M. MORICEAU, collège **MONTGAILLARD**

Correction du sujet du DNB session 2011
(épreuve de mathématiques)

Ile de la REUNION, 28 juin 2011

Activités numériques (12 points)

☑ Premier exercice :

1. a) Notons f_j la fréquence d'apparition de la couleur jaune.
Nous pouvons écrire : $f_j = \dfrac{20}{100} = 0,2$

La fréquence d'apparition de la couleur jaune est égale à $0,2$

1. b) Notons f_n la fréquence d'apparition de la couleur noire.
Nous pouvons écrire : $f_n = \dfrac{30}{100} = 0,3$

La fréquence d'apparition de la couleur noire est égale à $0,3$

2. a) Notons $P(J)$ la probabilité d'obtenir la couleur jaune.
Nous pouvons écrire :

$$P(J) = \frac{\text{nombre de faces jaunes sur le dé cubique}}{\text{nombre total de faces du dé cubique}} = \frac{1}{6}$$

La probabilité d'obtenir la couleur jaune est égale à $\dfrac{1}{6}$

2. b) Notons $P(N)$ la probabilité d'obtenir la couleur noire.
Nous pouvons écrire :

$$P(N) = \frac{\text{nombre de faces noires sur le dé cubique}}{\text{nombre total de faces du dé cubique}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$\boxed{\text{La probabilité d'obtenir la couleur noire est égale à } \frac{1}{3}}$

3. Il existe un écart entre les fréquences obtenues à la question 1. et les probabilités trouvées à la question 2. puisque les probabilités donnent une fréquence "théorique" : lorsqu'on effectue un très grand nombre de fois une expérience, la fréquence de réalisation (question 1.) se rapproche d'une fréquence théorique (question 2.)

☑ <u>Deuxième exercice :</u>

Pour déterminer le prix du bijou 3, nous devons déterminer le prix d'un triangle en métal et le prix d'un triangle en verre (prix en euros)

Notons x le prix d'un triangle en verre et y le prix d'un triangle en métal.

Avec le bijou 1, on peut écrire que : $4x + 4y = 11$

Avec le bijou 2, on peut écrire que : $6x + 2y = 9,10$

Nous sommes amenés à présent à résoudre le système de deux équations à deux inconnues suivant :

$$(S)\left\{\begin{array}{rcll} 4x+4y & = & 11 & (E_1) \\ 6x+2y & = & 9,10 & (E_2) \end{array}\right.$$

Résolvons ce système à l'aide de la méthode par combinaison, pour cela multiplions les coefficients de l'équation (E_2) par (-2)

Nous obtenons le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcll} 4x+4y & = & 11 & (E_1) \\ -12x-4y & = & -18,20 & (E_2') \end{array}\right.$$

• Additionnons membre à membre les coefficients des deux équations (E_1) et (E_2')

Nous obtenons : $-8x = -7,20$

Ainsi, $x = \dfrac{-7,20}{-8} = 0,90$

• Remplaçons x par $0,90$ dans l'équation (E_1).

L'équation (E_1) devient :
$4 \times 0,90 + 4y = 11$ d'où $3,6 + 4y = 11$.

Ce qui nous donne : $4y = 11 - 3,6 = 7,4$ et donc $y = \dfrac{7,4}{4} = 1,85$

Par conséquent, un triangle en verre coûte $0,90$ € un triangle en métal coûte $1,85$ €.

Le bijou 3 est constitué de 5 triangles en verre et 3 triangles en métal.

Le prix du bijou 3 est égal à :$5 \times 0,90 + 3 \times 1,85$ c'est-à-dire $10,05$ €.

En conclusion, le bijou 3 coûte 10 euros et 5 centimes

☑ Troisième exercice :

1.
• L'affirmation 1 est **fausse**.
En effet, il manque le double produit.
La réponse exacte est la suivante :

$$(2a+3)^2 = (2a)^2 + 2 \times 2a \times 3 + 3^2 = 4a^2 + 12a + 9$$

• L'affirmation 2 est **fausse**.

Si on note x le prix initial de l'article.
Après une augmentation de 20%, le prix est le suivant :

$$x + \frac{20}{100} \times x = x + 0,2x = 1,2x$$

Après une diminution de 20%, le prix est le suivant :

$$1,2x - \frac{20}{100} \times 1,2x = 1,2x - 0,24x = 0,96x$$

En résumant, on passe initialement d'un prix x pour "arriver" à la fin à un prix $0,96x$.
Comme $0,96 < 1$ alors $0,96x < x$ (car x est positif)

Il s'agit donc d'une **diminution** (remise) de 4% $[(1 - 0,96) \times 100 = 4]$

2.
• L'égalité 1 est **vraie**.
En effet,

$$\sqrt{32} = \sqrt{16 \times 2} = \sqrt{16} \times \sqrt{2} = \sqrt{4^2} \times \sqrt{2} = 4 \times \sqrt{2}$$

Ainsi,

$$\frac{\sqrt{32}}{2} = \frac{4 \times \sqrt{2}}{2} = 2 \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

• L'égalité 2 est **fausse**.
En effet,

$$10^5 + 10^{-5} = 100\,000 + 0,00001 = 100\,000,00001 \qquad \text{et} \qquad 10^0 = 1$$

Pour que l'égalité 2 soit vraie, il suffit de remplacer le signe $+$ par le signe $\times$
En effet,

$$10^5 \times 10^{-5} = 10^{5+(-5)} = 10^0$$

Activités géométriques (12 points)

☑ Premier exercice :

1. Je vous laisse faire la figure.

2. a) Le triangle ABC est un triangle rectangle et isocèle en B, nous pouvons affirmer que les angles aigus de ce triangle ont la même mesure et ces deux angles mesurent 45°

$\boxed{\text{En conclusion, l'angle } \widehat{ACB} \text{ mesure } 45^\circ}$

2. b) Les angles $\widehat{DCE}$ et $\widehat{ACB}$ sont des angles opposés par le sommet, par conséquent ces deux angles ont la même mesure.

$\boxed{\text{En conclusion, l'angle } \widehat{DCE} \text{ mesure } 45^\circ}$

3. Le triangle DCE est rectangle en E, nous pouvons appliquer les relations trigonométriques dans ce triangle rectangle.

Nous pouvons écrire :

$$\sin \widehat{DCE} = \frac{\text{longueur du côté opposé à l'angle } \widehat{DCE}}{\text{longueur de l'hypoténuse}} = \frac{DE}{DC}$$

On peut écrire : $\sin 45^\circ = \dfrac{DE}{6}$.

Ainsi, $DE = 6 \times \sin 45^\circ \approx 4,2$

$\boxed{\text{Une valeur approchée de } DE \text{ à } 0,1 \text{ com près est : } 4,2 \text{ cm}}$

4. Le centre d'un cercle circonscrit à un triangle rectangle est le milieu de l'hypoténuse.

$\boxed{\text{Le centre du cercle circonscrit (noté } \mathcal{C}\text{) au triangle } DCE \text{ est le milieu du segment } [DC]}$

5.

• Comme le triangle DMC est inscrit dans le cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[DC]$ et comme $[DC]$ est l'un des trois côtés du triangle DMC alors le triangle DMC est rectangle et admet pour hypoténuse le diamètre $[DC]$.

Le triangle DMC est rectangle en M

• Comme le triangle AMC est inscrit dans le cercle $\mathcal{C}'$ de diamètre $[AC]$ et comme $[AC]$ est l'un des trois côtés du triangle AMC alors le triangle AMC est rectangle et admet pour hypoténuse le diamètre $[AC]$.

Le triangle AMC est rectangle en M

Comme le triangle DMC est rectangle en M donc l'angle $\widehat{DMC}$ mesure 90°.

Comme le triangle AMC est rectangle en M donc l'angle $\widehat{CMA}$ mesure 90°.

Les angles $\widehat{CMD}$ et $\widehat{CMA}$ sont adjacents.

Nous pouvons écrire :

$$\widehat{DMA} = \widehat{CMD} + \widehat{CMA} = 90 + 90 = 180$$

L'angle $\widehat{DMA}$ est donc un angle plat (cet angle mesure 180°) et les points D, M et A sont alignés dans cet ordre.

☑ Deuxième exercice :

1. Je vous laisse le soin de dessiner un pavé droit en perspective cavalière.

2. a) Notons V le volume de ce pavé droit.

Nous pouvons écrire :

$$V = L \times l \times h = 40 \times 20 \times 30 = 24\,000$$

Le volume de ce pavé droit est égal à 24 000 cm^3

2. b) $1L = 1000$ cm^3
Comme $V = 24\,000$ cm^3 alors $V = 24$ L (on a divisé par 1000)

3. Réponse :

$$\frac{4}{3} \times \pi \times 15^3$$

4. Notons V' le volume du second aquarium (exprimé en cm^3).

$$V' = \frac{3}{4} \times V_{\text{boule}} = \frac{3}{4} \times \frac{4}{3} \times \pi \times 15^3 = \pi \times 15^3 = 3375 \times \pi$$

On remarque le volume du second aquarium est inférieur au volume du premier aquarium : $V' < V$.

On cherche la hauteur h tel que :

$40 \times 20 \times h = \underbrace{3375 \times \pi}_{=V'}$ ou $800 \times h = 3375 \times \pi$

On a donc

$$h = \frac{3375 \times \pi}{800} \approx 13,3$$

$\boxed{\text{La hauteur de l'eau est égale à } 13,3 \text{ cm (valeur approchée au millimètre)}}$

Problème (12 points)

☑ Partie I :

1. a) En faisant une lecture du tableau, nous constatons qu'en 1999 les précipitations ont été les plus importantes.

b) En 2009, sur une surface de 1 m^2, 867 litres d'eau sont tombés.

En multipliant par 5 : $867 \times 5 = 4335$

$\boxed{\text{4335 litres d'eau sont tombés sur une surface de 5 m}^2}$

2. Notons q_m la quantité moyenne d'eau tombée en une année (sur les onzes années présentées)

Nous pouvons écrire :

$$q_m = \frac{1087 + 990 + 868 + 850 + 690 + 616 + 512 + 873 + 810 + 841 + 867}{11} = \frac{9004}{11} \approx 818,5$$

$\boxed{\text{La quantité moyenne d'eau tombée sur une année est 819 litres (au m}^2\text{)}}$

3. Notons S la surface au sol de la maison décrite.

$$S = L \times l = 13,9 \times 10 = 139$$

$\boxed{\text{La surface au sol de la maison décrite est égale à 139 m}^2}$

4. On a :

$$V = P \times S \times 0,9$$

Pour l'année 2009 :

$$V = 867 \times 139 \times 0,9 = 108461,7$$

$V = 108461,7$ L. Or, 1000 L $= 1$ m^3.

Ainsi, $V = 108,4617\,m^3$

$\boxed{108 \quad \text{m}^3 \text{ est une valeur approchée de ce volume (à 1 m}^3\text{ près)}}$

☑ Partie II :

1. Notons p le pourcentage recherché.

$$p = \frac{41}{115} \times 100 = \frac{4100}{115} \approx 36\%$$

$\boxed{\text{Le pourcentage recherché est égal à } 36\%}$

2.

$$\frac{60}{100} \times 115 \times 4 \times 365 = 100740$$

$100740\,L = 100,740\,m^3 \approx 100\,m^3$

$\boxed{\text{Les besoins d'eau de pluie de toute la famille pour une année de 365 jours sont d'environ } 100 \quad \text{m}^3}$

3. Oui, l'eau de pluie récupérée en 2009 aurait pu suffire aux besoins en eau de pluie de la famille car ils ont récupéré 108 m^3 (plus de 100 m^3).

☑ Partie III :

1. a) Pour déterminer une valeur approchée du prix payé pour 100 m^3 d'eau, il suffit de lire graphiquement l'ordonnée du point d'abscisse 100 appartenant à la droite de la page 7.

Ce point a pour ordonnée 250.

$\boxed{\text{Le prix payé pour } 100 \quad \text{m}^3 \text{ d'eau est } 250 \text{ €.}}$

1. b) La droite tracée page 7 est une droite passant par l'origine du repère. Cette droite est une droite linéaire.

Cette droite est la représentation graphique de la fonction prix, notée p.

p est une fonction **linéaire**, son expression est la forme :

$p : x \mapsto ax$ ou $p(x) = ax$.

Pour déterminer le nombre a, il suffit de s'aider du graphique.

Le point de coordonnées $(20; 50)$ appartient à la droite. Nous pouvons écrire que :

$$p(20) = 50 \quad \text{donc} \quad 20 \times a = 50$$

Ainsi, $a = \dfrac{50}{20} = 2,5$

$$\boxed{\text{p(x) =2,5x}}$$

c) Notons f la fonction donnant le prix en euros abonnement inclus.

L'expression de la fonction f est :

$$f : x \mapsto 2,5x + 50$$

La fonction f est **affine**. La représentation graphique de la fonction f est une droite que l'on va noter Δ. Cette droite Δ est une droite ne passant pas par l'origine du repère.

L'équation de la droite Δ est : $y = 2,5x + 50$

La droite Δ passe par les points de coordonnées $(0; 50)$ et $(20; 100)$ (à vous de tracer la droite Δ !)

2. Soit n le nombre d'années recherché.

$$250 \times n \geq 910 \quad \text{donc} \qquad n \geq \frac{910}{250}$$

On peut écrire : $n \geq 3,64$

$\boxed{\text{Au bout de 4 ans, les économies réalisées pourront compenser l'achat de la citerne.}}$