MATHÉMATIQUES

CORRECTION du sujet de MATHÉMATIQUES du BACCALAURÉAT (série S - ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE)

Correction proposée par Mr MORICEAU.
ILE DE LA REUNION, session juin 2010

SAINT DENIS, ILE DE LA RÉUNION , 30 JUIN 2010

Exercice 1 : Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-1;+\infty[$ par :

$$f(x) = 1 + \ln(1 + x)$$

Partie A :

1.a) La fonction f est définie et dérivable sur $]-1;+\infty[$.

Pour tout $x \in]-1;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$

Pour tout $x \in]-1;+\infty[$, $1 + x > 0$. Donc pour tout nombre x appartenant à $]-1;+\infty[$, $\dfrac{1}{1+x} > 0$.

Par conséquent, pour tout x appartenant à $]-1;+\infty[$, $f'(x) > 0$.

En conclusion, la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]-1;+\infty[$.

1.b) Déterminons tout d'abord la limite de la fonction f en $+\infty$.

$$\left.\begin{array}{rcl}\lim\limits_{x\to+\infty}(1+x) & = & +\infty \\ \lim\limits_{u\to+\infty}\ln u & = & +\infty\end{array}\right\} \text{donc } \lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+x)=+\infty$$

$$\boxed{\text{En conclusion, } \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty}$$

$$\left.\begin{array}{rcl}\lim\limits_{x\to-1^+}(1+x) & = & 0^+ \\ \lim\limits_{u\to0^+}\ln u & = & -\infty\end{array}\right\} \text{donc } \lim\limits_{x\to-1^+}\ln(1+x)=-\infty$$

$$\boxed{\text{En conclusion, } \lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=-\infty}$$

2) On désigne par g la fonction définie sur l'intervalle $]-1;+\infty[$ par :

$$g(x)=f(x)-x$$

.

a) On peut remarquer que $g(x)=f(x)+(-x)$

$$\left.\begin{array}{rcl}\lim\limits_{x\to-1^+}f(x) & = & -\infty \\ \lim\limits_{x\to-1}(-x) & = & 1\end{array}\right\} \text{donc } \lim\limits_{x\to-1^+}(f(x)+(-x))=-\infty$$

$$\boxed{\text{En conclusion, } \lim\limits_{x\to-1^+} g(x)=-\infty}$$

2. b)
Posons $t=1+x$
Si x tend vers $+\infty$ alors t tend également vers $+\infty$.

Nous savons que : $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\ln t}{t}=0$ (croissance comparée)
Donc,
$$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x)}{1+x}=0$$
On peut écrire : pour tout $x>-1$,

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x) - x \\ &= 1 + \ln(1+x) - x \\ &= 1 - x + \ln(1+x) \\ &= (1+x) \times \left[\frac{1-x}{1+x} + \frac{\ln(1+x)}{(1+x)}\right] \end{aligned}$$

Nous venons de voir que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(1+x)}{1+x} = 0$

D'autre part, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1-x}{1+x} = -1$

Ainsi, $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\dfrac{1-x}{1+x} + \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}\right] = -1$

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} (1+x) = +\infty$

Nous pouvons écrire (par produit) que :
$\lim\limits_{x \to +\infty} \left((1+x) \times \left[\dfrac{1-x}{1+x} + \dfrac{\ln(1+x)}{(1+x)}\right]\right) = -\infty$

$$\boxed{\text{En conclusion, } \lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty}$$

2. c)
La fonction g est définie et dérivable sur $]-1;+\infty[$.

Pour tout $x \in]-1;+\infty[$, $g'(x) = f'(x) - 1$

On peut écrire : pour tout $x > -1$,

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x) - 1 \\ &= \frac{1}{1+x} - 1 \\ &= \frac{1-(1+x)}{1+x} \\ &= \frac{-x}{1+x} \end{aligned}$$

Comme pour tout x appartenant à $]-1;+\infty[$, $1+x>0$ alors le signe de $g'(x)$ sur $]-1,+\infty[$ est celui de $(-x)$ sur ce même intervalle.

x	-1		0		$+\infty$
$-x$		$+$	0	$-$	
$g'(x)$	$\|$	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$\| -\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

d)

• g est continue (car dérivable) sur $]-1;0]$ et strictement croissante sur $]-1;0]$.
D'autre part, $g(-0,9)<0$ et $g(0)=1>0$. Ainsi, $0\in[g(-0,9);g(0)]$
Il existe un unique valeur α (d'après le théorème des valeurs intermédiaires) avec $\alpha<0$ tel que $g(\alpha)=0$.

• g est continue (car dérivable) sur $[0;+\infty[$ et strictement décroissante sur $[0;+\infty[$.
D'autre part, $g(2)=\ln 3-1>0$ et $g(3)=2\ln 2-1<0$. Ainsi, $0\in[g(3);g(2)]$
Il existe un unique valeur β (d'après le théorème des valeurs intermédiaires) avec $\beta\in[2;3]$ tel que $g(\beta)=0$.

En conclusion, sur $]-1;+\infty[$, l'équation $g(x)=0$ admet exactement deux solutions α et β avec $\alpha<0$ et $\beta\in[2;3]$.

e) D'après les questions précédentes, on peut dire que :

$g(x)<0$ sur $]-1;\alpha[$ et sur $]\beta;+\infty[$
$g(x)>0$ pour $x\in]\alpha;\beta[$.
$g(\alpha)=0$ et $g(\beta)=0$.

Pour savoir la position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport à la droite D, déterminons le signe de $f(x)-x$ (c'est-à-dire le signe de $g(x)$) suivant les valeurs de x.

• Pour $x\in]-1;\alpha[$ et $x\in]\beta;+\infty[$ $f(x)-x<0$ et donc pour tout $x\in]-1;\alpha[$ et pour tout $x\in]\beta;+\infty[$ $f(x)<x$.

• Pour $x\in]\alpha;\beta[$ $f(x)-x>0$ et donc pour tout $x\in]\alpha;\beta[$ $f(x)>x$.

• Remarquons que $g(\alpha)=0$ donc $f(\alpha)=\alpha$ puis $g(\beta)=0$ donc $f(\beta)=\beta$

En conclusion,

• La courbe $\mathcal{C}_f$ et la droite D se coupent en deux points A et B de coordonnées respectives $(\alpha; \alpha)$ et $(\beta; \beta)$.

• la courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de la droite D pour $x \in]-1; \alpha[$ et $x \in]\beta; +\infty[$.

• la courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de la droite D pour $x \in]\alpha; \beta[$.

Partie B :

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} & u_0 = 2 \\ \text{Pour tout entier naturel n} & u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

1. Raisonnons **par récurrence** pour montrer que :

pour tout entier naturel n, $2 \leq u_n \leq \beta$.

Initialisation :

$u_0 = 2$ et $\beta \in [2; 3]$ donc $2 \leq u_0 \leq \beta$

Hérédité :

Supposons que, pour un entier naturel n *quelconque*, $2 \leq u_n \leq \beta$.

Montrons que $2 \leq u_{n+1} \leq \beta$

On suppose que $2 \leq u_n \leq \beta$.
Comme la fonction f est croissante sur $]-1; +\infty[$ alors on peut écrire que :

$$f(2) \leq f(u_n) \leq f(\beta)$$

Or, $f(2) = 1 + \ln 3$ et $f(u_n) = u_{n+1}$.
$g(\beta) = 0$ donc $f(\beta) - \beta = 0$ ainsi $f(\beta) = \beta$
Ainsi,

$$1 + \ln 3 \leq u_{n+1} \leq \beta$$

Comme $1 + \ln 3 > 2$ alors

$$2 \leq u_{n+1} \leq \beta$$

Conclusion :

$$\text{Pour tout entier naturel } n,\ 2 \leq u_n \leq \beta$$

2. $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = g(u_n)$

Nous venons de voir à la question précédente que :
pour tout entier naturel n, $2 \leq u_n \leq \beta$

g est décroissante sur l'intervalle $[0;+\infty[$ a fortiori sur $[2;\beta]$ donc

$$g(\beta) \leq g(u_n) \leq g(2)$$

Comme $g(\beta) = 0$ et $g(2) = \ln 3 - 1 > 0$
Ainsi, $g(u_n) \geq 0$ et donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$

La suite (u_n) est donc croissante.

D'après la question précédente, la suite (u_n) est bornée (et donc majorée)

Nous savons qu'une suite croissante et majorée est convergente.

En conclusion, la suite (u_n) est convergente

Exercice 2 : Commun à tous les candidats

Partie I :

1. Notons A_n l'événement : « les deux faces obtenues sont noires »

La probabilité d'obtenir une face noire lors d'un lancer est $\dfrac{2}{6}$ c'est-à-dire $\dfrac{1}{3}$.

Les deux lancers sont indépendants donc $P(A_n) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3}$.

Donc,

$$P(A_n) = \frac{1}{9}$$

2. Notons A_v l'événement : « les deux faces obtenues sont vertes » et A_r l'événement : « les deux faces obtenues sont rouges ». On peut écrire que :

$$C = A_n \cup A_v \cup A_r$$

Les événements A_n, A_v et A_r sont deux à deux incompatibles.
On a :

$$P(C) = P(A_n) + P(A_v) + P(A_r)$$

Comme $P(A_n) = \dfrac{1}{9}$, $P(A_v) = \left(\dfrac{1}{6}\right)^2 = \dfrac{1}{36}$ et $P(A_r) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$

Alors,

$$P(C) = \frac{1}{9} + \frac{1}{36} + \frac{1}{4} = \frac{14}{36} = \frac{7}{18}$$

3. Notons E l'événement : « les deux faces obtenues sont de couleurs différentes »

On remarque que $E = \overline{C}$. Donc, $P(E) = P(\overline{C}) = 1 - P(C) = 1 - \dfrac{7}{18} = \dfrac{11}{18}$

la probabilité pour qu'à l'issue d'un jeu, les deux faces obtenues soient de couleurs différentes est égale à $\frac{11}{18}$.

4. Nous cherchons $P_C(A_v)$.

Par définition,

$$P_C(A_v) = \frac{P(C \cap A_v)}{P(C)} = \frac{P(A_v)}{P(C)}$$

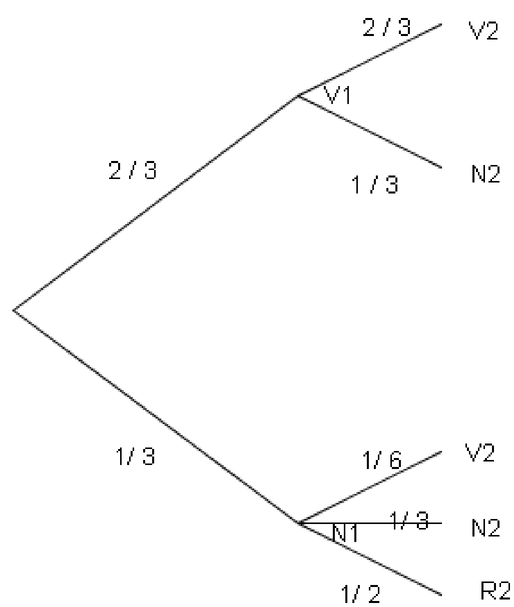
.

Donc,

$$P_C(A_v) = \frac{1}{36} \times \frac{18}{7} = \frac{18}{36 \times 7} = \frac{1}{14}$$

Partie II :

1. a) L'arbre de probabilités est le suivant :



V_1 désigne l'événement : « la face obtenue au premier lancer est verte »

N_1 désigne l'événement : « la face obtenue au premier lancer est noire »

V_2 désigne l'événement : « la face obtenue au deuxième lancer est verte »

N_2 désigne l'événement : « la face obtenue au deuxième lancer est noire »

R_2 désigne l'événement : « la face obtenue au deuxième lancer est rouge »

1. b) Nous recherchons $P_{V_1}(V_2)$.

Nous pouvons écrire : $P_{V_1}(V_2) = \dfrac{2}{3}$.

2. Nous recherchons $P(V_1 \cap V_2)$.

Par définition,

$$P_{V_1}(V_2) = \frac{P(V_1 \cap V_2)}{P(V_1)}$$

Donc,

$$P(V_1 \cap V_2) = P(V_1) \times P_{V_1}(V_2) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

3. Les événements V_1 et N_1 constituent une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales,

$$P(V_2) = P(V_1 \cap V_2) + P(N_1 \cap V_2) = \frac{4}{9} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{4}{9} + \frac{1}{18} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$$

Exercice 3 : Commun à tous les candidats

Partie A :

1. Soit f une fonction définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ qui vérifie la condition (E), c'est-à-dire que pour tout $x \in]0;+\infty[$, $\quad xf'(x) - f(x) = x^2e^{2x}$

Considérons la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$g : x \mapsto \frac{f(x)}{x}$$

cette fonction g est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur n'est pas nul sur $]0;+\infty[$.

Nous pouvons calculer $g'(x)$ pour $x \in]0;+\infty[$.

Pour tout $x \in]0;+\infty[$,

$$g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$$

Or, la fonction f vérifie la condition (E), c'est-à-dire que pour tout $x \in]0;+\infty[$,

$$xf'(x) - f(x) = x^2e^{2x}$$

Comme pour tout $x \in]0;+\infty[$, $\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2} = g'(x)$ alors pour tout $x \in]0;+\infty[$:

$$\frac{x^2e^{2x}}{x^2} = g'(x)$$

En divisant par x^2 (ce qui est légitime puisque x^2 n'est pas nul pour tout $x > 0$), nous obtenons :

pour tout $x \in]0;+\infty[$,

$$g'(x) = e^{2x}$$

2. D'après la question qui précède, si f vérifie la condition (E) alors g est une primitive de la fonction : $x \mapsto e^{2x}$.

Ainsi, g est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par

$$g : x \mapsto \frac{e^{2x}}{2} + \lambda \qquad \text{où } \lambda \text{ désigne un réel}$$

Et donc, la fonction f est la fonction définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ par

$$f : x \mapsto \frac{xe^{2x}}{2} + \lambda \times x \qquad \text{où } \lambda \text{ désigne un réel}$$

(si pour $x > 0$, $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ alors pour $x > 0$, $f(x) = x \times g(x)$)

Réciproquement, considérons une fonction f définie pour $x > 0$ par

$$f : x \mapsto \frac{xe^{2x}}{2} + \lambda \times x \qquad \text{où } \lambda \text{ désigne un réel}$$

Cette fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme produit de fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$ puis comme somme de fonctions dérivables.

Pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{1}{2} \times (e^{2x} + 2xe^{2x}) + \lambda = \dfrac{e^{2x}}{2} + xe^{2x} + \lambda$

Ainsi, pour tout $x > 0$, $xf'(x) - f(x) = \dfrac{xe^{2x}}{2} + x^2e^{2x} + \lambda \times x - (\dfrac{xe^{2x}}{2} + \lambda \times x)$

Et donc, pour tout $x > 0$, $xf'(x) - f(x) = x^2e^{2x}$

Par conséquent, f vérifie la condition (E).

3. Nous cherchons la fonction f définie par :
pour $x > 0$

$$f : x \mapsto \frac{xe^{2x}}{2} + \lambda \times x \qquad \text{où } \lambda \text{ désigne un réel}$$

qui s'annule en $\frac{1}{2}$ (ce qui signifie que $f(\frac{1}{2}) = 0$).

$f(x) = \frac{xe^{2x}}{2} + \lambda \times x$

$f(\frac{1}{2}) = \frac{e}{4} + \frac{\lambda}{2}$

Comme $f(\frac{1}{2}) = 0$ alors $\frac{e}{4} + \frac{\lambda}{2} = 0$ c'est-à-dire que $\lambda = \frac{-e}{2}$

En conclusion, la fonction recherchée est la fonction f définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ suivante :

$$f(x) = \frac{x}{2} \times (e^{2x} - e)$$

Partie B :

1. Pour tout $x \geq 0$, $h(x) = \frac{x}{2} \times (e^{2x} - e)$

Pour tout $x \geq 0$, $\frac{x}{2}$ est supérieur ou égal à 0.

Le signe de $h(x)$ est celui de $e^{2x} - e$

$$e^{2x} - e \geq 0 \Leftrightarrow e^{2x} \geq e \Leftrightarrow 2x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$$

En conclusion, on peut dire que :

$$h(x) < 0 \text{ pour } x \in]0; \frac{1}{2}[$$
$$h(x) > 0 \text{ pour } x \in]\frac{1}{2}; +\infty[.$$
$$h(0) = 0 \text{ et } h(\frac{1}{2}) = 0.$$

2. Intégration par parties

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} xe^{2x}\, dx$$

On pose $u(x) = x$ et $v'(x) = e^{2x}$

Nous avons :

$u(x) = x$	$u'(x) = 1$
$v'(x) = e^{2x}$	$v(x) = \frac{e^{2x}}{2}$

Cette intégration par parties est légitime car :
– les fonctions $x \mapsto u(x)$ et $x \mapsto v(x)$ sont dérivables et continues sur $[0\,;\,\frac{1}{2}]$,
– les fonctions $x \mapsto u'(x)$ et $x \mapsto v'(x)$ sont continues sur $[0\,;\,\frac{1}{2}]$.

Calculons à présent I (en utilisant une intégration par parties) :

$$I = \underbrace{[\frac{xe^{2x}}{2}]_0^{\frac{1}{2}}}_{=\frac{e}{4}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{e^{2x}}{2}\,dx$$

Donc :

$$I = \frac{e}{4} - \underbrace{[\frac{e^{2x}}{4}]_0^{\frac{1}{2}}}_{=\frac{e-1}{4}}$$

Ainsi,

$$I = \frac{e-e+1}{4} = \frac{1}{4}$$

Donc,

$$\int_0^{\frac{1}{2}} xe^{2x}\,dx = \frac{1}{4}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} h(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} xe^{2x}\,dx - \frac{e}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} x\,dx$$

(d'après la linéarité de l'intégrale)
Nous pouvons donc écrire :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} h(x)\,dx = \frac{1}{8} - \frac{e}{2}\underbrace{[\frac{x^2}{2}]_0^{\frac{1}{2}}}_{=\frac{1}{8}}$$

Finalement,

$$\int_0^{\frac{1}{2}} h(x)\,dx = \frac{1}{8} - \frac{e}{16} = \frac{2-e}{16}$$

b) D'après la question 1. on peut dire que la fonction h est **négative** sur $[0;\frac{1}{2}]$.

Par conséquent, l'aire (notée $\mathcal{A}$) [en unité d'aire] de la partie du plan située en dessous de l'axe des abscisses et au dessous de la courbe c est :

$$\mathcal{A} = \int_0^{\frac{1}{2}} -h(x)\,dx = \frac{e-2}{16}$$

Exercice 4 : les candidats qui n'ont pas choisi l'enseignement de spécialité

Partie I : Restitution organisée de connaissances

$$\begin{aligned} arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) &= arg(c-a) - arg(b-a) \\ &= arg(z_{\overrightarrow{AC}}) - arg(z_{\overrightarrow{AB}}) \\ &= (\overrightarrow{u},\overrightarrow{AC}) - (\overrightarrow{u},\overrightarrow{AB}) \\ &= (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{u}) + (\overrightarrow{u},\overrightarrow{AC}) \\ &= (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) \qquad \text{(relation de Chasles)} \qquad \text{(à } 2k\pi \text{ près)} \end{aligned}$$

Partie II

1. a) $z_{B'} = \dfrac{z_B - 1 - i}{i} = \dfrac{i-1-i}{i} = \dfrac{-1}{i} = \dfrac{i^2}{i} = i$

b) $z' = \dfrac{z-1-i}{z} = \dfrac{z}{z} - \dfrac{1+i}{z} = 1 - \dfrac{1+i}{z}$ donc $z' - 1 = -\dfrac{1+i}{z}$

z étant non nul, nous pouvons écrire que $z' - 1 \neq 0$ et ainsi $z' \neq 1$.

2. Pour z non nul,

$$\begin{aligned}
|z'| = 1 &\Leftrightarrow \left|\frac{z-1-i}{z}\right| = 1 \\
&\Leftrightarrow \left|\frac{z-(1+i)}{z-0}\right| = 1 \\
&\Leftrightarrow \frac{|z-(1+i)|}{|z-0|} = 1 \\
&\Leftrightarrow |z-(1+i)| = |z-0| \\
&\Leftrightarrow MA = MO \\
&\Leftrightarrow \text{M appartient à la médiatrice du segment } [AO]
\end{aligned}$$

L'ensemble recherché est la médiatrice du segment $[AO]$

3. Notons z l'affixe du point M et z' l'affixe du point M'.
Posons $z = x + iy$ avec x et y réels et $z' = x' + iy'$ avec x' et y' réels.

$$\begin{aligned}
z' &= \frac{z-1-i}{z} \\
x' + iy' &= \frac{x+iy-1-i}{x+iy} \\
x' + iy' &= \frac{(x-1)+i(y-1)}{x+iy} \\
x' + iy' &= \frac{((x-1)+i(y-1))(x-iy)}{(x+iy)(x-iy)} \\
x' + iy' &= \frac{(x-1)(x-iy)+i(y-1)(x-iy)}{x^2+y^2} \\
x' + iy' &= \frac{x^2+y^2-x-y+i(y-x)}{x^2+y^2}
\end{aligned}$$

On a donc :

$$x' = \frac{x^2 + y^2 - x - y}{x^2 + y^2} \qquad \text{et} \qquad y' = \frac{y - x}{x^2 + y^2}$$

$$\begin{aligned} z'\text{réel} &\Leftrightarrow Im(z') = 0 \\ &\Leftrightarrow y' = 0 \\ &\Leftrightarrow y = x \quad \text{avec} \quad (x, y) \neq (0; 0) \end{aligned}$$

L'ensemble recherché est la droite (D) d'équation $y = x$ privée du point O.