Correction du sujet de mathématiques, section S [Baccalauréat] à la REUNION.

Ile de la REUNION, juin 2011

Exercice 1 : commun à tous les candidats

1. Réponse :

Le plan $\mathcal{P}$ et la droite $\mathcal{D}$ n'ont aucun point en commun.

2. Réponse :

Les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants suivant une droite de vecteur $\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}$

3. Réponse :

L'ensemble décrit est le plan d'équation $-4x + 2y + 5z - \dfrac{5}{2} = 0$

4. Réponse :

L'ensemble décrit est une sphère dont le centre a pour coordonnées $\left(-5; 5; \dfrac{7}{2}\right)$

Exercice 2 : commun à tous les candidats

1. Notons $P(A)$ la probabilité de l'événement A et $P(B)$ la probabilité de l'événement B. On peut écrire :

$$P(A) = \frac{\binom{4}{4}}{\binom{10}{4}}$$

Or, $\dbinom{4}{4} = \dfrac{4!}{4! \times 0!} = 1$ et $\dbinom{10}{4} = \dfrac{10!}{4! \times 6!} = 210$

Ainsi,

$$\boxed{P(A) = \frac{1}{210}}$$

Notons $\bar{B}$ l'événement contraire de B.

$\bar{B}$ est l'événement suivant : "les quatre questions ne portent pas sur le sport".

On a : $P(\bar{B}) = \dfrac{\dbinom{8}{4}}{\dbinom{10}{4}} = \dfrac{70}{210} = \dfrac{1}{3}$

Comme $P(B) + P(\bar{B}) = 1$ alors $P(B) = 1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$

$$\boxed{P(B) = \frac{2}{3}}$$

2. a) je vous laisse le soin de représenter l'arbre pondéré.

2. b) Les événements H, L et S forment un système complet d'événements. Nous pouvons écrire , d'après la formule des probabilités totales :

$$P(C) = P(C \cap H) + P(C \cap L) + P(C \cap S)$$

On a :

- $P_H(C) = \dfrac{P(C \cap H)}{P(H)}$ donc $P(C \cap H) = P_H(C) \times P(H)$

Ainsi, $P(C \cap H) = \dfrac{1}{4} \times 0,7 = \dfrac{0,7}{4} = \dfrac{7}{40}$

- $P_L(C) = \dfrac{P(C \cap L)}{P(L)}$ donc $P(C \cap L) = P_L(C) \times P(L)$

Ainsi, $P(C \cap L) = \dfrac{1}{2} \times 0,6 = \dfrac{0,6}{2} = \dfrac{6}{20} = \dfrac{12}{40}$

- $P_S(C) = \dfrac{P(C \cap S)}{P(S)}$ donc $P(C \cap S) = P_S(C) \times P(L)$

Ainsi, $P(C \cap S) = \dfrac{1}{4} \times 0,5 = \dfrac{0,5}{4} = \dfrac{5}{40}$

Donc, $P(C) = \dfrac{7 + 12 + 5}{40} = \dfrac{24}{40} = \dfrac{3}{5}$

$$\boxed{P(C) = 0,6}$$

3. a) On répéte 10 fois l'expérience de manière indépendante.

La variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,7$.

Pour tout nombre k entier naturel compris entre 0 et 10, nous pouvons écrire :

$$P(X = k) = \binom{10}{k} \times 0,7^k \times (1 - 0,7)^{10-k}$$

3. b) Nous cherchons $P(X \geq 9)$

Nous pouvons écrire : $P(X \geq 9) = P(X = 9) + P(X = 10)$

On calcule $P(X = 9)$ et $P(X = 10)$ à l'aide de l'expression $P(X = k)$ de la question précédente en prenant respectivement $k = 9$ et $k = 10$.

On a :

$$\boxed{P(X \geq 9) \approx 0,15 \text{ à } 0,01 \text{ près}}$$

Exercice 3 : commun à tous les candidats

`Partie A :`

1. a) La fonction exponentielle est une fonction définie et dérivable sur l'ensemble des réels $\mathbb{R}$.

De plus, pour tout x réel, $e^x > 0$ et $e^{2x} + 1 > 0$.

Le dénominateur de la fraction $\dfrac{4e^x}{e^{2x} + 1}$ est non nul pour tout réel x.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x,

$$f'(x) = \frac{-4e^x(e^{2x} + 1) + 4e^x \times 2e^{2x}}{(e^{2x} + 1)^2}$$

En développant cette dernière expression, nous trouvons que :

$$f'(x) = \frac{4e^{3x} - 4e^x}{(e^{2x} + 1)^2}$$

Or, $4e^{3x} - 4e^x = 4e^x \times e^{2x} - 4e^x \times 1 = 4e^x(e^{2x} - 1)$

Finalement,

$$\boxed{\text{pour tout réel } x, f'(x) = \frac{4e^x(e^{2x} - 1)}{(e^{2x} + 1)^2}}$$

b) Pour tout réel x, $4e^x > 0$ et $e^{2x} + 1 > 0$, ainsi $\dfrac{4e^x}{(e^{2x}+1)^2} > 0$ pour tout réel x.

Le signe de $f'(x)$ est le même que celui de $e^{2x} - 1$.

$e^{2x} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{2x} = 1 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

La fonction exponentielle est strictement croissante sur l'ensemble des réels.

On a : pour tout $x > 0$ on a $2x > 0$ alors $e^{2x} > e^0$ ainsi $e^{2x} - 1 > 0$ pour tout réel strictement positif x.

Pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f'(x) > 0$.
et comme $f'(0) = 0$, nous pouvons écrire que :

$$\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } [0, +\infty[}$$

2. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$.
D'autre part, un calcul de $f(-x)$ montre assez rapidement que $f(-x) = f(x)$.
En effet,

$$f(-x) = 1 - \frac{4e^{-x}}{e^{-2x}+1} = 1 - \frac{4e^{-x}}{e^{-2x}(1+e^{2x})} = 1 - \frac{4e^{x}}{e^{2x}+1} = f(x)$$

La fonction f est paire.

$$\boxed{\text{L'axe des ordonnées est axe de symétrie de la courbe } \mathcal{C}}$$

3. a)
Les coordonnées du point A dans le repère $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ sont $(a, 0)$ avec $a > 0$.
De plus le point A appartient à la courbe $\mathcal{C}$
Nous pouvons écrire que $f(a) = 0$
Ce qui signifie que : $\dfrac{4e^a}{e^{2a}+1} = 1$
Ainsi, en mettant au même dénominateur, nous pouvons écrire que :

$$\frac{e^{2a} - 4e^a + 1}{e^{2a}+1} = 0$$

Comme $e^{2a} + 1 > 0$ (donc $e^{2a} + 1 \neq 0$)
Ainsi,
$f(a) = 0$ entraîne que $e^{2a} - 4e^a + 1 = 0$

$e^{2a} - 4e^a + 1 = 0 \Leftrightarrow (e^a)^2 - 4e^a + 1 = 0 \Leftrightarrow c^2 - 4c + 1 = 0$ (car on a posé $c = e^a$)

$$\boxed{c \text{ est une solution de l'équation } x^2 - 4x + 1 = 0}$$

Pour déterminer la valeur exacte de a, résolvons tout d'abord l'équation :
$x^2 - 4x + 1 = 0$.

Le discriminant est : $\Delta = (-4)^2 - 4 = 12$ donc $\Delta > 0$

L'équation $x^2 - 4x + 1 = 0$ admet donc deux solutions réelles distinctes que l'on notera x_1 et x_2
avec $x_1 = 2 - \sqrt{3}$ et $x_2 = 2 + \sqrt{3}$

On a : $c = e^a$ donc $a = \ln(c)$ avec $c > 0$

A ce stade, on peut dire que $a = \ln(2 - \sqrt{3})$ ou $a = \ln(2 + \sqrt{3})$

On remarque que $0 < 2 - \sqrt{3} < 1$ donc $\ln(2 - \sqrt{3}) < 0$
Comme a est strictement positif, on peut garder pour la valeur de a uniquement le nombre $\ln(2 + \sqrt{3})$.

$$\boxed{a = \ln(2 + \sqrt{3})}$$

3. b) D'après la question 1.a) on a vu que f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ et on vient de voir que $f(\ln(2 + \sqrt{3})) = 0$
D'autre part, f est une fonction paire donc $f(-\ln(2 + \sqrt{3})) = f(\ln(2 + \sqrt{3}))$

Nous pouvons conclure :

- $f(x) > 0$ pour $x \in]-\infty; -\ln(2 + \sqrt{3})[\cup]\ln(2 + \sqrt{3}); +\infty[$
- $f(x) < 0$ pour $x \in]-\ln(2 + \sqrt{3}); \ln(2 + \sqrt{3})[$

$f(-\ln(2 + \sqrt{3})) = f(\ln(2 + \sqrt{3})) = 0$

Partie B :

1. Par définition, nous pouvons écrire que : $F' = f$ (F est dérivable sur l'ensemble des réels, et cette primitive s'annule en 0).

Le signe de $F'(x)$ est le même que celui de $f(x)$. Ainsi, les variations de la fonction F sur $\mathbb{R}$ s'obtiennent à l'aide du signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.

En utilisant les conclusions de la question 3.b) de la partie A, on peut écrire :

- La fonction F est strictement croissante sur $]-\infty; -\ln(2+\sqrt{3})]$ et sur $[\ln(2+\sqrt{3}); +\infty[$
- La fonction F est strictement décroissante sur $[-\ln(2+\sqrt{3}); \ln(2+\sqrt{3})]$

2.
$$F(a) = \int_0^a f(t)\,dt$$

D'autre part, notons $\mathcal{A}$ l'aire (en unités d'aires) du domaine compris entre la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = a$.

La fonction f est continue et négative sur l'intervalle $[0; a]$, ainsi :

$$\mathcal{A} = \int_0^a -f(t)\,dt = -\int_0^a f(t)\,dt$$

En conclusion, $F(a)$ est l'opposé de l'aire citée ci-dessus

Notons R le point de la courbe $\mathcal{C}$ d'abscisse 0. Le point R a pour coordonnées $(0; -1)$.

Considérons le rectangle dont les dimensions sont OA et OR. Ce rectangle a pour aire le nombre : $OA \times OR$ c'est-à-dire a (car $OA \times OR = a \times 1 = a$).

On peut écrire que : $0 \leq \mathcal{A} \leq$ aire du rectangle précédent
Ainsi,

$$0 \leq \mathcal{A} \leq a$$

Or $F(a) = -\mathcal{A}$ donc $\mathcal{A} = -F(a)$
Ainsi,

$$0 \leq -F(a) \leq a$$

En conclusion, $-a \leq F(a) \leq 0$

3. a) Pour tout t réel positif,

$$f(t) = 1 - \frac{4e^t}{e^{2t}+1} = 1 - \frac{4e^t}{e^{2t}(1+e^{-2t})} = 1 - 4e^{-t} \times \frac{1}{(1+e^{-2t})}$$

Pour tout t réel positif, $e^{-2t} > 0$ ainsi $e^{-2t} + 1 > 1$ et

$\frac{1}{1+e^{-2t}} < 1$ (décroissance strite de la fonction inverse sur $\mathbb{R}^{+*}$)

Multiplions cette dernière inégalité par $-4e^{-t}$ (qui est strictement négatif) : l'ordre change et nous avons

Ce qui nous donne :

$$-4e^{-t} \times \frac{1}{(1+e^{-2t})} > -4e^{-t} \times 1$$

En ajoutant 1 de chaque côté de cette dernière inégalité : l'ordre ne change pas et nous avons ainsi,

$$f(t) \geq 1 - 4e^{-t}$$

$\boxed{\text{En conclusion : pour tout } t \text{ réel positif,} f(t) \geq 1 - 4e^{-t}}$

3. b) Soit x un nombre réel positif.

D'après l'inégalité précédente, on a :

$$f(t) \geq 1 - 4e^{-t}$$

En intégrant cette inégalité sur $[0; x]$ (l'intégrale est une forme linéaire croissante) : l'ordre ne change pas et nous avons :

$$\int_0^x f(t)\, dt \geq \int_0^x (1 - 4e^{-t})\, dt$$

Ce qui signifie que :

$$F(x) \geq \int_0^x (1 - 4e^{-t})\, dt$$

Or,

$$\int_0^x (1 - 4e^{-t})\, dt = [t + 4e^{-t}]_0^x = x - 4 + 4e^{-x}$$

Comme pour tout réel x (a fortiori x réel positif), $e^{-x} > 0$
Ainsi, $x - 4 + 4e^{-x} \geq x - 4$

$\boxed{\text{En conclusion, pour tout réel positif } x,\ F(x) \geq x - 4}$

Déterminons à présent la limite de $F(x)$ en $+\infty$.

Nous avons : $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-4)=+\infty$

A la question précédente, nous avons vu que : pour tout réel positif x, $F(x)\geq x-4$
Par comparaison, nous pouvons écrire que :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} F(x)=+\infty}$$

4.

$$F(x)+F(-x)=\int_0^x f(t)\,dt+\int_0^{-x} f(t)\,dt$$

Donc,

$$F(x)+F(-x)=\int_0^x f(t)\,dt-\int_0^x f(-t)\,dt=\int_0^x (f(t)-f(-t))\,dt \quad \text{(d'après la linéarité de l'intégrale)}$$

Dans la partie A, nous avons déjà vu que f(-t) = f(t) pour tout réel t. (f paire)
Ainsi, pour tout réel t, $f(t)-f(-t)=0$.
Ainsi,

$$F(x)+F(-x)=\int_0^x 0\,dt=0$$

Donc, F est une fonction impaire et nous pouvons écrire :

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} F(x)=-\lim_{x\to+\infty} F(x)=-\infty}$$

Exercice 4 : enseignement de non- spécialité

<u>`Partie A :`</u>

C est l'image d'un point B par la rotation de centre A, ainsi : les longueurs AB et AC sont égales.
Or, $AB=\mid b-a\mid$ et $AC=\mid c-a\mid$.
Si $A\neq B$, nous pouvons écrire : $\dfrac{AC}{AB}=1$
c'est-à-dire $\dfrac{\mid c-a\mid}{\mid b-a\mid}=1$ c'est-à-dire

$$\mid \frac{c-a}{b-a}\mid=1$$

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AC}) - (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AB})$$

Donc,

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = arg(c-a) - arg(b-a) + 2k\pi \text{ avec } k \text{ entier relatif}$$

or,

$$arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = arg(c-a) - arg(b-a)[2\pi]$$

Si C est l'image d'un point B par la rotation de centre A et d'angle θ alors

$$\theta = arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) + 2k\pi \text{ avec } k \text{ entier relatif}$$

Nous pouvons écrire :

$$\frac{c-a}{b-a} = e^{i\theta}$$

ainsi $c - a = e^{i\theta} \times (b-a)$

$$\boxed{c = e^{i\theta} \times (b-a) + a}$$

Partie B :

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $2z^2 - 6z + 9 = 0$

Le discrimant Δ est égal à : $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 2 \times 9 = 36 - 72 = -36 = (6i)^2$

Ce discriminant étant strictement négatif, l'équation $2z^2 - 6z + 9 = 0$ a deux solutions complexes conjuguées que l'on notera z_1 et z_2 avec :

$$z_1 = \frac{6-6i}{4} = \frac{3-3i}{2} = \frac{3}{2} \times (1-i)$$

$$z_2 = \overline{z_1} = \frac{3}{2} \times (1+i)$$

On remarque que : $z_1 = z_Q$ et $z_2 = z_P$

2. Je vous laisse le soin de faire le dessin.

3. S est le symétrique du point R par rapport au point Q, nous pouvons dire que : Q est le milieu du segment $[RS]$.

Nous pouvons ainsi écrire :

$$z_Q = \frac{z_R + z_S}{2}$$

Ainsi, $z_S + z_R = 2z_Q$ et donc $z_S = 2z_Q - z_R = 3 - 3i - (-2i\sqrt{3}) = 3 + i(2\sqrt{3} - 3)$

$$\boxed{z_S = 3 + i(2\sqrt{3} - 3)}$$

4. Comme A est l'image du point R par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$, nous pouvons écrire :

$$z_A = e^{\frac{i\pi}{2}} \times z_R = i \times z_R = -2i^2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

Comme C est l'image du point S par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$, nous pouvons écrire :

$$z_C = e^{\frac{i\pi}{2}} \times z_S = i \times z_S = i \times (3 + i(2\sqrt{3} - 3)) = (3 - 2\sqrt{3}) + 3i$$

$$\boxed{z_A = 2\sqrt{3} \text{ et } z_C = (3 - 2\sqrt{3}) + 3i}$$

5. Si un point M' (d'affixe z') est l'image d'un point M (d'affixe z) par la translation de vecteur $3\overrightarrow{v}$, on peut écrire :

$$\overrightarrow{MM'} = 3\overrightarrow{v}$$

Ce qui peut se traduire par : $z' - z =$ affixe du vecteur $3\overrightarrow{v}$
Comme l'affixe du vecteur $\overrightarrow{v}$ est i, nous pouvons écrire :

$$z' = z + 3i$$

• Le point B est l'image du point S par la translation de vecteur $3\overrightarrow{v}$.
Nous pouvons écrire :

$$z_B = 3 + i(2\sqrt{3} - 3) + 3i = 3 + 2i\sqrt{3}$$

• Le point D est l'image du point R par la translation de vecteur $3\overrightarrow{v}$.
Nous pouvons écrire :

$$z_D = -2i\sqrt{3} + 3i = i(3 - 2\sqrt{3})$$

$$\boxed{z_B = 3 + 2i\sqrt{3} \text{ et } z_D = i(3 - 2\sqrt{3})}$$

6. a) Un calcul rapide nous montre que :

$$z_B - z_P = \frac{3}{2} + i\left(2\sqrt{3} - \frac{3}{2}\right)$$

De même, nous avons :

$$z_C - z_P = i\frac{3}{2} - \left(2\sqrt{3} - \frac{3}{2}\right)$$

Nous remarquons que :

$$z_C - z_P = i(z_B - z_P)$$

Les points B et P n'étant pas confondus,

$$\frac{z_C - z_P}{z_B - z_P} = i \qquad (\bigstar)$$

b) Un passage aux modules et aux arguments dans $(\bigstar)$ (ou en utilisant la partie A), nous permet d'écrire que :

$$\boxed{\text{Le triangle } PBC \text{ est rectangle et isocèle en } P}$$

Un calcul rapide de $\dfrac{z_A + z_C}{2}$ montre que :

$$\frac{z_A + z_C}{2} = z_P$$

Et, un calcul rapide de $\dfrac{z_B + z_D}{2}$ montre que :

$$\frac{z_B + z_D}{2} = z_P$$

Ce qui montre que P est à la fois le milieu du segment $[AC]$ et le milieu du segment $[BD]$.

Par conséquent, à ce stade, le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.

Sachant que le triangle PBC est rectangle en P et comme P est le milieu des segments $[AC]$ et $[BD]$, alors les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ sont perpendiculaires.

Sachant que le triangle PBC est isocèle en P et comme P est le milieu des segments $[AC]$ et $[BD]$, alors les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ ont la même longueur.

$$\boxed{\text{En conclusion, le quadrilatère } ABCD \text{ est un carré}}$$