Le jeu du commis voyageur

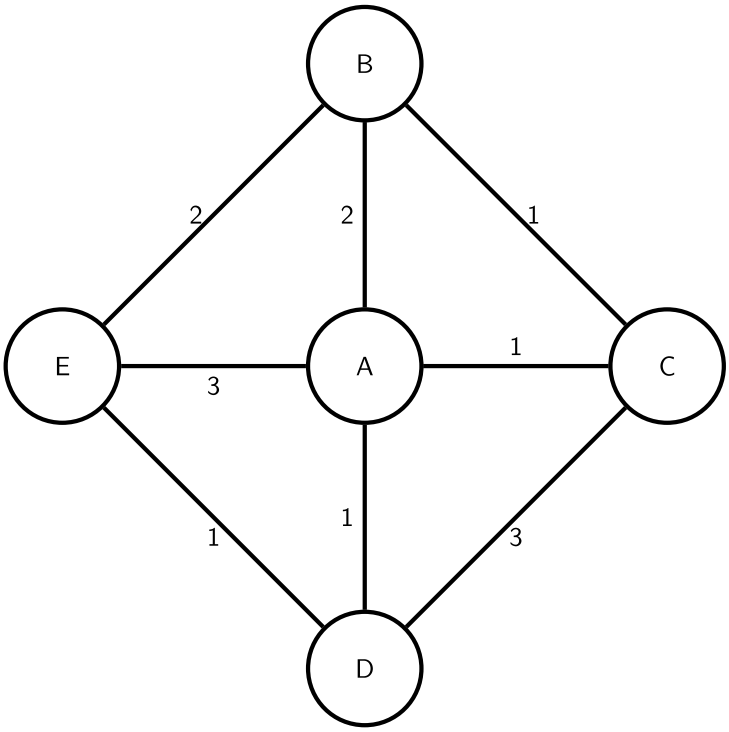
1 Présentation du jeu

Le jeu du commis voyageur est un jeu à un joueur, touchant aux domaines suivants :

- Les graphes (le jeu se joue sur un graphe).
- La construction du nombre (comparaison, addition, comptage, équations).
- L'écriture (de la liste des villes parcourues).
- Le repérage dans l'espace.
- La lecture (des chiffres).

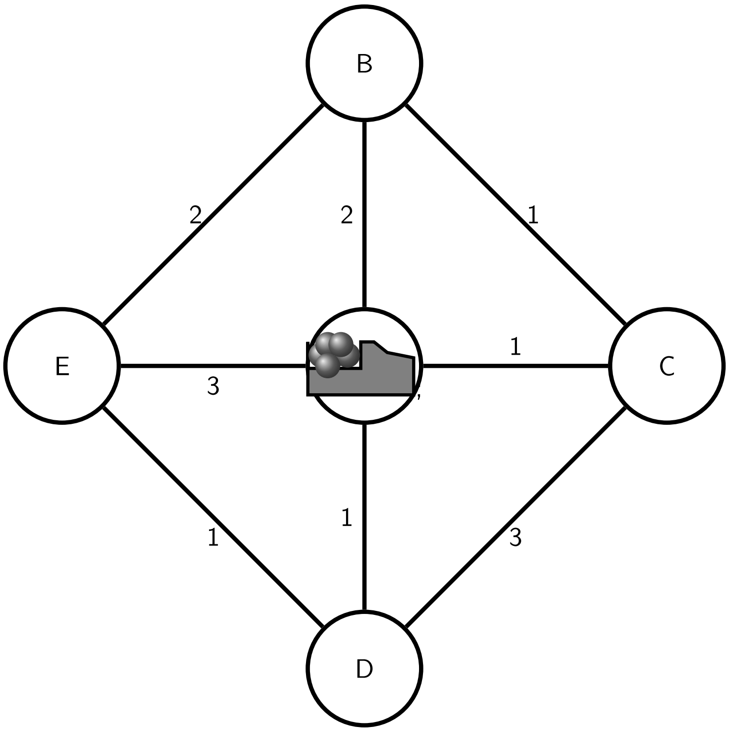
Le jeu nécessite un matériel spécifique mais pas rare. Pour jouer, il faut

- des jetons (pour le péage),
- une petite voiture (ou mieux, un camion avec une benne pouvant transporter les jetons),
- et un graphe comme celui-ci :

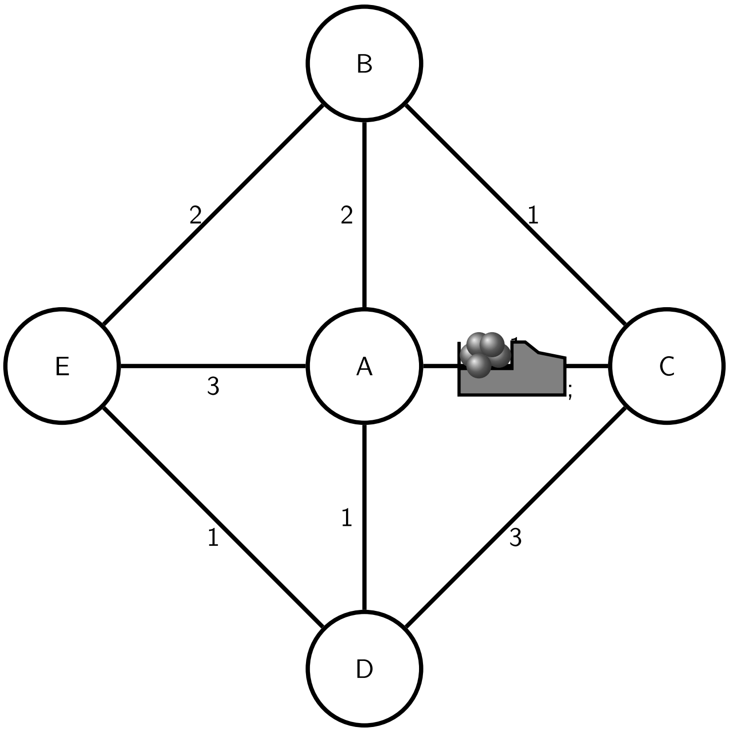


Avant de jouer, on donne au joueur un certain nombre de jetons (ou, ici, de graines) et un camion. Par exemple, avec le graphe ci-dessus, 6 graines suffisent. Ensuite, le joueur

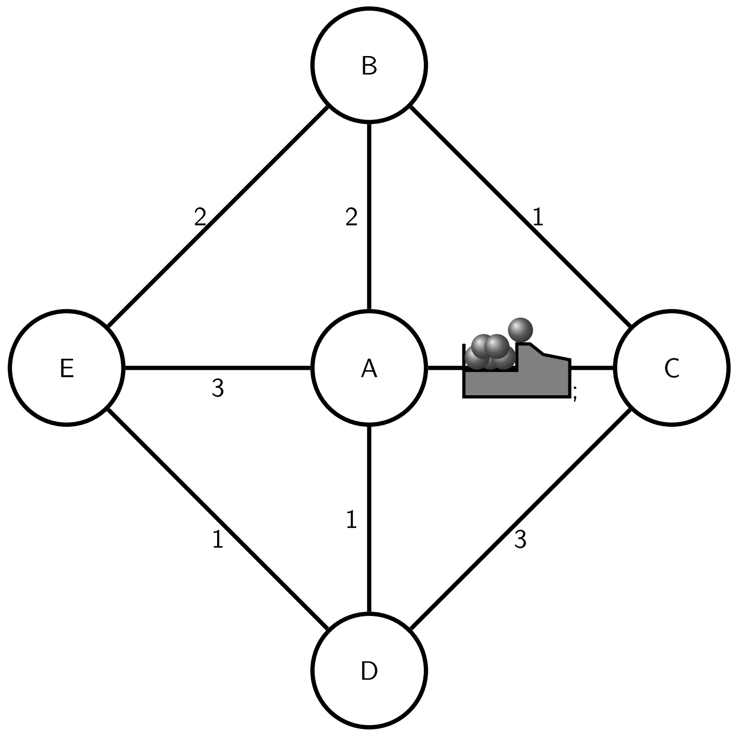
- pose le camion sur une ville de son choix (par exemple A) :



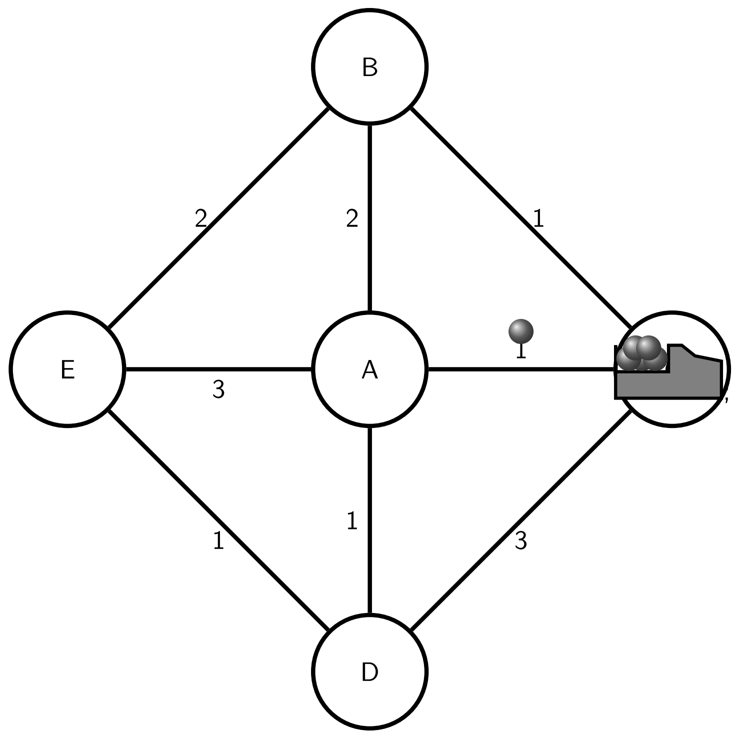
• choisit une ville reliée à A par une route, puis commence à emprunter cette route :



• regarde le montant indiqué au péage (ici, 1) et dépose autant de graines qu'indiqué (ici, une) :

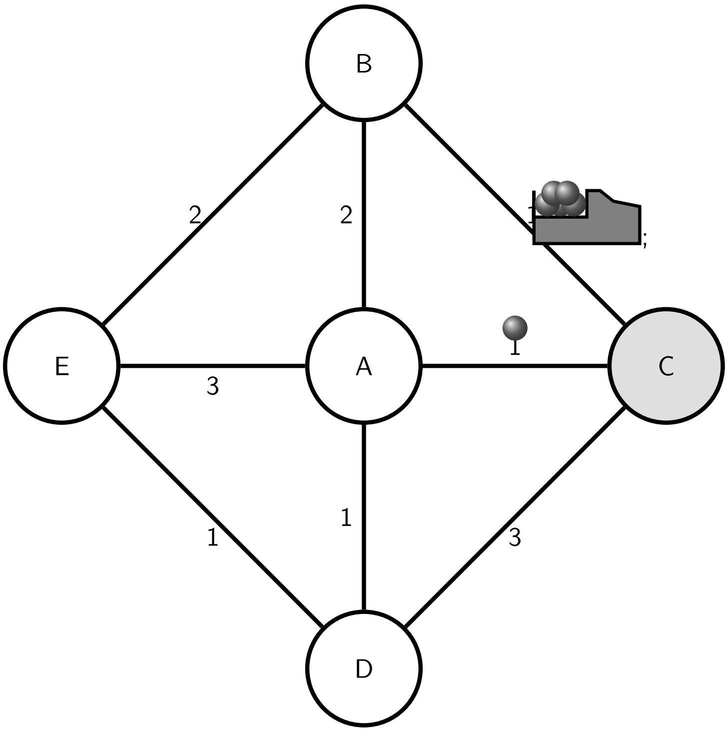


• continue jusqu'à la ville choisie (ici, C) :

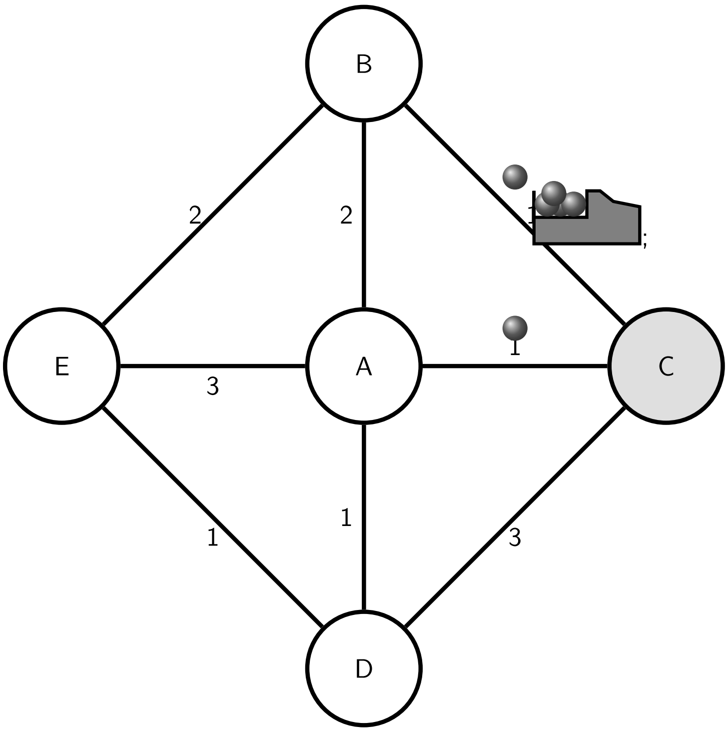


• Puis recommence :

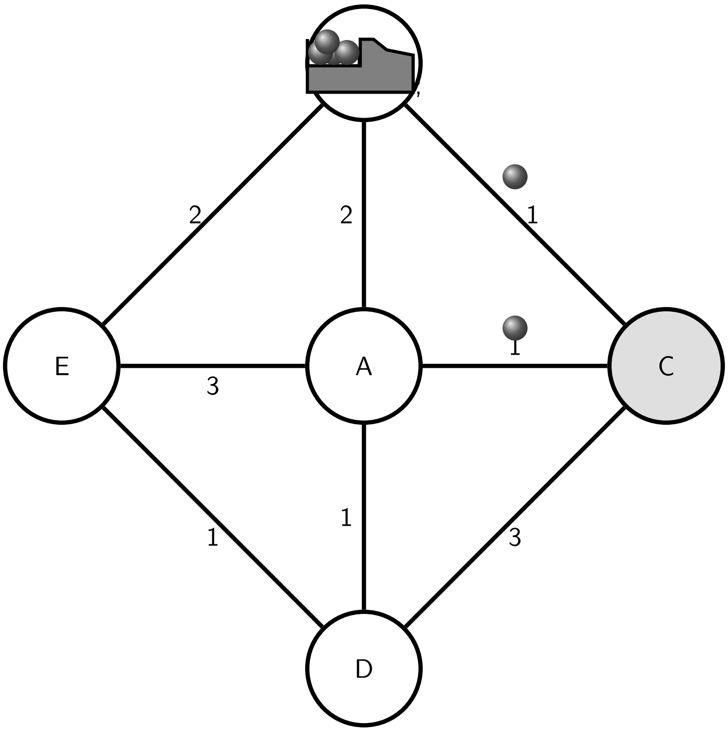
  ◦ s'il a choisi B comme destination suivante, il va vers B, s'arrête au péage :



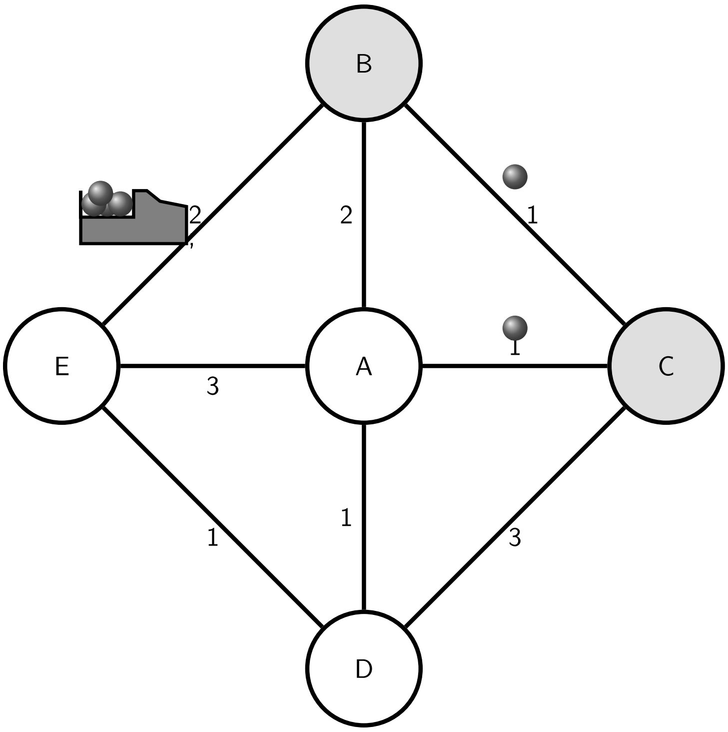
◦ il lit le montant du péage (ici, 1) et dépose donc une graine au péage :



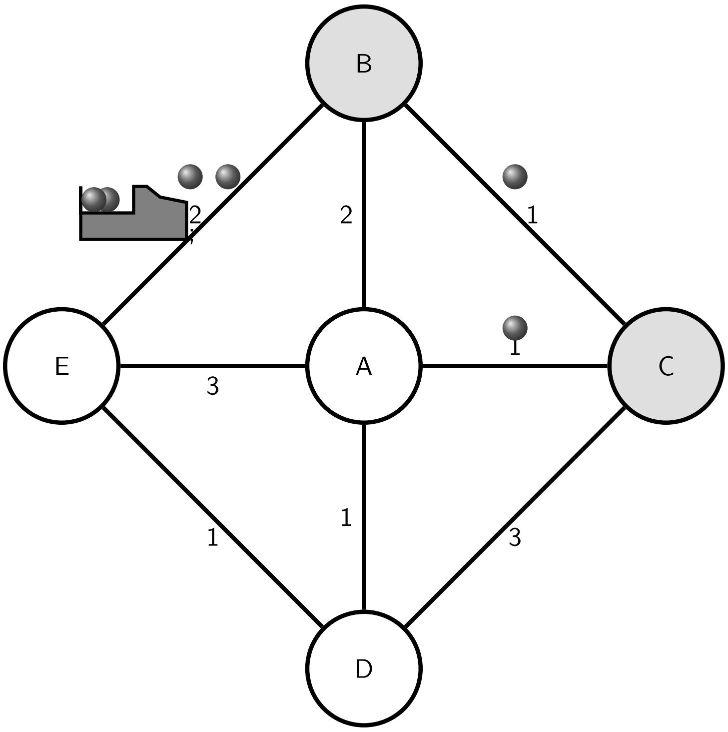
◦ puis continue sa route jusqu'à B :



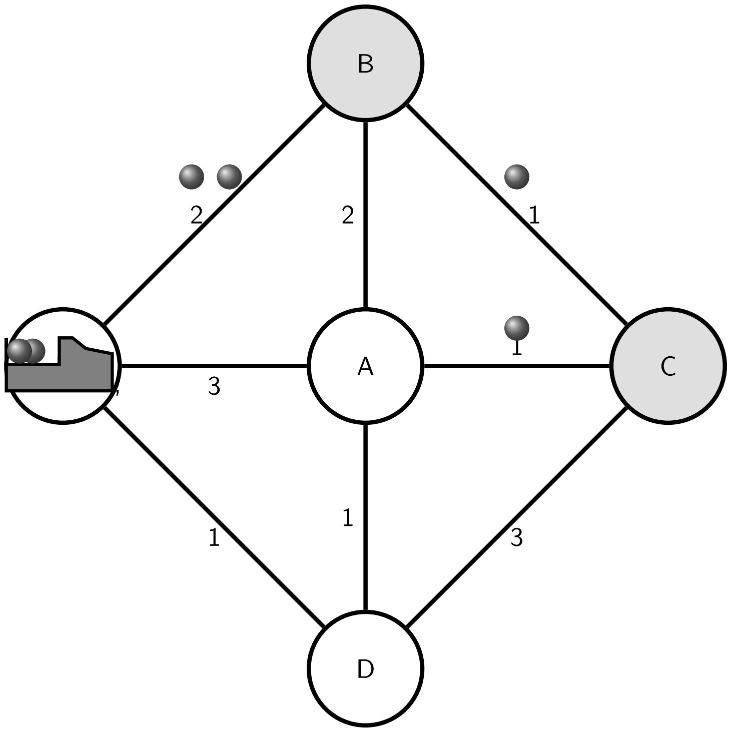
- Puis, s'il choisit E comme destination suivante,
  - il va jusqu'au péage :



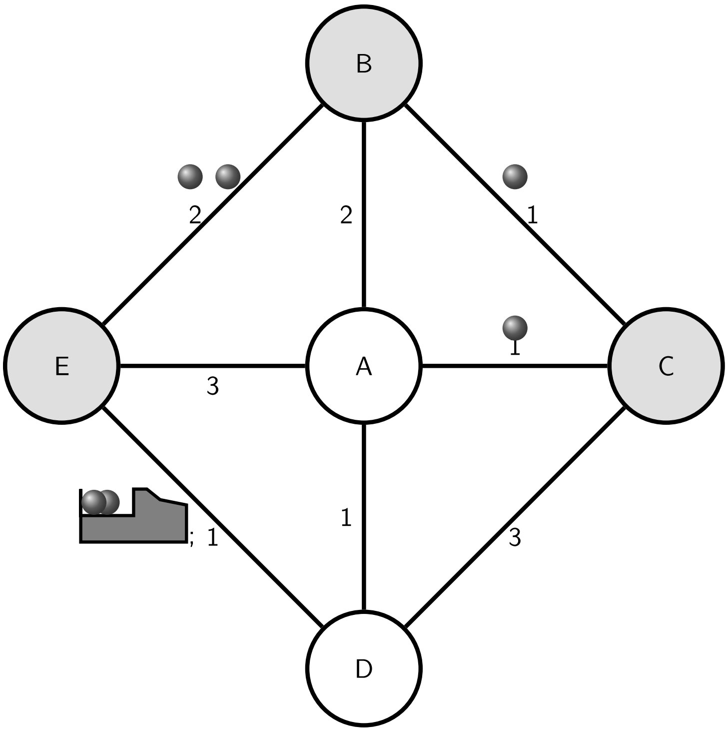
  - lit le montant du péage (ici 2) donc dépose 2 graines au péage :



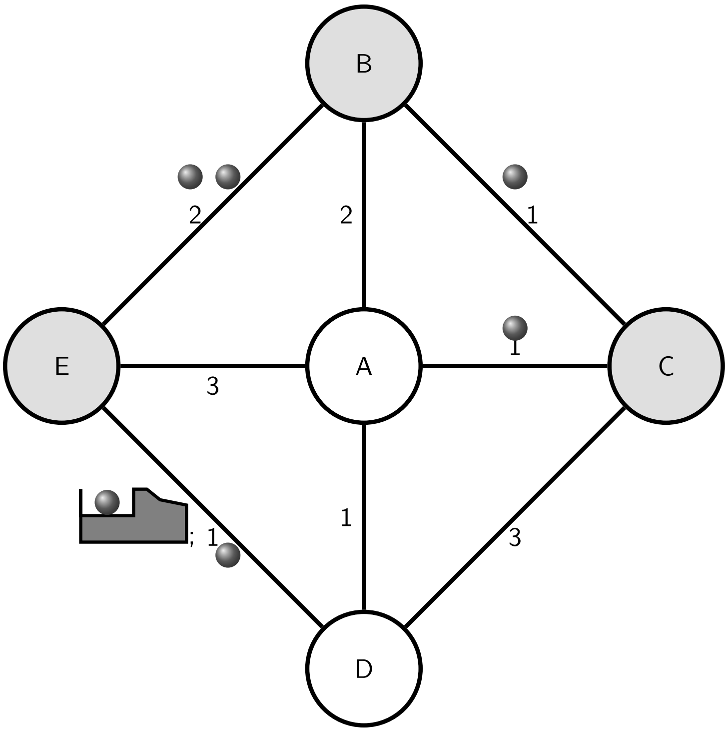
◦ puis continue jusqu'à la ville E :



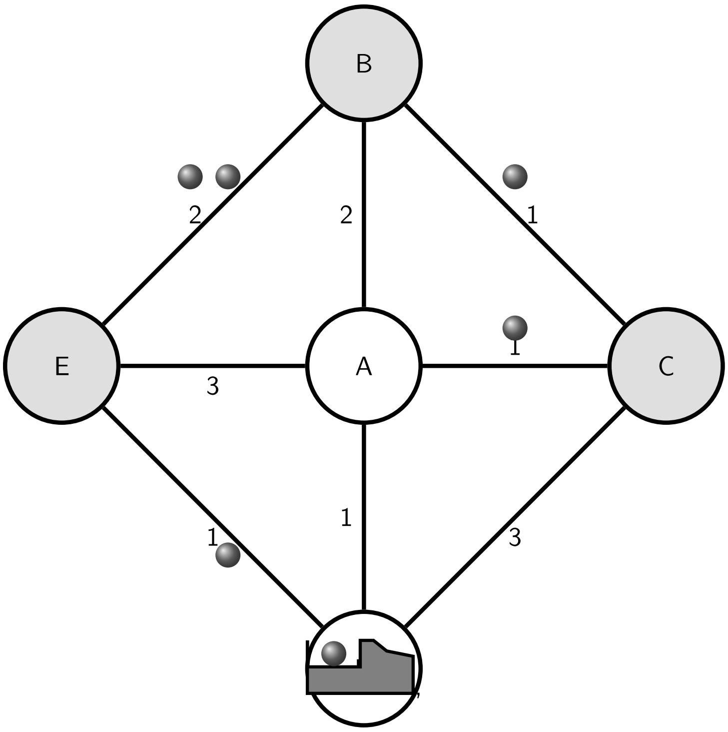
- Ensuite, il choisit de passer par la ville D. Pour cela,
    - il va jusqu'au péage :



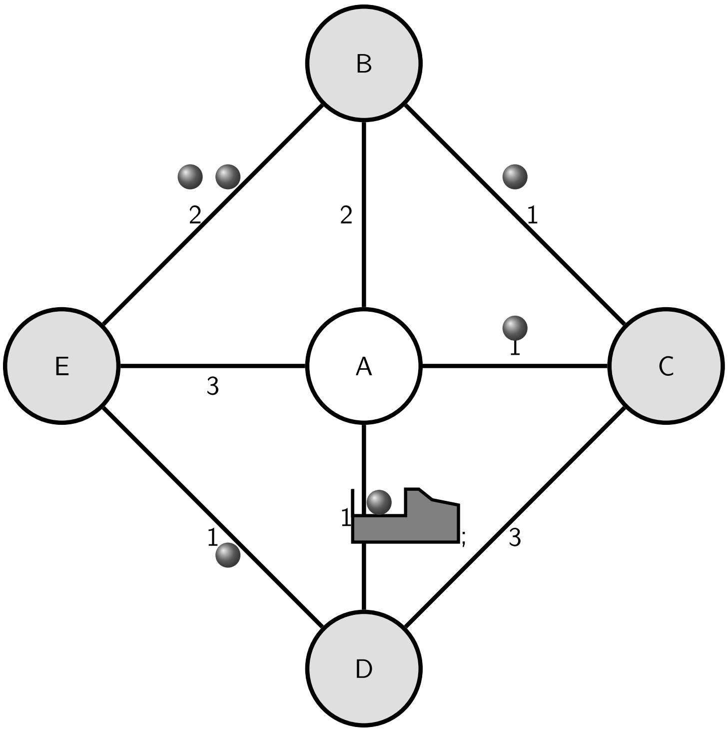
◦ il lit le montant du péage (ici, 1) puis dépose 1 graine au péage :



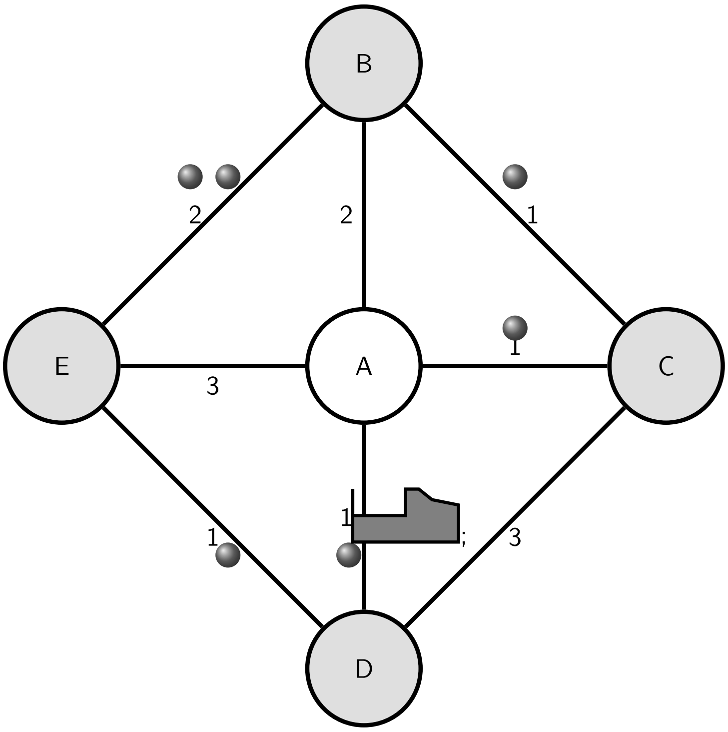
◦ puis continue jusqu'à la ville D :



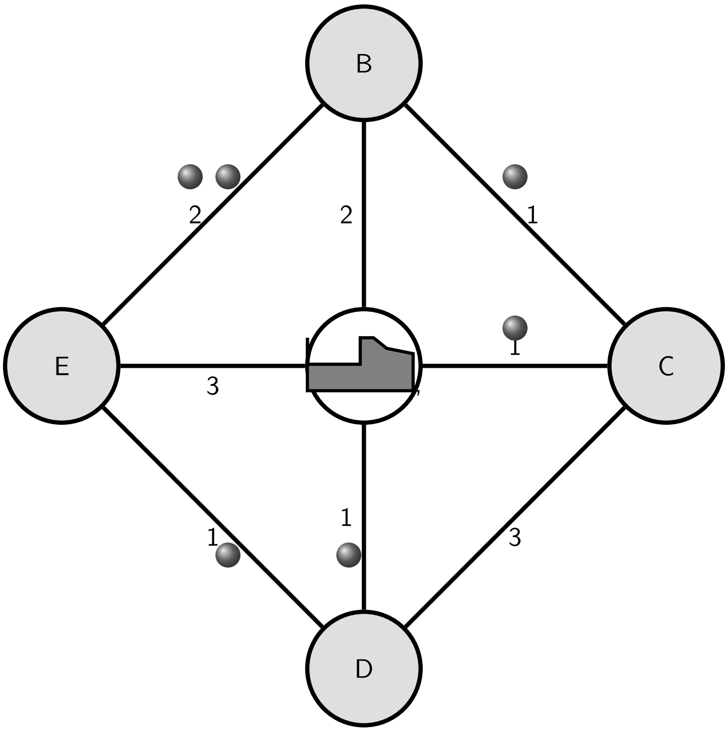
- Mais comme il est parti de la ville A, il doit y retourner.
  - Il va jusqu'au péage :



  - il regarde le montant du péage (ici, 1) puis dépose une graine à côté du péage :



◦ puis il continue jusqu'à la ville A :



Quand le jeu est terminé, le joueur va donner

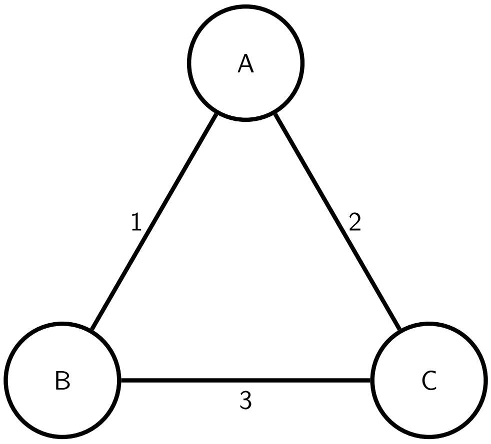
- la liste des villes parcourues, dans l'ordre (ici, `ACBEDA`),
- le nombre de jetons qu'il lui reste (ici, zéro puisque le camion est revenu à vide).

Le joueur a gagné s'il a visité toutes les villes et réussi à payer tous les péages. Pour cela, il lui faut suffisamment de graines mais aussi qu'il choisisse bien son circuit. Par exemple avec 6 graines au début, le circuit `ABCDEA` aurait fait perdre la camionneuse parce que ce circuit aurait nécessité 10 graines. Le circuit `ABCA` aussi est perdant, mais pas parce qu'il coûte trop cher (il ne nécessite que 4 graines) : la camionneuse a oublié les villes D et E.

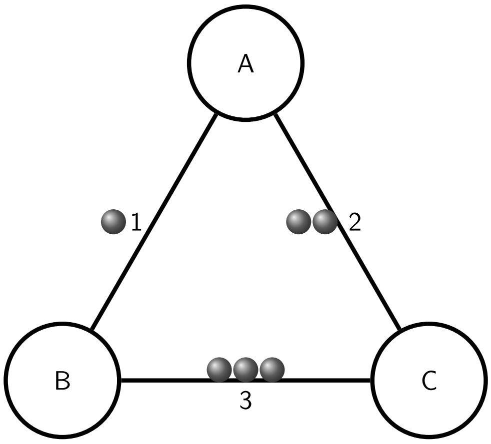
2 En Grande Section

2.1 Séance 1

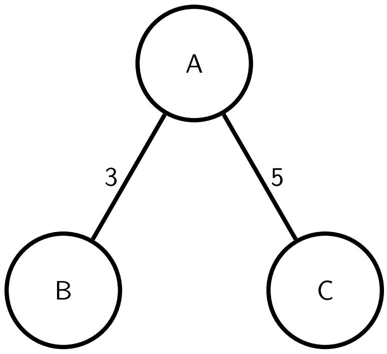
Le circuit ci-dessous a été testé en Grande Section :



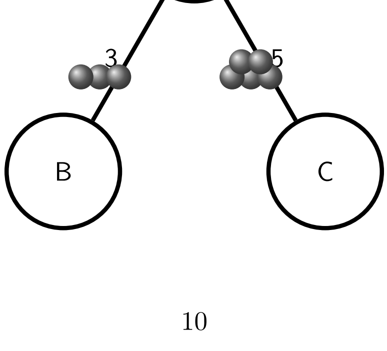
Quelle que soit la ville choisie pour départ du circuit, le résultat est le même :



Donc, avec moins de 6 graines au départ, on ne peut pas gagner à ce jeu. Avec 6 graines au départ il s'agit essentiellement d'un jeu d'entraînement. Avec plus de 6 graines au départ on peut aussi demander combien il reste de graines dans le camion à l'arrivée et comparer avec le nombre initial et le nombre total de graines déposées aux péages.
Ce graphe aussi a été testé (avec 8 graines au départ) :



Si on commence par A, on ne peut pas gagner, car par exemple le chemin `ABAC` coûte au total 11 graines. On doit donc commencer par B (et finir en C) ou par C (et finir en B). On ne demande plus (dans cette version) de revenir à la ville de départ. Dans les deux cas, le graphe final est



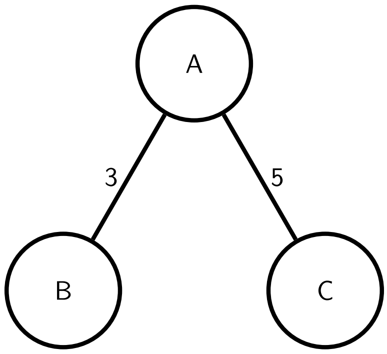
À la question « combien de graines y a-t-il en tout ? » plusieurs élèves répondent 2. En fait ils ont tendance à compter les tas de graines plutôt que les graines.
Ce graphe illustre le fait que 5+3=8 mais aussi la commutativité de l'addition.

2.2 Séance 2

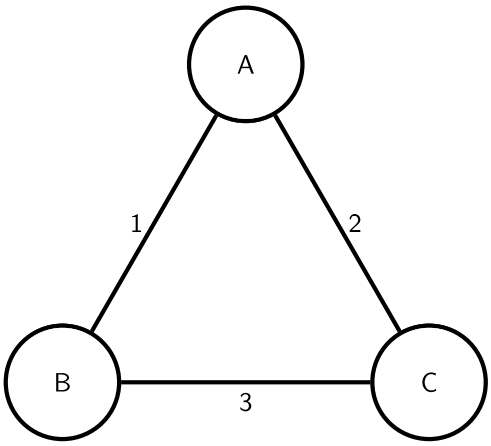
Cette fois-ci on a demandé aux élèves

- de choisir un graphe
- de choisir l'emplacement de départ du camion
- d'estimer le nombre de jetons dont ils avaient besoin avant de jouer
- de noter dans l'ordre les lettres visitées

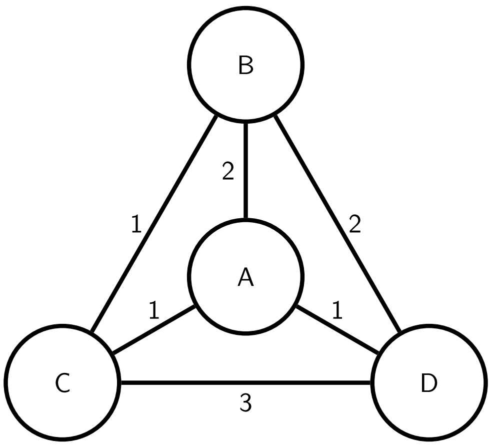
Ceci a permis de voir que, indépendamment de la construction du nombre, les élèves sont doués pour la recherche de circuit hamiltonien et ils ont même une tactique pour le problème du voyageur : chercher un chemin hamiltonien ne comportant que des petits nombres aux péages.
Voici des chemins hamiltoniens écrits par les élèves :



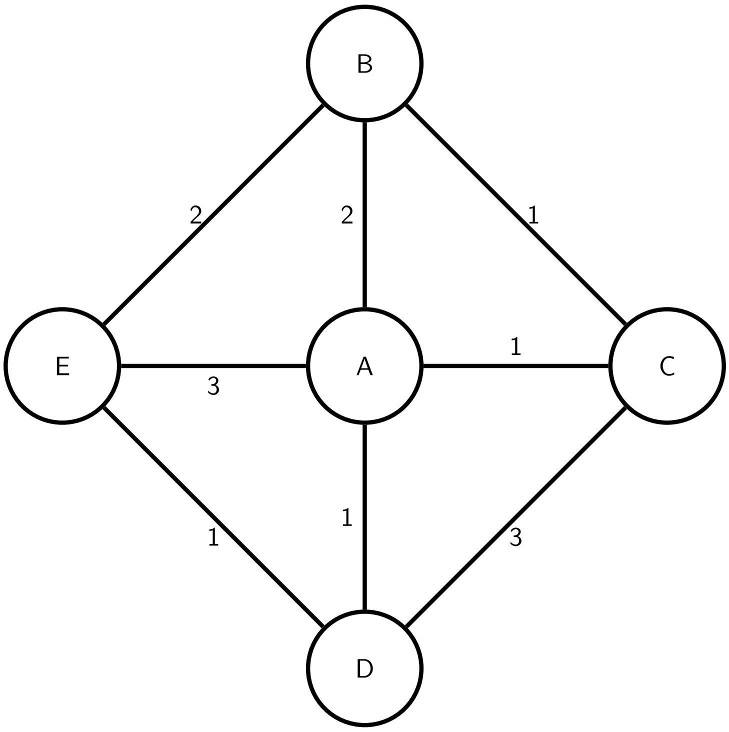
BAC



BAC aussi

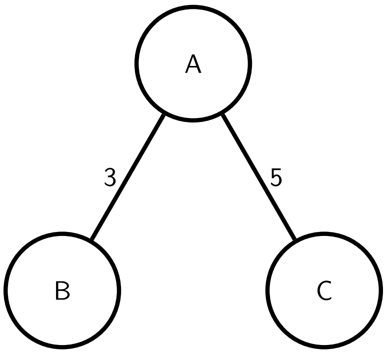


BCAD[1]



DEBCA

C'est pour estimer le nombre de jetons nécessaires, que la tâche a été moins aisée.
Un élève a choisi ce graphe :



À la question « de combien de jetons as-tu besoin » il a rapidement répondu 6. Il a trouvé le trajet **BAC** mais une fois en A il ne lui restait plus que 3 de ces 6 jetons. Or au péage suivant il avait besoin de 5 jetons, et il s'est rendu compte de lui-même que 3 est plus petit que 5 (pas assez).
Il lui a alors été proposé de recommencer avec plus de jetons. Il en a demandé 10 et cette fois-ci a réussi la mission. Mais il lui restait (constaté par comptage) 2 jetons « superflus ». Plutôt que passer à un autre graphe, il a préféré recommencer sur ce graphe avec le nombre exact de jetons nécessaires.
Sauf qu'il fallait trouver ce nombre ! Il a procédé par essais-erreurs. Partant du fait que « 10, c'est trop » et « 6 ce n'est pas suffisant » il a essayé avec 4 jetons, pour se retrouver en A avec 1 jeton qui ne suffisait pas à payer le péage pour aller en C : 1, c'est moins que 5, donc insuffisant.
Sachant que « 6 ce n'est pas assez » il semble naturel d'essayer avec un nombre plus grand que 6. Mais cet élève a insisté pour prendre, non pas plus que 6, mais plus que 4 (essai précédent). Il a demandé 5 jetons pour refaire le trajet, puis 7. Alors arrivé en A il ne lui restait que 4 de ces jetons et cela ne suffisait toujours pas pour le péage : 4, c'est moins que 5, donc insuffisant.
Avec une belle insistance, il a voulu recommencer, avec 8 jetons cette fois-ci, et cela suffisait juste : il est arrivé en C sans jeton. Mission accomplie, et il était visiblement fier de lui.
On effectue donc beaucoup de comparaisons avec cette activité qui pourrait s'avérer intéressante en APC.
On effectue aussi des soustractions, lorsqu'il s'agit de demander un certain nombre de jetons. Par exemple lorsqu'un élève ayant déjà 3 jetons en mains, estime avoir besoin de 5 jetons en tout, ce genre de dialogue peut s'instaurer :

- Combien de jetons veux-tu ?

[1] Ce chemin résout effectivement le problème du voyageur de commerce, tel qu'il a été donné au concours Centrale-Supélec 2023 (MPI) dont le graphe est extrait : on a bien là un exercice de CPGE résolu en GS !

• 5

◦ Combien en as-tu déjà ?

• 3

◦ Combien dois-je alors t'en donner en plus ?

• 5

◦ Mais du coup tu en auras plus que 5, non ?

• ...

◦ Combien alors dois-je t'en donner en plus ?

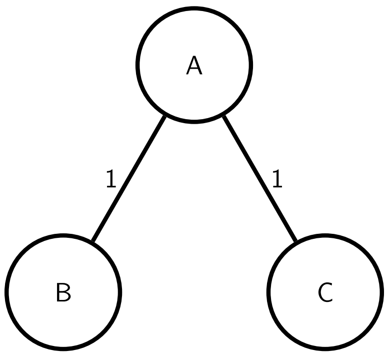
• 5

Il aurait fallu alors lui donner vraiment les 5 jetons demandés, puis lui faire compter le tout et enfin, lui demander s'il y en a vraiment 5 en tout. Le temps a manqué pour cela, ce qui est d'autant plus dommage que certains élèves auraient peut-être spontanément rendu les 3 jetons surnuméraires.

3 En IME

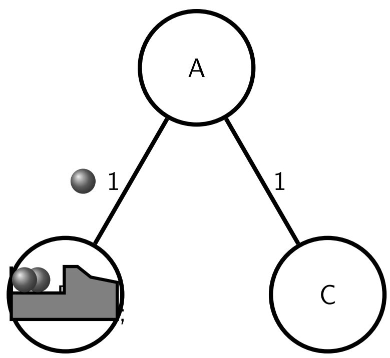
3.1 Péage sans comptage

Une élève s'est vue confier le graphe suivant (avec 3 graines) :

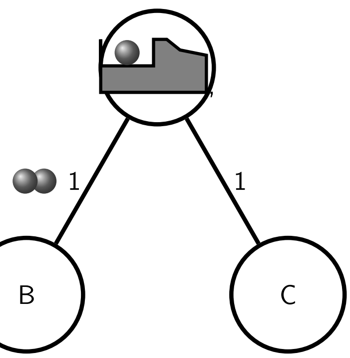


La consigne était que le camion doit visiter toutes les villes et à chaque fois, payer au péage. De fait, l'élève a commencé par la ville A,

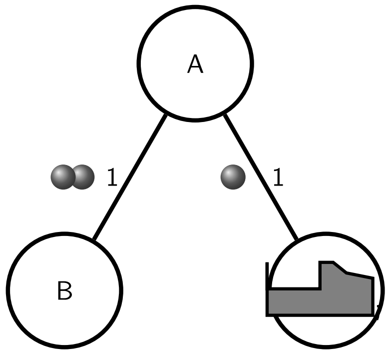
- a commencé par aller à B (il ne lui reste alors que 2 graines à cause du péage) :



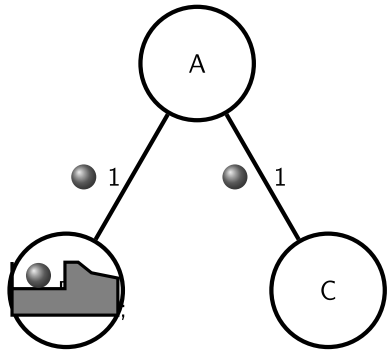
- a dû retourner en A, en repayant au même péage :



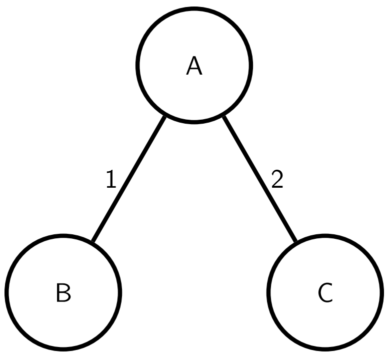
- et est enfin allée en C :



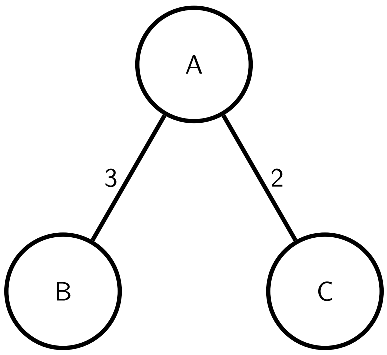
Ensuite on lui a suggéré de commencer par une autre ville que A (toujours avec 3 graines au départ) et en commençant par C, elle a constaté qu'il lui restait une graine et que donc 2 graines lui auraient suffi :



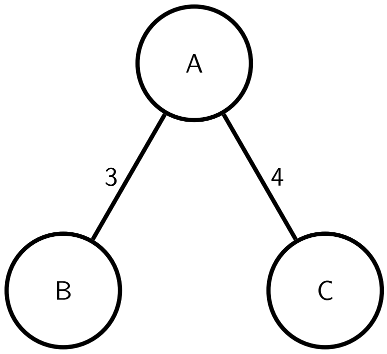
Une autre élève a eu ce graphe (mais toujours avec 3 graines au départ) :



En commençant par C, les 3 graines suffisaient. Cela lui a paru évident, avant même de commencer. Cette performance laisse penser que la construction du nombre progresse plus vite que la lecture. Cela montre aussi que le jeu du voyageur de commerce permet de manipuler des nombres sans être bloqué par les difficultés langagières (dans le triptyque, la manipulation vient effectivement avant la verbalisation).
Ensuite on est passé à des problèmes plus complexes, par exemple



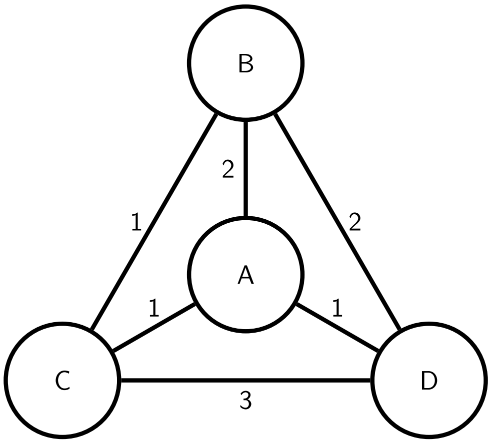
(avec 7 jetons au départ, l'élève a vu que c'était suffisant)
ou



(toujours avec 7 jetons, et là ça suffisait tout juste).

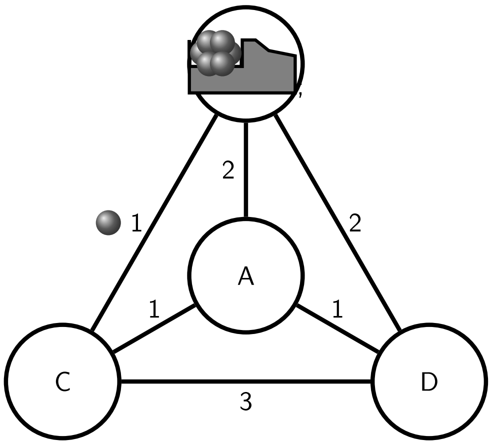
3.2 Planification

Un élève qui s'intéresse aux voitures, s'est exercé sur ce graphe, tout d'abord avec 8 graines :

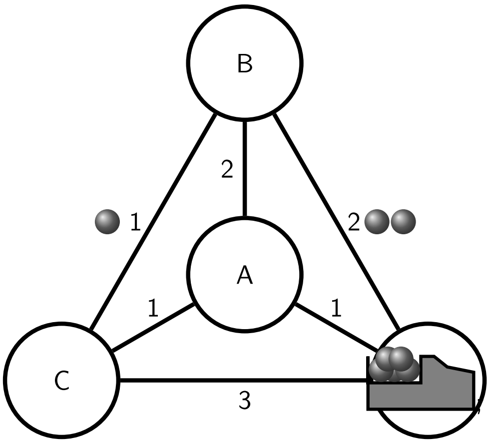


Cette fois-ci il devait non seulement parcourir toutes les villes, mais aussi revenir à la ville de départ. Il a choisi de partir de C.

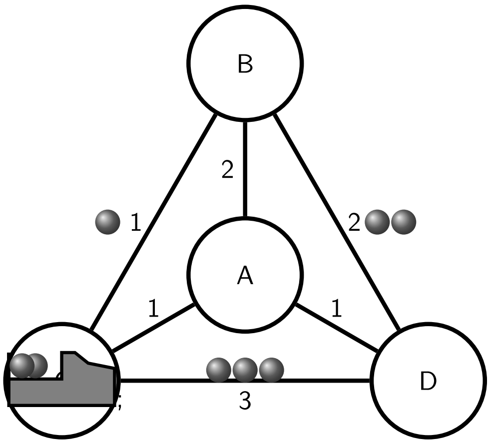
- Il est parti vers B :



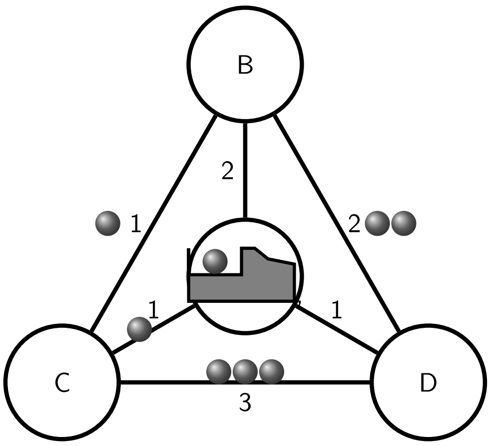
- puis est allé vers D :



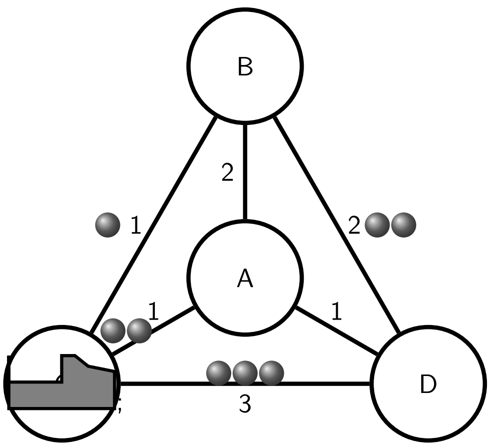
• puis est retourné en C (ce qui n'est pas optimal) :



• puis est allé en A :



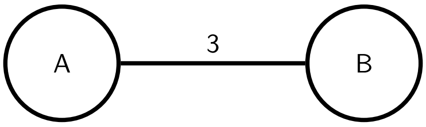
• puis est retourné en C (son point de départ) :



En choisissant un circuit optimal (comme `CBDAC` par exemple) il lui aurait suffi de 5 graines, ou autrement dit, avec 8 graines au départ, il lui en serait resté 3 à l'arrivée.

4 Prolongements

Si le temps le permet, on peut démarrer la séance avec des graphes encore plus simples comme celui-ci :



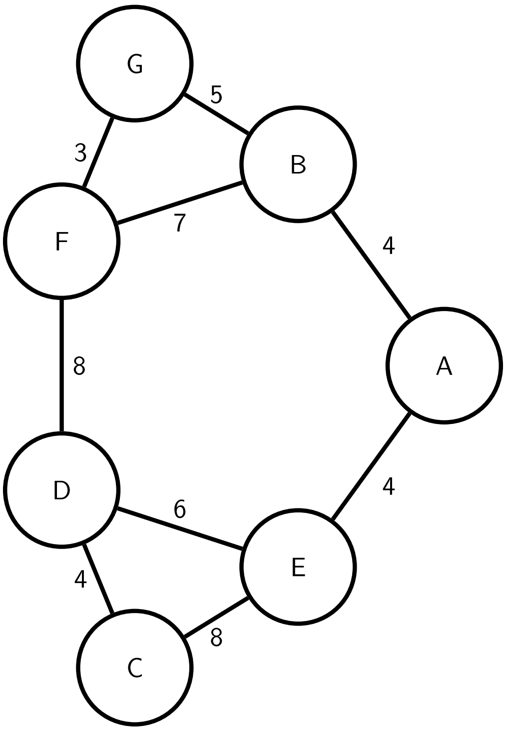
Comme il n'y a qu'une route (et donc qu'un péage), on ne voit pas d'addition sur ce graphe. Mais outre le fait qu'il permet de se familiariser avec la psychomotricité du jeu (les étapes départ-péage-arrivée, le fait que c'est au péage et non à la ville d'arrivée qu'on dépose les graines...) on peut déjà poser des problèmes de mathématiques comme

- J'ai 2 graines dans mon camion au départ. Est-ce que cela suffit pour aller en B ?
- J'ai 5 graines dans mon camion au départ en A. Je vais en B. Combien de graines reste-t-il dans le camion à l'arrivée en B ?

Ce jeu intéresse les élèves parce qu'il présente les nombres de façon originale, qu'il mobilise le repérage dans l'espace et la motricité, et qu'il utilise l'habillage du camion (la plupart des élèves aiment bien jouer aux petites voitures apparemment). On peut imaginer, pour les jours de beau temps, d'en faire une version géante dans la cour, avec des guérites (tenues par des élèves) pour les péages et un graphe dessiné au sol. Les joueurs se déplaceraient à l'aide de vélos sur lesquels ils transporteraient les jetons pour les péages.

4.1 Jeu de Dijkstra

Le jeu du voyageur de commerce ne peut se jouer que sur un graphe hamiltonien : il faut visiter toutes les villes. Mais on peut, avec le même matériel, jouer à un autre jeu, sur un graphe comme celui-ci[2] :

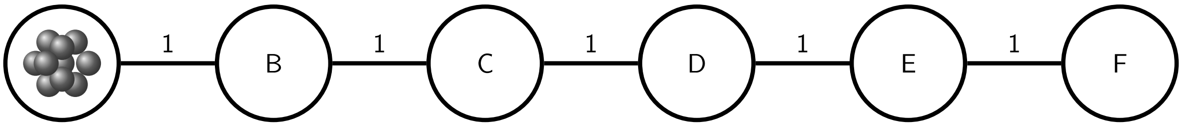


On choisit deux sommets du graphe (par exemple E et G) puis on pose le camion sur l'un des deux (par exemple E) et on demande de trouver le chemin le moins cher allant vers G, c'est-à-dire celui qui consomme le moins de jetons aux péages successifs.
Avec les données ci-dessus, les nombres en jeu sont grands (le chemin EABG coûte 13 jetons) ce qui rend cette nouvelle activité plus propice au cycle 2, qu'au cycle 1.

[2]issu du « sujet 0 » du bac NSI 2024

4.2 Le problème de la jeep

Cet exercice s'inspire d'un exemple donné par Alcuin d'York à Charlemagne :



Il y a initialement 10 jetons en A. Le jeu existe en deux versions :

1. Version Alcuin : on pose en A un camion ne pouvant pas transporter plus de 5 jetons à la fois. Il est chargé de déposer le plus grand nombre possible de jetons en D.
2. Version jeep : on pose en A un camion ne pouvant pas transporter plus de 4 jetons à la fois. Il doit essayer d'aller le plus loin possible.

Ce jeu se prête à un tournoi, où on donne à tous les joueurs le même graphe, avec le même nombre de jetons initialement en A, et le même camion. La gagnante est celle qui a réussi à amener le plus grand nombre possible de jetons en D, ou qui a réussi à aller le plus loin.
Là encore il y a des comparaisons à faire, ainsi que des transformations d'états.

Alain Busser
IREMI 974