (ABD) et (ACD).

- Une équation cartésienne du plan (ABC) est $z = 0$.
- Une équation cartésienne du plan (ABD) est $y = 2$.
- Une équation cartésienne du plan (ACD) est $x = 1$.

D'autre part, rappelons que la distance d'un point à un plan est :

$$d\left(M(\alpha;\beta;\gamma); P(ax+by+cz+d=0)\right) = \left|\frac{a\alpha+b\beta+c\gamma+d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right|$$

$d\left(M;(ABC)\right) = |\frac{z_M}{1}| = |z_M| = |t-2|$

$d\left(M;(ABD)\right) = |\frac{y_M-2}{1}| = |y_M-2| = |t-2|$

$d\left(M;(ACD)\right) = |\frac{x_M-1}{1}| = |x_M-1| = |t-1-1| = |t-2|$

Donc $d\left(M;(ABC)\right) = d\left(M;(ABD)\right) = d\left(M;(ACD)\right)$

$$\boxed{\text{Tout point } M \text{ de la droite } (d) \text{ est équidistant des plans } (ABC), (ABD) \text{ et } (ACD)}$$

b)
Soit M un point de la droite (d). Les coordonnées de ce point M sont $(x_M; y_M; z_M)$.

Il existe un réel t tel que :

$$\begin{cases} x_M = t-1 \\ y_M = t \\ z_M = t-2 \end{cases}$$

calculons la distance de ce point M à plan (BCD).

On a vu à la question 2)c) que le plan (BCD) a pour équation : $x + y + z - 4 = 0$.

$$d\left(M(\alpha;\beta;\gamma); P(ax+by+cz+d=0)\right) = \left|\frac{a\alpha+b\beta+c\gamma+d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right|$$

$$d\left(M;(BCD)\right) = |\frac{x_M + y_M + z_M - 4}{\sqrt{3}}| = |\frac{t-1+t+t-2-4}{\sqrt{3}}| = |\frac{3t-7}{\sqrt{3}}|$$

Pour répondre à la question posée, il nous suffit de résoudre :

$$|\frac{3t-7}{\sqrt{3}}| = |t-2|$$

$$\begin{aligned} |\frac{3t-7}{\sqrt{3}}| = |t-2| &\Leftrightarrow \frac{(3t-7)^2}{3} = (t-2)^2 \\ &\Leftrightarrow (3t-7)^2 = 3(t-2)^2 \\ &\Leftrightarrow 9t^2 - 42t + 49 = 3t^2 - 12t + 12 \\ &\Leftrightarrow 6t^2 - 30t + 37 = 0 \end{aligned}$$

Pour savoir si l'équation $6t^2 - 30t + 37 = 0$ a des solutions, calculons le discriminant Δ : $\Delta = 30^2 - 4 \times 6 \times 37 = 12$.

Comme le discriminant est strictement positif, cette équation a deux solutions t_1 et t_2.

Il existe donc deux points [**appartenant à la droite** (d)] de l'espace équidistants des plans (ABC), (ABD), (ACD) et (BCD).

Il existe également d'autres points équidistants des plans (ABC), (ABD), (ACD) et (BCD) mais ces points n'appartiennent pas à la droite (d).

En résumé :

Huit points sont équidistants des plans (ABC), (ABD), (ACD) et (BCD) :

- deux points appartiennent à la droite (d)
- six points n'appartiennent pas à la droite (d).