

SNT Devoir maison

L'abaque de Neper est un tableau dont les cases sont repérées par des numéros de colonne (de droite à gauche à partir de 0) et de ligne (de bas en haut à partir de 0) :

(4,4)	(3,4)	(2,4)	(1,4)	(0,4)
(4,3)	(3,3)	(2,3)	(1,3)	(0,3)
(4,2)	(3,2)	(2,2)	(1,2)	(0,2)
(4,1)	(3,1)	(2,1)	(1,1)	(0,1)
(4,0)	(3,0)	(2,0)	(1,0)	(0,0)

Les axiomes de Neper permettent de remplir cet abaque en attribuant à chaque case une valeur définie ainsi :

- Axiome 1 : **La valeur de chaque case est le double de la valeur de sa voisine du dessous (si elle en a une) et le double de la valeur de sa voisine de droite (si elle en a une).** (ligne 12 du script ci-dessous)
- Axiome 2 :
 - La valeur d'une case du bas est 2^{colonne} (ligne 11 du script ci-dessous)
 - La valeur d'une case de droite est 2^{ligne} (ligne 10 du script ci-dessous)

Voici l'illustration de l'axiome 2 :

				16
				8
				4
				2
16	8	4	2	1

L'application `why3`¹ en ligne² a été utilisée avec ce script :

1. Utilisée pour prouver l'absence de bugs dans divers programmes comme par exemple le noyau Linux.
2. <http://why3.lri.fr/try/>

```

1 module Neper
2   use int.Int
3   use int.Power
4
5   let rec fonction valeur (colonne ligne: int) : int
6     requires { colonne >= 0 }
7     requires { ligne >= 0 }
8     ensures  { result = power 2 colonne * power 2 ligne }
9     variant  { colonne }
10    = if colonne = 0 then power 2 ligne
11      else if ligne = 0 then power 2 colonne
12        else 2 * valeur (colonne - 1) ligne
13
14 end

```

ce qui a prouvé le corollaire 7 de Neper :

Corollaire 7 : La valeur de la case située à la colonne *colonne* et à la ligne *ligne* est $2^{\text{colonne}} \times 2^{\text{ligne}}$.

On demande d'en déduire les corollaires suivants :

1. **Corollaire 1** : La valeur de la case (*colonne* - 1, *ligne* + 1) est égale à la valeur de la case (*colonne*, *ligne*).
2. **Corollaire 2** : La valeur de la case (*colonne* + 1, *ligne* + 1) est le quadruple de la valeur de la case (*colonne*, *ligne*).
3. **Corollaire 3** : La valeur de la case (*x*, *x*) est égale à 4^x .
4. **Corollaire 4** : La valeur de la case (*x*, *x* + 1) est égale à 2×4^x .

Rappels :

- Pour toutes valeurs des entiers *a* et *b*, on a $2^a \times 2^b = 2^{a+b}$
- $2^{-1} = \frac{1}{2}$
- $2^2 = 4$
- Pour toute valeur de l'entier *a*, on a $2^{2 \times a} = 4^a$

Il est possible de simplifier des expressions littérales avec SymPy³. En Python, la notation pour une puissance est le double astérisque. Par exemple pour entrer 2^z on écrit `2**z`.

3. <https://live.sympy.org/>