Fractran

Alain Busser

3 mars 2021

Lothar Collatz

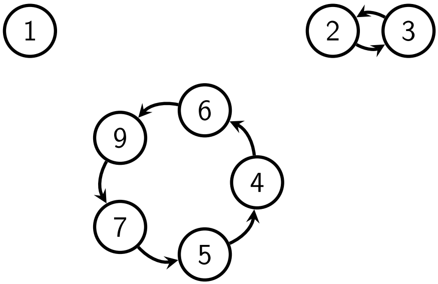
1910-1990

Lothar Collatz
Années 1930

Permutation de N

$$f(n) = \begin{cases} \dfrac{3n}{2} & \text{si} \quad n \equiv 0 \quad [2] \\[2ex] \dfrac{3n+1}{4} & \text{si} \quad n \equiv 1 \quad [4] \\[2ex] \dfrac{3n-1}{4} & \text{si} \quad n \equiv 3 \quad [4] \end{cases}$$

Graphe de Collatz



Lothar Collatz

Années 1930

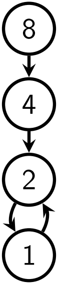
La suite de Collatz

$$f(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{si} \quad n \equiv 0 \quad [2] \\[2ex] \dfrac{3n+1}{2} & \text{si} \quad n \equiv 1 \quad [2] \end{cases}$$

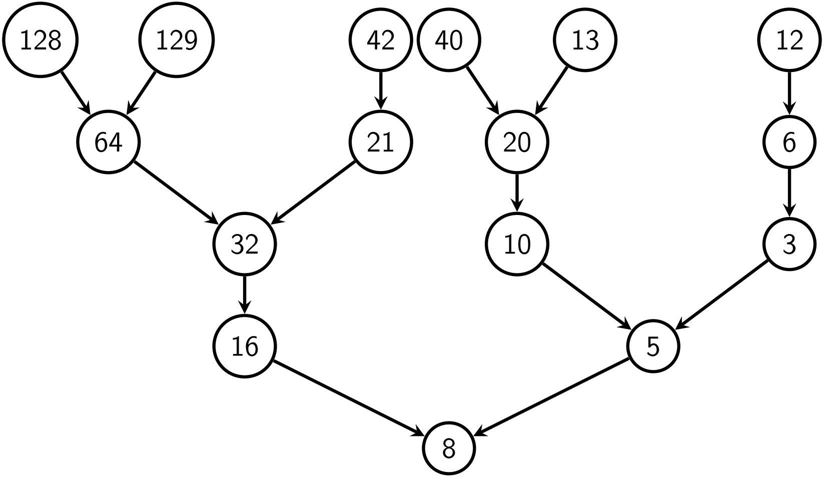
- Si n est pair, on dit qu'il est le <u>père</u> de $\dfrac{n}{2}$
- Si n est impair, on dit qu'il est la <u>mère</u> de $\dfrac{3n+1}{2}$

Graphe de Collatz

de la suite de Collatz



Graphe de Collatz
de la suite de Collatz



Collatz

Quels sont les nœuds possédant une mère ?

Si m est la mère de n alors $\dfrac{3m+1}{2} = n$ soit $3m+1 = 2n$ soit $3m = 2n - 1 : 2n \equiv 1 \quad [3]$.

Théorème

n possède une mère si et seulement si $n \equiv 2 \quad [3]$

Helmut Hasse
1898-1979

Collatz rencontre Hasse

1952, Hambourg

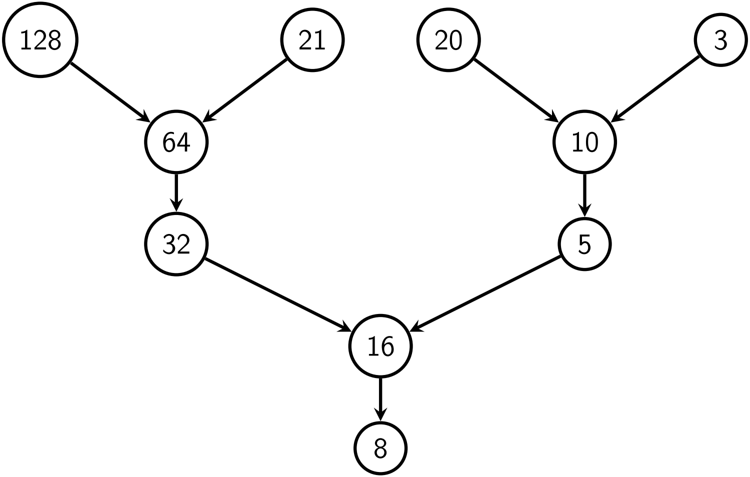
La suite de Syracuse

$$f(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{si} \quad n \equiv 0 \quad [2] \\ 3n+1 & \text{si} \quad n \equiv 1 \quad [2] \end{cases}$$

Paul Erdös :

Les mathématiques ne sont pas encore prêtes pour ce genre de problème.

Graphe de Collatz
de la suite de Syracuse



John Horton Conway
1937-2020

La suite de Collatz-Conway

définie uniquement sur les entiers impairs

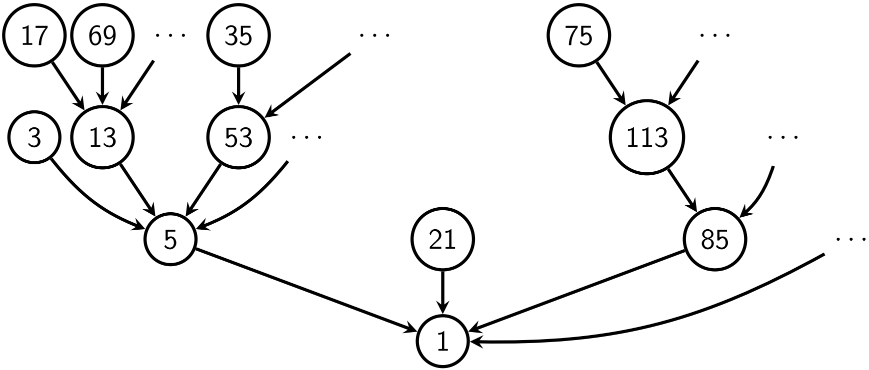
Si $n \equiv 1 \quad [2]$, $f(n) =$ le plus grand diviseur impair de $3n+1$.

$$f(n) = \frac{3n+1}{2^k}$$

où $k \in \mathbf{N}$ est le plus grand possible.

Graphe de Collatz

de la suite de Collatz-Conway



Suite de Collatz-Conway

Quels sont les parents de 1 ?

n est parent de 1 si $\exists k,\ \dfrac{3n+1}{2^k} = 1.$

Autrement dit, $2^k \equiv 1 \quad [3]$

Les solutions sont les $\dfrac{4^p - 1}{3}$ pour $p \geqslant 2$.

1 a une infinité de parents.

Le plus petit est 5.

Suite de Collatz-Conway

Quels sont les parents de 5 ?

n est parent de 5 si $\exists k, \dfrac{3n+1}{2^k} = 5$.

Autrement dit, $5 \times 2^k \equiv 1 \quad [3]$ soit $2^{k+1} \equiv 1 \quad [3]$

Les solutions sont les $\dfrac{5 \times 2^{2p+1} - 1}{3}$ pour $p \geqslant 0$.

5 a une infinité de parents.

Le plus petit est 3.

21 par contre n'a pas de parent.

Fonctions linéaires
John Conway

On applique à n la première fonction qui marche, parmi

- $n \mapsto \dfrac{110n}{21}$ si $n \equiv 0 \quad [21]$
- $n \mapsto \dfrac{13n}{7}$ si $n \equiv 0 \quad [7]$
- $n \mapsto \dfrac{7n}{11}$ si $n \equiv 0 \quad [11]$
- $n \mapsto \dfrac{51n}{65}$ si $n \equiv 0 \quad [65]$
- $n \mapsto \dfrac{13n}{17}$ si $n \equiv 0 \quad [17]$

Si aucune de ces fonctions ne donne un résultat entier, on arrête l'itération.

Le jeu des fractions
John Conway

On joue avec une liste de fractions comme

$$P = \left[\frac{110}{21}, \frac{13}{7}, \frac{7}{11}, \frac{51}{65}, \frac{13}{17}\right]$$

et une variable entière (par exemple 504)

```
while t<len(P):
    essai_produit = n*P[t]
    if essai_produit.denominator==1:
        n = essai_produit
        t = 0
    else:
        t += 1
```

Le jeu des fractions
John Conway

en commençant par $2^a \times 3^b \times 7$ ce jeu se termine sur $2^{a+b} \times 3^b \times 13$

$$\left[\frac{110}{21}, \frac{13}{7}, \frac{7}{11}, \frac{51}{65}, \frac{13}{17}\right]$$

en commençant par $2^a \times 3^b \times 7^c \times 11$ ce jeu se termine sur $2^{a+bc} \times 3^b \times 11$

$$\left[\frac{13}{77}, \frac{170}{39}, \frac{19}{13}, \frac{13}{17}, \frac{69}{95}, \frac{11}{19}, \frac{19}{23}\right]$$

en commençant par 2^n ce jeu aboutit à $2^{f(n)}$ où f est la fonction de Collatz

$$\left[\frac{1}{11}, \frac{136}{15}, \frac{15}{17}, \frac{4}{5}, \frac{26}{21}, \frac{7}{13}, \frac{1}{7}, \frac{33}{4}, \frac{5}{2}, 7\right]$$

Les fractions magiques

Le jeu des nombres premiers (Conway)

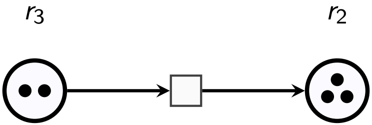
En commençant par 2 on passe par 2^2, 2^3, 2^5, 2^7, 2^{11}, 2^{17}, etc

$$\left[\frac{17}{91}, \frac{78}{85}, \frac{19}{51}, \frac{23}{38}, \frac{29}{33}, \frac{77}{29}, \frac{95}{23}, \frac{77}{19}, \frac{1}{17}, \frac{11}{13}, \frac{13}{11}, \frac{15}{2}, \frac{1}{7}, 55\right]$$

John Conway :

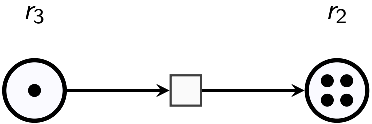
Un mathématicien c'est un magicien qui dévoile ses secrets.

Addition



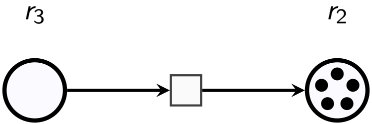
$$3^2 \times 2^3 = 72$$

Addition



$$3^1 \times 2^4 = 48$$

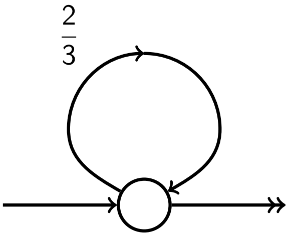
Addition



$$3^0 \times 2^5 = 32$$

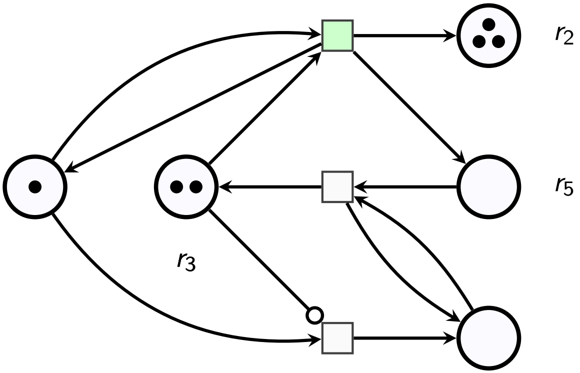
Fractran

Addition

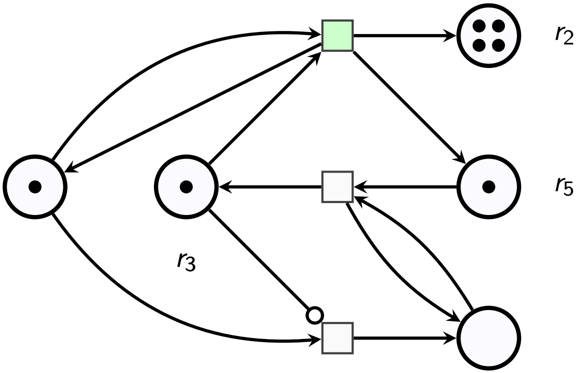


En partant de $2^a \times 3^b$ on s'arrête sur 2^{a+b}

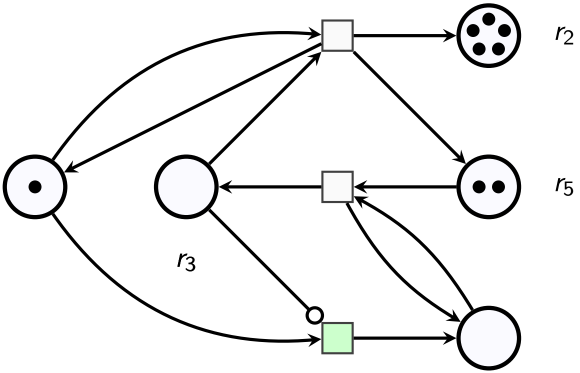
Addition non destructrice



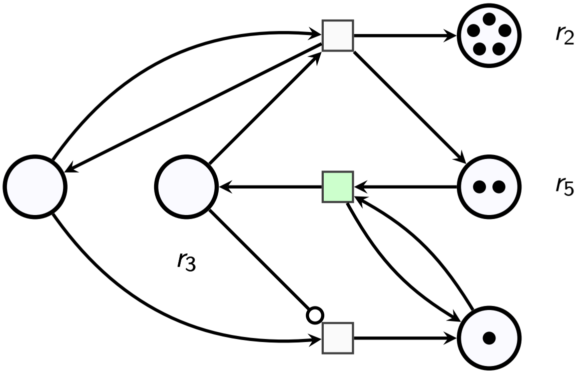
Addition non destructrice



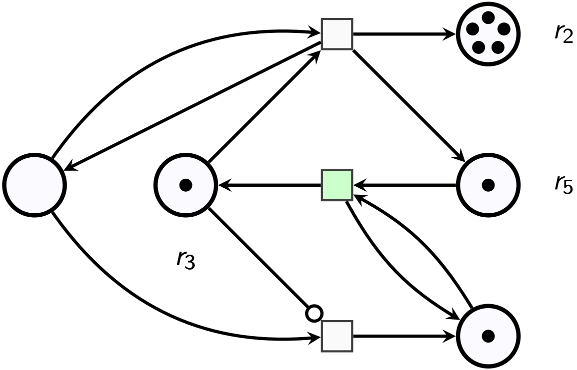
Addition non destructrice



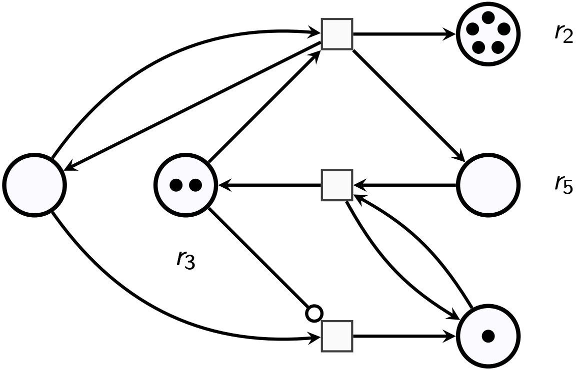
Addition non destructrice



Addition non destructrice

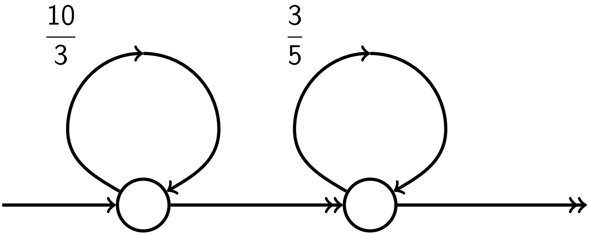


Addition non destructrice



Fractran

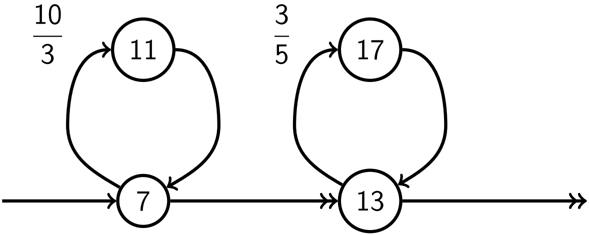
Addition non destructrice



En partant de $2^a \times 3^b$ on s'arrête sur $2^{a+b} \times 3^b$

Fractran

Addition non destructrice

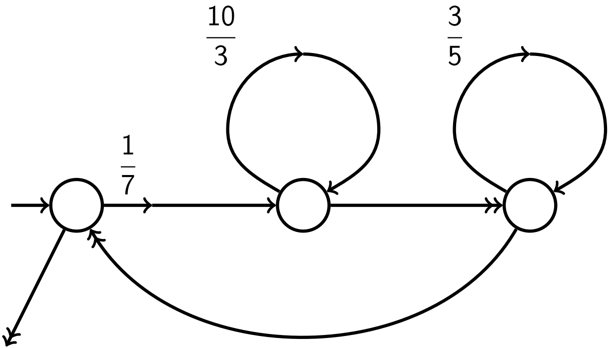


En partant de $2^a \times 3^b$ on s'arrête sur $2^{a+b} \times 3^b$

$$\left[\frac{110}{21}, \frac{13}{7}, \frac{7}{11}, \frac{51}{65}, \frac{13}{17}\right]$$

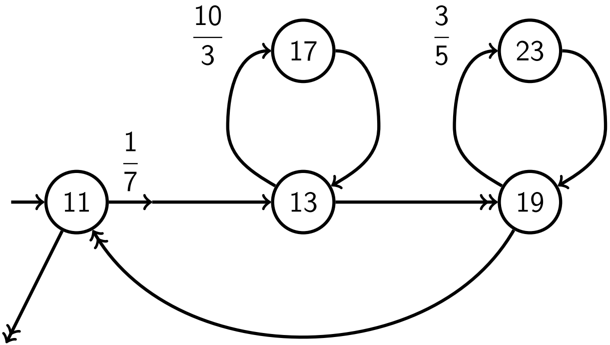
Fractran

Algorithme de multiplication



En partant de $2^a \times 3^b \times 7^c$ on s'arrête sur 2^{a+bc}

Fractran
Algorithme de multiplication



En partant de $2^a \times 3^b \times 7^c$ on s'arrête sur 2^{a+bc}

$$\left[\frac{13}{77}, \frac{170}{39}, \frac{19}{13}, \frac{13}{17}, \frac{69}{95}, \frac{11}{19}, \frac{19}{23}\right]$$

Indécidabilité
façon Turing

Conway a écrit un interpréteur Fractran en Fractran.
S'il existait un programme Fractran du même genre, permettant de savoir si un programme Fractran possède un cycle, on pourrait s'en servir pour fabriquer un programme Fractran qui possède un cycle si et seulement si le programme en entrée n'en possède pas.

Théorème (Conway 1972)

Il existe des programmes Fractran pour lesquels l'existence de cycles est indécidable.

Une énigme de Conway

à propos de 91

Quelle est la particularité du nombre 91 ?