Sommaire

Chapitre I

Rappels sur les suites numériques de première générale

1. Histoire des Mathématiques

Le saviez-vous ?
Extrait du site wikipédia : [1]
Les suites numériques sont liées à la mathématique de la mesure (mesures d'un phénomène prises à intervalles de temps réguliers) et à l'analyse (une suite numérique est l'équivalent discret d'une fonction numérique). La notion de suite est présente dès qu'apparaissent des procédés illimités de calcul. On en trouve, par exemple, chez Archimède, spécialiste des procédés illimités d'approximation (séries géométriques de raison 1/4) pour des calculs d'aires et de volumes, ou en Égypte vers 1700 av. J.-C. et plus récemment au ier siècle apr. J.-C. dans le procédé d'extraction d'une racine carrée par la méthode de Héron d'Alexandrie :
Pour extraire la racine carrée de A, choisir une expression arbitraire a et prendre la moyenne entre a et $\dfrac{A}{a}$ et recommencer aussi loin que l'on veut le processus précédent.
En notation moderne, cela définit la suite de nombres (u_n) définit par la relation :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{A}{u_n}\right). \end{cases}$$

On retrouve ensuite cette préoccupation plusieurs siècles plus tard (à partir du xviie siècle) avec la méthode des indivisibles (Cavalieri, Torricelli, Pascal, Roberval). Dans l'Encyclopédie Raisonnée de d'Alembert et Diderot (1751), une grande part est laissée aux suites et séries dont le principal intérêt semble être leur convergence :
Suite et série : se dit d'un ordre ou d'une progression de quantités qui croissent ou décroissent suivant quelques lois. Lorsque la suite va toujours en s'approchant de plus en plus de quelque quantité finie [...] on l'appelle suite convergente et si on la continue à l'infini, elle devient égale à cette quantité.
C'est ainsi que l'on voit Bernoulli, Newton, Moivre, Stirling et Wallis, s'intéresser aux suites pour approcher des valeurs numériques. C'est à Lagrange que l'on doit, semble-t-il, la notation indicielle. L'étude des suites ouvre la porte à celle des séries entières dont le but est d'approcher, non plus des nombres, mais des fonctions. Dans la seconde moitié du xxe siècle, le développement des calculateurs et des ordinateurs donne un second souffle à l'étude des suites en analyse numérique grâce à la méthode des éléments finis. On en retrouve l'usage aussi dans les mathématiques financières.

Parallèlement à ces études de suites pour leur convergence, se développe un certain goût pour l'étude de la suite non tant pour sa convergence mais pour son terme général. C'est le cas par exemple d'un grand nombre de suites d'entiers comme la suite de Fibonacci, celle de Lucas ou, plus récemment, celle de Syracuse. Sont aussi particulièrement étudiées les suites de coefficients dans des séries entières ou les suites de nombres découvertes lors de dénombrements.

1.

2. Généralités sur les suites

a) Définition

De manière intuitive, on appelle suite numérique une liste infinie de nombres placés dans un certain ordre.

A titre d'exemple ▶ Pour comprendre la notation indicière

Exemple 1 : u : 2 ; -4 ; 8 ; -16 ; 32 ; -64 ; 128 ; ...
On va associer à chaque nombre sa place dans la liste.

Si on numérote la suite à partir de 0.

u :	2	-4	8	-16	32	-64	128	...
n :	0	1	2	3	4	5	6	...

L'élément de la suite associé au rang 0 est 2. On note $u(0) = 2$. On adoptera la notation indicielle $u_0 = 2$. **Attention !** Comme la numérotation commence à 0, $u_5 = -64$ désigne **le 6ème terme** de la suite. Le terme de rang 5 ou d'indice 5 est le sixième terme.

Exemple 2 : v : -4 ; 2 ; $\dfrac{2}{7}$; -5 ; -2 $\sqrt{3}$; ...

Si on numérote la suite à partir de 1.

v :	-4	2	$\frac{2}{7}$	-5	-2 $\sqrt{3}$	...
n :	1	2	3	4	5	...

L'élément de la suite associé au rang 1 est le nombre -4 : $v_1 = -4$. **Attention !** Comme la numérotation commence à 1, $v_3 = \dfrac{2}{7}$ désigne **le 3ème terme** de la suite.

Définition ▶ Suites numériques

Une suite numérique est une application de $\mathbb{N}$ (ou une partie de $\mathbb{N}$) dans $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} u : \mathbb{N} &\to \mathbb{R} \\ n &\mapsto u(n) = u_n \end{aligned}$$

u_n est donc l'image de l'entier n par u.
A chaque rang n on associe le terme u_n de la suite (u_n) qui lui correspond.

Attention ! Il ne faut pas confondre les notations suivantes :

$\boxed{u_n}$ désigne le terme de la suite de rang n ou d'indice n.

$\boxed{(u_n)}$ désigne toute la suite, c'est-à-dire l'ensemble $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$.

b) Relation par récurrence et relation explicite

Définition ▶ Suite définie par une relation de récurrence

Soit n_0 un entier naturel. Une suite (u_n) est définie par récurrence si, à partir d'un certain rang n_0, tous les termes dont le rang est supérieur ou égal à n_0 s'obtiennent à partir du ou des termes précédents.

Exemples :

- $u_0 = 3$; pour tout $n \geqslant 0, u_{n+1} = u_n \times 2$.
- $u_4 = 1$; pour tout $n \geqslant 5, u_n = n + \dfrac{5}{u_{n-1}}$.
- $u_0 = 5$; $u_1 = -1$; pour tout $n \geqslant 1, u_{n+1} = 5u_n^2 - 3u_{n-1} + 4$.
- Lorsqu'à partir d'un certain rang le terme suivant est dépend (est fonction) du seul terme précédent, alors il existe une fonction f telle que :

$$\begin{cases} u_{n_0} & \text{désigne le premier terme} \\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, & u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Développer les automatismes avec Labomep/wim's ▶ Calcul des termes d'une suite

Exercice 1 : Calcul des premiers termes d'une suite définie par récurrence.
Exercice 2 : Calcul des premiers termes d'une suite définie par récurrence (niveau 2).

Exercice 1 **Exercice 2**

Définition ▶ Suite définie par une relation explicite

Soit n_0 un entier naturel.
On dit qu'une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est définie explicitement si son terme général est une fonction f de n.

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, \quad u_n = f(n)$$

Développer les automatismes avec Labomep/wim's ▶ Autour de la forme explicite d'une suite

Exercice 3 : Ecrire une expression en fonction d'une variable.
Exercice 4 : Calculer des termes d'une suite définie de manière explicite.

Exercice 3 **Exercice 4**

c) Variation d'une suite

Définition ▶ Variations

- Une suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est **croissante** (respectivement **strictement croissante**) si, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \leqslant u_{n+1}$ (respectivement $u_n < u_{n+1}$).
- Une suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est **décroissante** (respectivement **strictement décroissante**) si, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant u_{n+1}$ (respectivement $u_n > u_{n+1}$).
- Une suite qui est croissante (respectivement **strictement croissante**) ou décroissante (respectivement **strictement décroissante**) est dite **monotone (respectivement strictement monotone)**.

Propriété ▶ Méthodes pour déterminer le sens de variation d'une suite

Soit une suite (u_n) définie à partir d'un certain rang n_0 (en général $n_0 = 0$ ou $n_0 = 1$).

1. L'étude du signe de $\mathbf{u_{n+1} - u_n}$ renseigne sur les variations de la suite (u_n) :
   - si, pour tout $n \geq n_0, \mathbf{u_{n+1} - u_n \geqslant 0}$, la suite (u_n) est **croissante**.
   - Si, pour tout $n \geq n_0., \mathbf{u_{n+1} - u_n \leqslant 0}$, la suite (u_n) est **décroissante**.
2. Si la suite est définie par une relation explicite, on peut étudier le sens de variation de la fonction associée.

A titre d'exemple

Exemple 3

Enoncé :

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = -3n + 1 + u_n \end{cases}$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Écrire dans le cours le code Python à compléter de manière ce qu'il retourne le terme u_n, pour tout entier n. Vérifier vos calculs précédents et donner la valeur de u_{50}. Utiliser par exemple la plateforme Jupyter.

Jupyter

3. Etudier les variations de (u_n).

Corrigé :

1. Calcul de u_1, u_2 et u_3.
   - $u_0 = 4$
   - $u_1 = u_{0+1} = -3 \times 0 + 1 + u_0 = 0 + 1 + 4 = 5$
   - $u_2 = u_{1+1} = -3 \times 1 + 1 + u_1 = -3 + 1 + 5 = 3$
   - $u_3 = u_{2+1} = -3 \times 2 + 1 + u_2 = -6 + 1 + 3 = -2$

2. Programmation en Python

Codage en Python

```
def terme_rang_n(N) :
    u=4
    for i in range(N) :
        u=-3*i+1+u
    return u
```

Exécution du programme :

```
>>> terme_rang_n(0)
4
>>> terme_rang_n(1)
5
>>> terme_rang_n(2)
3
>>> terme_rang_n(3)
-2
>>> terme_rang_n(50)
-3621
```

3. Etude de la variation de la suite.

   - Etudions le signe de $u_{n+1}-u_n$.

$$\begin{aligned} u_{n+1}-u_n &= \underbrace{-3n+1+u_n}_{u_{n+1}}-u_n \\ &= -3n+1 \end{aligned}$$

   Donc $u_{n+1}-u_n<0$, dès que $n>\dfrac{1}{3}$, soit dès que $n\geq 1$.
   La suite (u_n) est donc strictement décroissante à partir du rang 1.

A titre d'exemple

Exemple 4

Enoncé :

Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n, par $v_n=5n^2+9n+3$.

1. Calculer v_0, v_1 et v_2.
2. Écrire dans le cours le code Python à compléter, puis le saisir sur la plateforme Jupyter de façon à obtenir la liste des N premiers termes de la suite. Exécuter ce programme pour N=10.
3. Etudier les variations de (v_n).

Corrigé :

Pour tout entier naturel n, $v_n=f(n)$, où f est la fonction définie par $f(x)=5x^2+9x+3$. La suite (v_n) est définie de manière explicite.

1. Calcul de v_0, v_1 et v_2.

   - $v_0=f(0)=5\times 0^2+9\times 0+3=\boxed{3}$
   - $v_1=f(1)=5\times 1^2+9\times 1+3=\boxed{17}$
   - $v_2=f(2)=5\times 2^2+9\times 2+3=\boxed{41}$

2. Programmation en Python

Codage en Python

```
def f(x) :
    return 5*x**2+9*x+3

def suite_explicite(N) :
    l=[]
    for i in range(N) :
        l.append(f(i))
    return l
```

Exécution pour N=10 :
>>> **suite_explicite(10)**
[3, 17, 41, 75, 119, 173, 237, 311, 395, 489]

3. Etude des variations de (v_n).
La fonction $f : x \mapsto 5x^2 + 9x + 3$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x, $f'(x) = 10x + 9$. $f'(x) > 0$ si, et seulement si $x > -\frac{9}{10}$. La fonction f est donc strictement décroissante sur $\left]-\infty; -\frac{9}{10}\right]$ et strictement croissante sur $\left[-\frac{9}{10}; +\infty\right[$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{rcl} 0 \leq n & < & n+1 \\ f(n) & < & f(n+1), \text{car la fonction est strictement croissante sur } [0;+\infty[\\ v_n & < & v_{n+1} \\ v_{n+1} - v_n & > & 0 \end{array}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n > 0$, donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

d) Représentation graphique d'une suite

Graphique ▶ Représentation des termes d'une suite définie par récurrence

Soit (u_n) une suite définie par récurrence. Il existe donc un premier terme de rang n_0, noté u_{n_0}, et une fonction f, tels que :

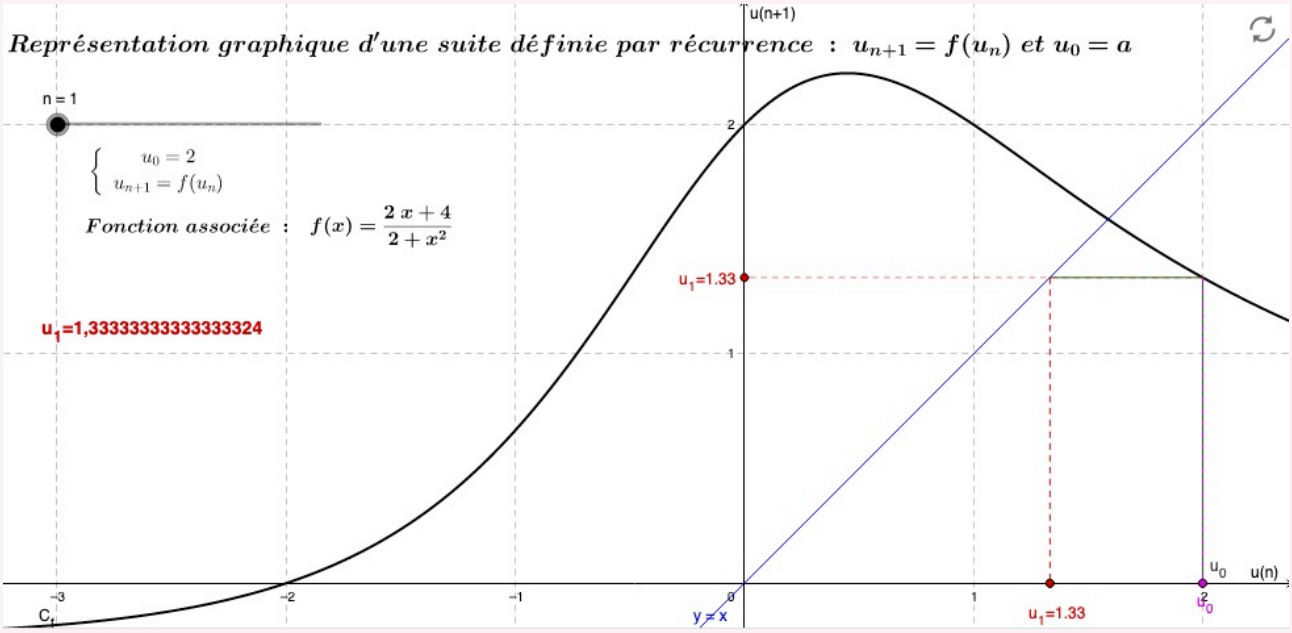
$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

A l'aide de la courbe représentative de la fonction f et de la droite d'équation $y = x$, on peut représenter chaque terme de la suite définie par récurrence par un point sur l'axe des abscisses.

Pour en avoir une illustration, observer l'animation sous Geogebra dans le cas où la suite (u_n) est définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, \quad u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 4}{2 + u_n^2} \end{cases}$$

Animation GeoGebra



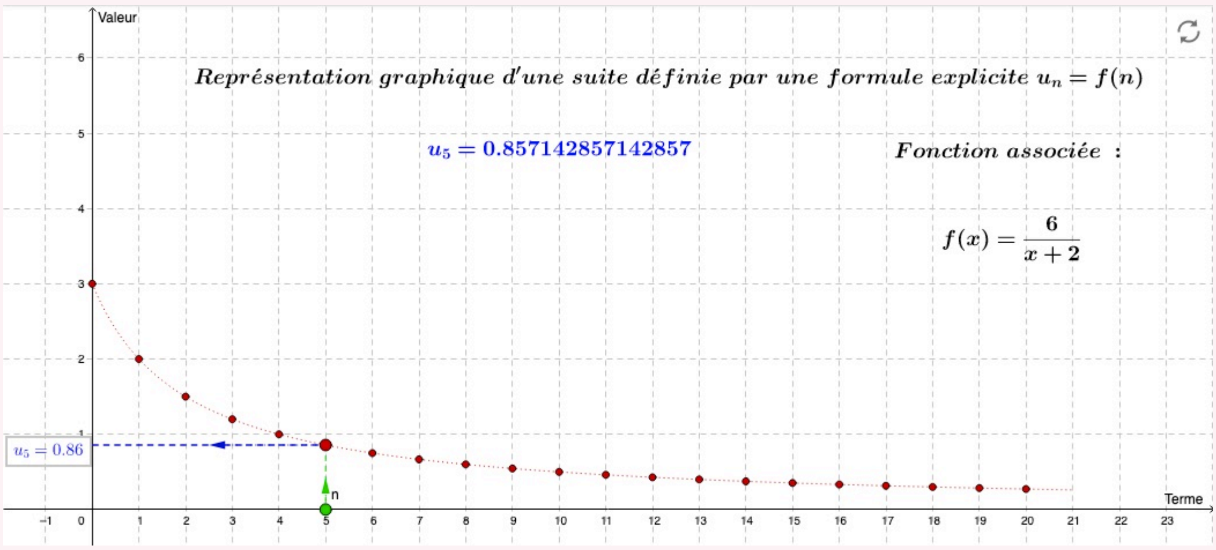
Graphique ► Représentation des termes d'une suite définie explicitement

Soit n_0 un entier naturel et soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^+$; on définit la suite $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ explicitement : Pour tout $n \geqslant n_0, u_{n+1} = f(n)$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0, \quad u_n = f(n)$$

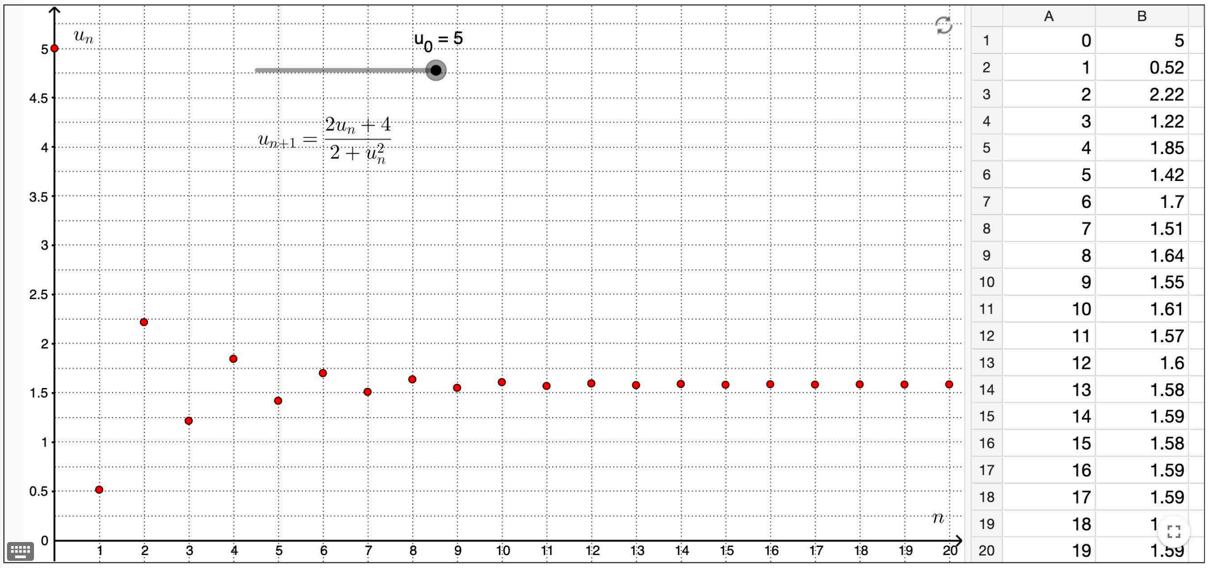
A l'aide de la courbe représentative de la fonction f, on peut représenter chaque terme de la suite définie explicitement par un point du plan de coordonnées $\left(n; \underbrace{f(n)}_{u_n}\right)$, comme illustré sur la figure dans le cas où la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par son terme général $u_n = \dfrac{6}{n+2}$.

Figure animée



Graphique ► Représentation graphique avec un tableur

La suite est définie par la relation de récurrence : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 4}{2 + u_n^2} \end{cases}$



	A	B
1	0	5
2	1	0.52
3	2	2.22
4	3	1.22
5	4	1.85
6	5	1.42
7	6	1.7
8	7	1.51
9	8	1.64
10	9	1.55
11	10	1.61
12	11	1.57
13	12	1.6
14	13	1.58
15	14	1.59
16	15	1.58
17	16	1.59
18	17	1.59
19	18	1[illegible]
20	19	1.59

La colonne A contient le rang n de chacun des termes de la suite, la colonne B les termes u_n de la suite.
Les points représentés ont pour coordonnées (n, u_n).
Ci-joint un lien vers la page dynamique du graphique ci-dessous.

Graphique dynamique

3. Suites arithmétiques

a) Exemples

A titre d'exemple

Exemple 5 : on commence à -4 et on passe d'un terme au suivant en ajoutant la même valeur 1.
$\{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \ldots\}$
Exemple 6 : on commence à 5,7 et on passe d'un terme au suivant en ajoutant la même valeur -0,5.
$\{5.7, 5.2, 4.7, 4.2, 3.7, 3.2, 2.7, 2.2, \ldots\}$

b) Définition par récurrence

Définition ▶ relation de récurrence

Une suite est **arithmétique** si chaque terme se déduit du précédent en lui ajoutant un nombre constant, appelé raison qui est notée r. On commence au rang n_0. Notons a la valeur du premier terme.

$$\begin{cases} u_{n_0} = a \\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, \quad u_{n+1} = u_n + r \end{cases}$$

Par exemple si le premier terme est u_0, on a :

$$u_0 \;;\xrightarrow{+r} u_1 \;;\xrightarrow{+r} u_2 \;;\xrightarrow{+r} u_3 \;;\xrightarrow{+r} \ldots\ldots \;;\xrightarrow{+r} u_{n-1} \;;\xrightarrow{+r} u_n \;;\xrightarrow{+r} u_{n+1} \;;\xrightarrow{+r} \ldots$$

Définition ▶ relation de récurrence et relation fonctionnelle associée

Soit n_0 un nombre entier.
La relation de récurrence d'une suite arithmétique peut s'exprimer à l'aide d'une fonction affine. Cette fonction permet le passage d'un terme de la suite au terme suivant.

$$\begin{cases} u_{n_0} \\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, \quad u_{n+1} = f(u_n) \text{ où } f : x \mapsto x + r \end{cases}$$

Recherche

Exercice 5 : En reprenant les deux exemples précédents, déterminer le premier terme de chaque suite, la relation de récurrence, puis la fonction f qui leur est associée.

Exemple 5

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Exemple 6

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Développer les automatismes avec Labomep/wim's

Exercice 6 : Identifier une suite arithmétique

A titre d'exemple ▶ Générer une suite avec GeoGebra

Exemple 7 :

La suite arithmétique est définie par la relation de récurrence $\begin{cases} u_0 = -4 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + 1 \end{cases}$

Les instructions : ItérationListe(<Expression>, <Variables>, <Valeurs départ>, <Nombre>)

$\left[\begin{array}{l} f(x) := x + 1 \\ \text{IterationListe}(f, -4, 10) \end{array} \right.$ affichent $\boxed{\text{liste1} = \underbrace{\{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}}_{\text{10 valeurs calculées à partir de } -4}}$

Exemple 8 :

La suite arithmétique est définie par la relation de récurrence $\begin{cases} u_1 = 5,7 \\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1, u_{n+1} = u_n - 0,5 \end{cases}$

$\left[\begin{array}{l} g(x) := x - 0.5 \\ \text{IterationListe}(g, 5.7, 8) \end{array} \right.$ affichent $\boxed{\text{liste2} = \underbrace{\{5.7, 5.2, 4.7, 4.2, 3.7, 3.2, 2.7, 2.2\}}_{\text{8 valeurs calculées à partir de 5.7}}}$

A titre d'exemple ▶ Génération d'une suite avec un tableur

Exemple 9 :

La suite arithmétique est définie par la relation de récurrence $\begin{cases} u_0 = -4 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + 1 \end{cases}$

Les cellules A1, B1 et C1 sont étiquetées par n, u_n et Raison.

On saisit en A2 la valeur 0 et on étire vers le bas pour obtenir la première colonne. Dans la cellule B2 on entre la valeur de u_0 c'est-à-dire le nombre -4.

Dans la cellule C2 on entre la valeur de la raison qui vaut 1.

Pour obtenir les éléments de la suite (u_n), on saisit dans la cellule B3, l'instruction $\boxed{\text{=B2+C\$2}}$, ce qui indique que pour obtenir le terme suivant de la suite, on ajoute au terme précédent contenu dans B2 la raison contenue dans C2. On bloque cette dernière cellule à l'aide du symbole \$. Il suffit ensuite d'étirer la cellule B3 vers le bas pour générer la suite.

B3:B21 =B2+C$2

	A	B	C
1	n	u(n)	Raison
2	0	-4	1
3	1	-3	
4	2	-2	
5	3	-1	
6	4	0	
7	5	1	
8	6	2	
9	7	3	
10	8	4	
11	9	5	
12	10	6	
13	11	7	

Exemple 10 :

La suite arithmétique est définie par la relation de récurrence $\begin{cases} u_1 = 5.7 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - 0.5 \end{cases}$

Les cellules A1, B1 et C1 sont étiquetées par n, u_n et Raison.

On saisit en A2 la valeur 1 et on étire vers le bas pour obtenir la première colonne. Dans la cellule B2 on entre la valeur de u_1 c'est-à-dire le nombre 5,7.

Dans la cellule C2 on entre la valeur de la raison qui vaut -0,5.

Pour obtenir les éléments de la suite (u_n), on saisit dans la cellule B3, l'instruction $\boxed{\text{=B2+C\$2}}$, ce qui indique que pour obtenir le terme suivant de la suite, on ajoute au terme précédent contenu dans B2 la raison contenue dans C2. On bloque cette dernière cellule à l'aide du symbole $. Il suffit ensuite d'étirer la cellule B3 vers le bas pour générer la suite.

MOYENNE =B2+C$2

	A	B	C
1	n	u(n)	Raison
2	1	5,7	-0,5
3	2	=B2+C$2	
4	3	4,7	
5	4	4,2	
6	5	3,7	
7	6	3,2	
8	7	2,7	
9	8	2,2	
10	9	1,7	
11	10	1,2	
12	11	0,7	
13	12	0,2	

Algorithme et Python ▶ Génération d'une suite arithmétique

algo10

On souhaite générer un nombre entier N de valeurs d'une suite arithmétique définie par récurrence.

Algorithme :

On saisit le premier terme u.
On saisit la raison r.
On saisit N.
ℓ est une liste vide
Pour I allant de 1 à N
    On ajoute u dans la liste ℓ
$u \leftarrow u + r$
Fin du Pour

Programme en Python (Jupyter) :

Dans une liste vide, on va entrer un à un les N termes de la suite.

Codage en Python

```
def suitearithm(u,r,N) :
# u est le premier terme
# r est la raison
# N est le nombre de termes
#création d'une liste vide
    l=[]
    for i in range(N) :
        l.append(u)
        u=u+r
    return l
```

Une fois exécuté avec les valeurs des exemples 1 et 2, le programme donne :

>>> **suitearithm(-4,1,10)**
$[\mathbf{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5}]$
>>> **suitearithm(5.7,-0.5,8)**
$[\mathbf{5.7, 5.2, 4.7, 4.2, 3.7, 3.2, 2.7, 2.2}]$

c) Relation explicite

Propriété ▶ relation explicite

Relation explicite pour une suite arithmétique : soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite arithmétique de raison r.

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$.
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_1 + (n-1)r$.
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_2 + (n-2)r$.
- etc...

Plus généralement, on a la formule importante suivante :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, u_n = u_p + (n-p)r.}$$

On peut alors, à l'aide de la forme explicite, calculer facilement les termes de chaque rang de la suite (u_n).

A titre d'exemple

Exemple 11 :

La suite arithmétique est définie par la relation de récurrence $\begin{cases} u_0 = -4 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + 1 \end{cases}$

Sa forme explicite est donc :

$$\begin{aligned} u_n &= \underbrace{u_0}_{-4} + n\underbrace{r}_{1} \\ &= -4 + n \\ &= n - 4 \end{aligned}$$

Calculons par exemple le 11ème terme de la suite (u_n). Comme le premier terme est u_0, alors le le 11ème terme est u_{10}.

$$\boxed{u_{10} = 10 - 4 = 6}$$

Exemple 12 :

La suite arithmétique est définie par la relation de récurrence $\begin{cases} u_1 = 5,7 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - 0,5 \end{cases}$

Sa forme explicite est donc :

$$\begin{aligned} u_n &= \underbrace{u_1}_{5,7} + (n-1)\underbrace{r}_{-0,5} \\ &= 5,7 + (n-1) \times (-0,5) \\ &= 5,7 - 0,5n + 0,5 \\ &= 6,2 - 0,5n \\ &= -0,5n + 6,2 \end{aligned}$$

Calculons par exemple le 7ème terme de la suite (u_n). Comme le premier terme est u_1, alors le le 7ème terme est u_7.

$$\boxed{u_7 = -0,5 \times 7 + 6,2 = 2,7}$$

Développer les automatismes avec Labomep/wim's ▶ Suites arithmétiques

Exercice 7 : Terme général d'une suite arithmétique
Exercice 8 : Nature et terme général d'une suite arithmétique
Exercice 9 : Nature, terme général et calcul d'un terme d'une suite arithmétique

Exercice 7 **Exercice 8** **Exercice 9**

Recherche

Exercice 10 : Savoir déterminer la raison et le premier terme de la suite arithmétique connaissant deux de ses éléments et leur rang associé.

Déterminer la raison et le premier terme de la suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\begin{cases} u_5 = 7 \\ u_9 = 19 \end{cases}$

Pour vous aider, une vidéo d'Yvan Monka.

Exercice 11 : Savoir déterminer le nombre de termes d'une suite d'éléments d'un ensemble fini qui suivent une progression arithmétique.
Déterminer le nombre de termes de l'ensemble suivant : $E = \{117, 124, 131, 138, \ldots, 551, 558, 565\}$.
Pour vous aider, cette vidéo.

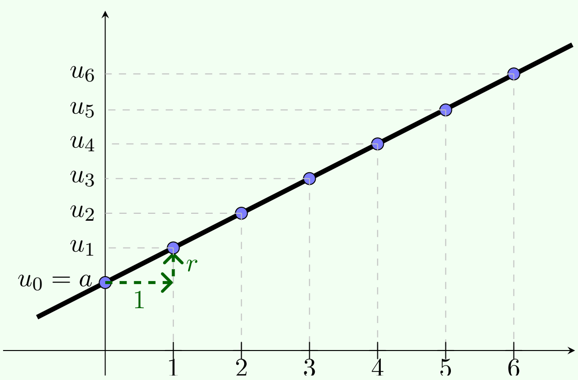
Exercice 10 **Exercice 11**

d) Représentation graphique

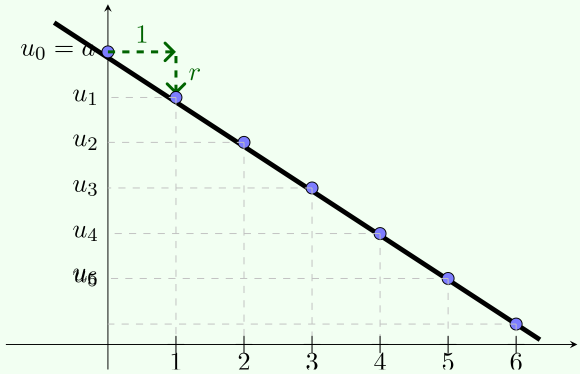
Propriété

La suite arithmétique de premier terme égal à a et de raison r est représentée par des points alignés sur la droite d'équation $y = rx + a$.

Pour cette raison, on dit qu'une suite arithmétique traduit une **croissance linéaire** ou une **décroissance linéaire**, selon si la raison r est positive ou négative :



$r > 0$: **croissance linéaire**

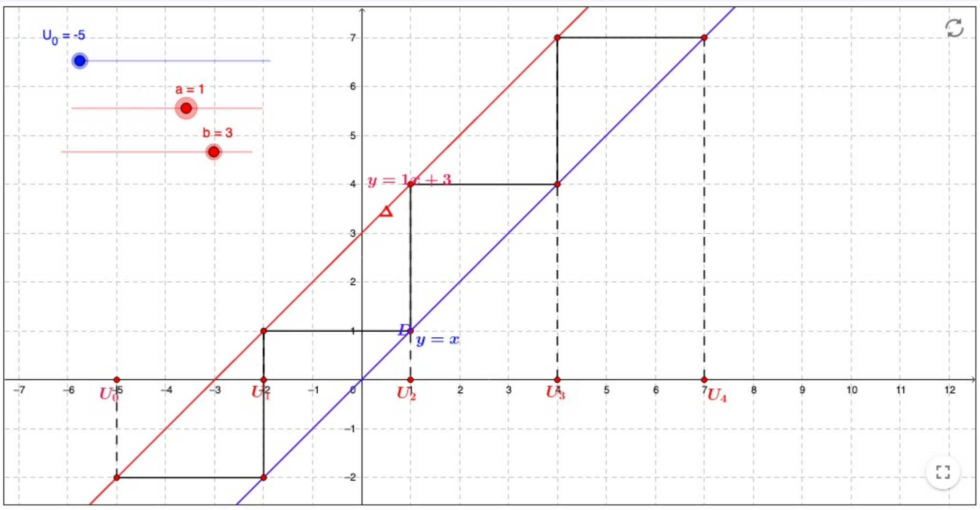


$r < 0$: **décroissance linéaire**

A partir de la relation de récurrence

A titre d'exemple

Exemple 13 : Soit $(v_n)_{n\geqslant 0}$ la suite arithmétique définie par $\begin{cases} u_0 = -5 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + 3 \end{cases}$



Représenter graphiquement la suite en vous aidant de ce lien ou du QRcode.

Les éléments de la suite apparaissent sur l'axe des abscisses.

A partir de la relation explicite

Il est plus facile de travailler avec une suite exprimée sous la forme explicite. **La représentation graphique d'une suite arithmétique est un alignement de points**. Voilà comment l'obtenir avec différentes applications.

A titre d'exemple ▶ Avec Geogebra

Exemple 14 : On saisie dans la ligne dédiée de GeoGebra l'instruction :

Séquence(< Expression e >, < Variable k >, < de a >, < à b >, < pas p >)

Reprenons la suite définie dans **l'exemple 9**.

Dans cet exemple, la forme explicite du terme général est donnée par :

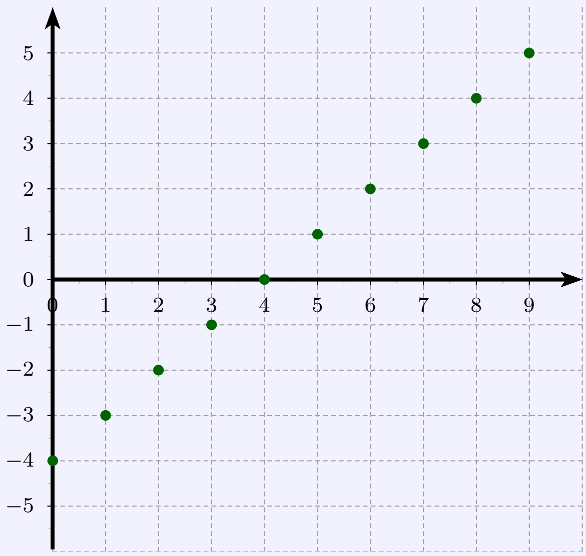
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n - 4.$$

Dans la ligne de saisie on écrit :
$L =$ séquence$((k, k-4), k, 0, 9, 1)$.

On obtient alors une représentation graphique des éléments de la suite avec l'ensemble des 10 points d'abscisse k et d'ordonnée u_k pour $k \in [\![0, 9]\!]$.

Mais si dans la ligne de saisie on écrit :
$L =$ séquence$(k-4, k, 0, 9, 1)$, on obtient la suite des éléments :

liste1 $= \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$



A titre d'exemple ▶ Avec Xcas

Exemple 15 : reprenons la suite définie dans **l'exemple 10**.

```
1 u(n):=-0.5*n+6.2 // Forme explicite de la suite
```

$$n \to -0.5 \cdot n + 6.2$$

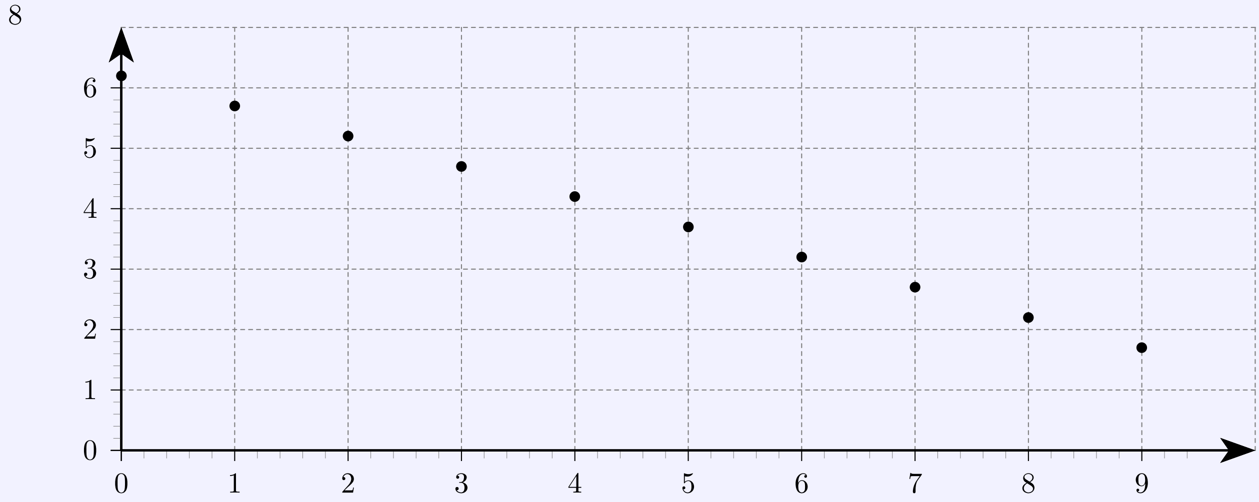
```
2 x_n:=seq(n,n,0,9) // les abscisses x_n des 10 points
```

$$[0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]$$

```
3 u_n:=seq(u(n),n,0,9) // les valeurs des termes de la suite (u_n)
```

$$[6.2, 5.7, 5.2, 4.7, 4.2, 3.7, 3.2, 2.7, 2.2, 1.7]$$

```
4 scatterplot(x_n,u_n) // placement des points de coordonnées (x_n,u_n)
```



e) Sens de variation d'une suite arithmétique

Propriété ▶ variations d'une suite arithmétique

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.

- Si $r < 0$, la suite (u_n) est strictement décroissante.
- Si $r = 0$, la suite (u_n) est constante et est toujours égale à son premier terme.
- Si $r > 0$, la suite (u_n) est strictement croissante.

Recherche

Exercice 12 : Déterminer le sens de variation des suites définies ci-dessous.

- $(u_n)_{n \geqslant 0}$ arithmétique de premier terme -5 et de raison 2,5.
- $(u_n)_{n \geqslant 0}$ arithmétique de premier terme $2,5$ et de raison -5.

f) Somme finie des éléments d'une suite arithmétique

Recherche

Exercice 13 : Calculer la somme $S = 1 + 2 + 3 + \ldots + 100$.

Exercice 14 : Calculer la somme $S = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$, pour tout entier naturel n.

Pour vous aider, une vidéo d'Yvan Monka .

Propriété ▶ Somme finie

La somme de plusieurs termes consécutifs d'une suite arithmétique est donnée par la formule :

$$S = (\text{nombre de termes}) \times \left[\frac{(1^{\text{er}}\ \text{terme}) + (\text{dernier terme})}{2}\right]$$

A titre d'exemple

Exemple 16 : soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite arithmétique de premier terme -5 et de raison 3. On a alors :

$u_1 = -2$; $u_2 = 1$; $u_3 = 4$; $u_4 = 7$; $u_5 = 10$; $u_6 = 13$; etc.
$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_2 + 3(n-2) = 1 + 3n - 6$; on obtient donc $u_n = -5 + 3n$, d'où sa forme explicite :
$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3n - 5$.

Rappel sur la notation "somme" : $S = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} u_i$

On souhaite calculer $\displaystyle\sum_{i=0}^{24} u_i$:

- C'est la somme des 25 premiers termes ;
- le premier terme est $u_0 = -5$ et le dernier terme est $u_{24} = -5 + 3 \times 24 = 67$

$$\text{Ainsi } \sum_{i=0}^{24} u_i = 25 \times \left(\frac{-5+67}{2}\right) = 775.$$

On souhaite calculer $\displaystyle\sum_{i=13}^{51} u_i$:

- C'est la somme de 39 termes ;
- le premier terme est $u_{13} = -5 + 3 \times 13 = 34$ et le dernier terme est $u_{51} = -5 + 3 \times 51 = 148$

$$\text{Ainsi : } \sum_{i=13}^{51} u_i = 39 \times \left(\frac{34+148}{2}\right) = 3\ 549.$$

Développer les automatismes avec Labomep/wim's ▶ Somme des termes d'une suite arithmétique

Exercice 15 **:** Somme des termes d'une suite arithmétique

Algorithme et Python ▶ Somme finie des termes d'une suite arithmétique

On souhaite effectuer la somme de N termes d'une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_k. On renseigne le premier terme u_k, la raison r et le nombre de termes N consécutifs à sommer.

Algorithme :

$S \leftarrow 0$
Pour I allant de 0 à N-1
    $S \leftarrow S + u$
    $u \leftarrow u + r$
Fin du Pour

Programme en Python (Jupyter) :

Codage en Python

```python
def sommearithm(u,r,N) :
# u est le premier terme
# r est la raison
# N est le nombre de termes
    S=0 # initialisation de la somme à 0
    for i in range(N) :
        S=S+u
        u=u+r
    return S
```

La somme des 100 premiers nombres entiers naturels non nuls vaut 5050.
Celle des 50 termes consécutifs de la suite arithmétique de raison 2 et dont le premier terme est -10 vaut 1950.

```
>>> sommearithm(1,1,100)
5050
>>> sommearithm(-10,2,50)
1950
```

4. Suites géométriques

a) Exemples

A titre d'exemple

Exemple 17 : on commence à 2 et on passe d'un terme au suivant en multipliant par la même valeur : 3.
$\{2, 6, 18, 54, 162, 486, 1\,458, 4\,374, \ldots\}$
Exemple 18 : on commence à 5 et on passe d'un terme au suivant en multipliant par la même valeur : $\frac{1}{2}$.
$\{5, 2.5, 1.25, 0.625, 0{,}312\,5, 0{,}156\,25, 0{,}078\,125, 0{,}039\,062\,5, 0{,}019\,531\,25, \ldots\}$

b) Relation de récurrence

Définition ▶ relation de récurrence

Une suite est **géométrique** si chaque terme se déduit du précédent en le multipliant par un nombre constant appelé raison qui est notée q. On commence au rang n_0. Notons a la valeur du premier terme.

$$\begin{cases} u_{n_0} = a \\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, \quad u_{n+1} = u_n \times q \end{cases}$$

Par exemple, si la suite géométrique a pour premier terme u_0, on obtient :

$$u_0 \;;\; u_1 \;;\; u_2 \;;\; u_3 \;;\; \ldots\ldots \;;u_{n-1} \;;\; u_n \;;u_{n+1} \;;\; \ldots$$

$$u_0 \xrightarrow{\times q} u_1 \xrightarrow{\times q} u_2 \xrightarrow{\times q} u_3 \xrightarrow{\times q} \quad \xrightarrow{\times q} u_{n-1} \xrightarrow{\times q} u_n \xrightarrow{\times q} u_{n+1} \xrightarrow{\times q}$$

Définition ▶ relation de récurrence et relation fonctionnelle associée

La relation de récurrence d'une suite géométrique peut aussi d'exprimer à l'aide d'une fonction linéaire. Cette fonction permet le passage d'un terme de la suite au terme suivant.

$$\begin{cases} u_{n_0} = a \\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, \quad u_{n+1} = f(u_n) \text{ où } f : x \mapsto q \times x \end{cases}$$

Recherche

Exercice 16 : En reprenant les deux exemples précédents, déterminer le premier terme de chaque suite, la relation de récurrence, puis la fonction f qui leur est associée.

Exemple 17 :

....
....
....
....
....
....
....
....
....

Exemple 18 :

....
....
....
....
....
....
....
....
....

Développer les automatismes avec Labomep/wim's

Exercice 17 : Identifier une suite géométrique

A titre d'exemple ▶ Génération d'une suite, définie par récurrence, avec GeoGebra

Exemple 19 : La suite géométrique est définie par la relation de récurrence $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n \end{cases}$

Les instructions : IterationListe(<Expression>, <Variables>, <Valeurs départ>, <Nombre>)

$\left[\begin{array}{l} f(x) := 3x \\ \text{IterationListe}(f, 2, 10) \end{array}\right.$ affichent $\boxed{\text{liste1} = \underbrace{\{2, 6, 18, 54, 162, 486, 1\,458, 4\,374, 13\,122, 39\,366\}}_{\text{10 valeurs calculées à partir de 2}}}$

Exemple 20 :

La suite géométrique est définie par la relation de récurrence $\begin{cases} u_1 = 5 \\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1, u_{n+1} = 0.5u_n \end{cases}$

$\left[\begin{array}{l} g(x) := 0.5 * x \\ \text{IterationListe}(g, 5, 8) \end{array}\right.$ affichent $\boxed{\text{liste2} = \underbrace{\{5, 2.5, 1.25, 0.625, 0{,}312\,5, 0{,}156\,25, 0{,}078\,125, 0{,}039\,062\,5\}}_{\text{8 valeurs calculées à partir de 5}}}$

A titre d'exemple ▶ Génération d'une suite, définie par récurrence, avec un tableur

On utilise le tableur de GeoGebra pour d'une part générer les éléments de la suite de **l'exemple 19** qui est définie par récurrence, puis pour représenter graphiquement la suite par un nuage de points.
Exemple 21 : Voir la vidéo
Exemple 22 : En vous inspirant de la vidéo ci-dessus, générer les éléments de la suite de **l'exemple 20**, puis représenter graphiquement la suite par un nuage de points.

Algorithme et Python ▶ Génération d'une suite géométrique

On souhaite générer un nombre entier N de valeurs d'une suite géométrique définie par récurrence.

Algorithme :
On saisit le premier terme u.
On saisit la raison q
On saisit N
ℓ est une liste vide
Pour I allant de 1 à N
  On ajoute u dans la liste ℓ
$u \leftarrow q * u$
Fin du Pour

Programme en Python (Jupyter) :
Dans une liste vide, on va entrer un à un les N termes de la suite.

Codage en Python

```
def suitegeom(u,q,N) :
# u est le premier terme
# q est la raison
# N est le nombre de termes
#création d'une liste vide
    l=[]
    for i in range(N) :
        l.append(u)
        u=q*u
    return l
```

Une fois exécuté avec les valeurs des exemples 1 et 2, le programme donne :

```
>>> suitegeom(2,3,10)
[2, 6, 18, 54, 162, 486, 1458, 4374, 13122, 39366]
>>> suitegeom(5,0.5,9)
[5, 2.5, 1.25, 0.625, 0.3125, 0.15625, 0.078125, 0.0390625, 0.01953125]
```

c) Augmentation et diminution exprimées en pourcentage

Propriété ▶ Coefficient multiplicateur

Rappels :

- Augmenter une grandeur de $p\,\%$ revient à la multiplier par $1+\dfrac{p}{100}$.
- Diminuer une grandeur de $p\,\%$ revient à la multiplier par $1-\dfrac{p}{100}$.

Une succession d'augmentations (resp. de diminutions) d'un même pourcentage $p\,\%$ peut être modélisée par une suite géométrique de raison $1+\dfrac{p}{100}$ $\left(\text{resp.} 1-\dfrac{p}{100}\right)$.

Exemples :

1. Par exemple, si les émissions de CO_2 augmentent chaque année de $3\,\%$ (le coefficient multiplicateur est alors égal à $1+\dfrac{3}{100}=1,03$) on peut modéliser la masse des émissions de l'année n par la suite u_n définie par la relation : $u_{n+1}=u_n\times 1,03$. La suite (u_n) est géométrique de raison $1,03$.
2. Un T-shirt soldé voit son prix diminuer chaque jour de $2,5\,\%$, ce qui correspond à un coefficient multiplicateur égal à $1-\dfrac{2,5}{100}=0,975$; en notant v_n le prix du T-shirt au bout de n jours de soldes, on a la relation : $v_{n+1}=v_n\times 0,975$. La suite (v_n) est géométrique de raison $0,975$.

Recherche

Exercice 18 : Une société de vente en ligne a vendu 10 000 consoles de jeux vidéo en 2021. En se basant sur les évolutions du marché, les responsables font l'hypothèse qu'à partir de l'année 2021, les ventes vont diminuer de $4\,\%$ par an.

On note v_n le nombre de consoles vendues par cette société lors de l'année $2021+n$.

Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n ; que peut-on dire de cette suite ?

d) Relation explicite

Propriété ▶ relation explicite

Relation explicite pour une suite géométrique : soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite géométrique de raison q.
• $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=u_0\times q^n$; • $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=u_1\times q^{n-1}$; • $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=u_2\times q^{n-2}$; • etc...

Plus généralement, on a la formule importante suivante :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}, \forall p\in\mathbb{N}, u_n=u_p\times q^{n-p}.}$$

La forme explicite permet l'obtention rapide des termes de chaque rang de la suite (u_n).

A titre d'exemple

Exemple 23 :

La suite géométrique est définie par la relation de récurrence $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3 \times u_n \end{cases}$

Sa forme explicite est donc :

$$\begin{aligned} u_n &= \underbrace{u_0}_{2} \times \underbrace{q^n}_{3^n} \\ &= 2 \times 3^n \end{aligned}$$

Calculons par exemple le 5ème terme de la suite (u_n). Comme le premier terme est u_0, alors le le 5ème terme est u_4. $\boxed{u_4 = 2 \times 3^4 = 162}$

Exemple 24 :

La suite géométrique est définie par la relation de récurrence $\begin{cases} u_1 = 5 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 0,5u_n \end{cases}$

Sa forme explicite est donc :

$$\begin{aligned} u_n &= \underbrace{u_1}_{5} \times \underbrace{q^{n-1}}_{0{,}5^{n-1}} \\ &= 5 \times 0,5^{n-1} \end{aligned}$$

Calculons par exemple le 7ème terme de la suite (u_n). Comme le premier terme est u_1, alors le le 7ème terme est u_7. $\boxed{u_7 = 5 \times 0,5^6 = 0{,}078125}$

Développer les automatismes avec Labomep/wim's

Exercice 19 : Nature, terme général et calcul d'un terme d'une suite géométrique
Exercice 20 : Terme général d'une suite géométrique

Exercice 19 **Exercice 20**

Recherche

Exercice 21 : Savoir déterminer la raison et le premier terme de la suite arithmétique connaissant deux de ses éléments et leur rang associé

Déterminer la raison et le premier terme de la suite géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\begin{cases} u_7 = 16 \\ u_4 = 2 \end{cases}$

Pour vous aider, une vidéo d'Yvan Monka.

e) Représentation graphique

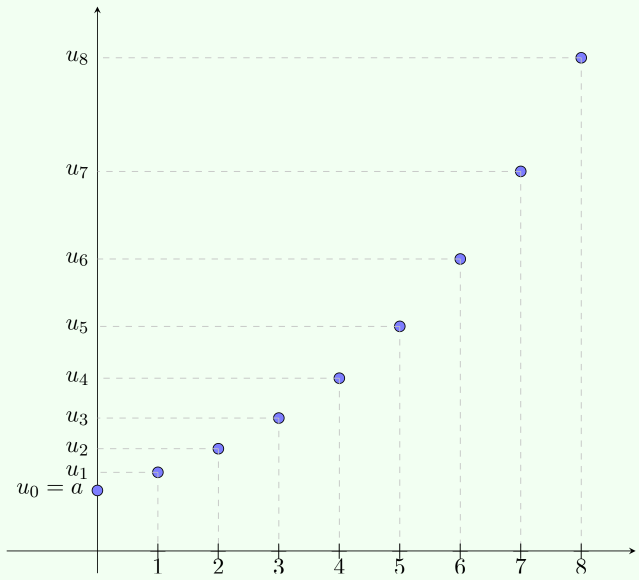
Propriété

La suite géométrique de premier terme $u_0 = a > 0$ et de raison $q > 1$ est croissante ; cela signifie que chaque terme est plus grand que le précédent.

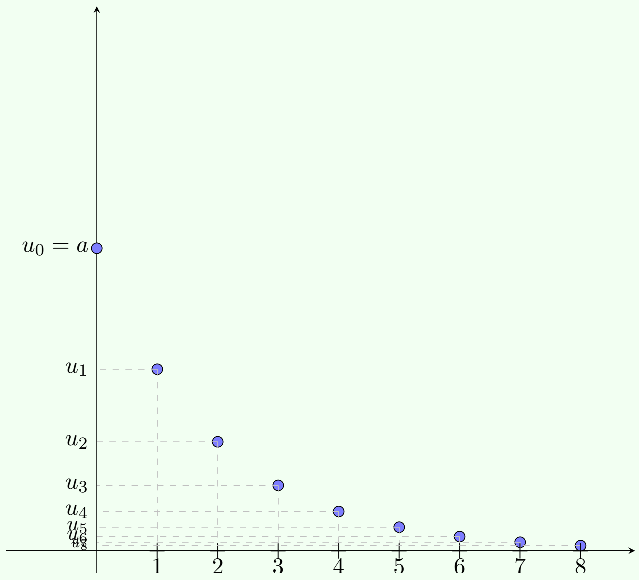
On passe d'un terme au suivant en multipliant par le même nombre $q > 1$: ce phénomène est qualifié de **croissance exponentielle**.

La suite géométrique de premier terme $u_0 = a > 0$ et de raison $0 < q < 1$ est décroissante ; cela signifie que chaque terme est plus petit que le précédent.

On passe d'un terme au suivant en multipliant par le même nombre q compris entre 0 et 1 : ce phénomène est qualifié de **décroissance exponentielle**.



cas où la raison est supérieure à 1



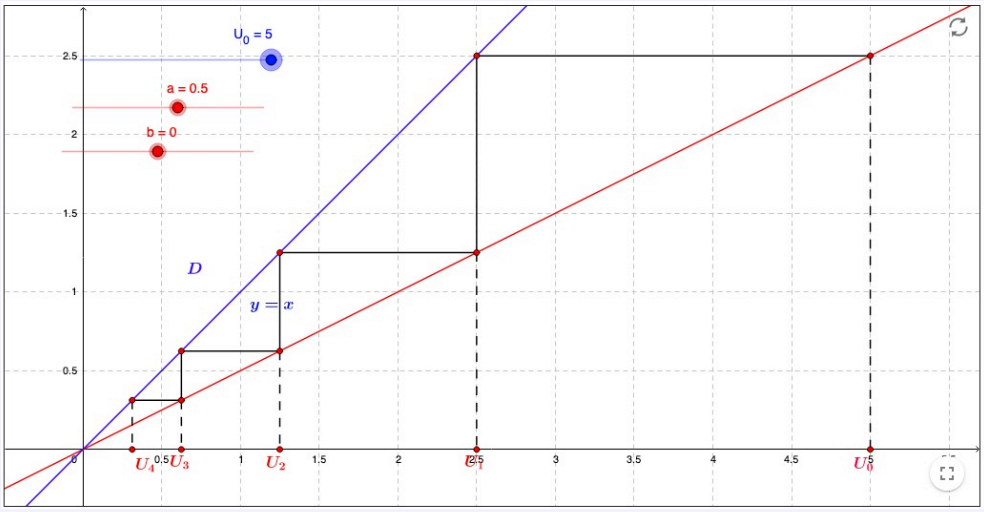
cas où la raison est inférieure à 1

A partir de la relation de récurrence

A titre d'exemple ▶ Suite géométrique définie par récurrence et $0 < q < 1$

Exemple 25 :

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 0.5 * u_n \end{cases}$$

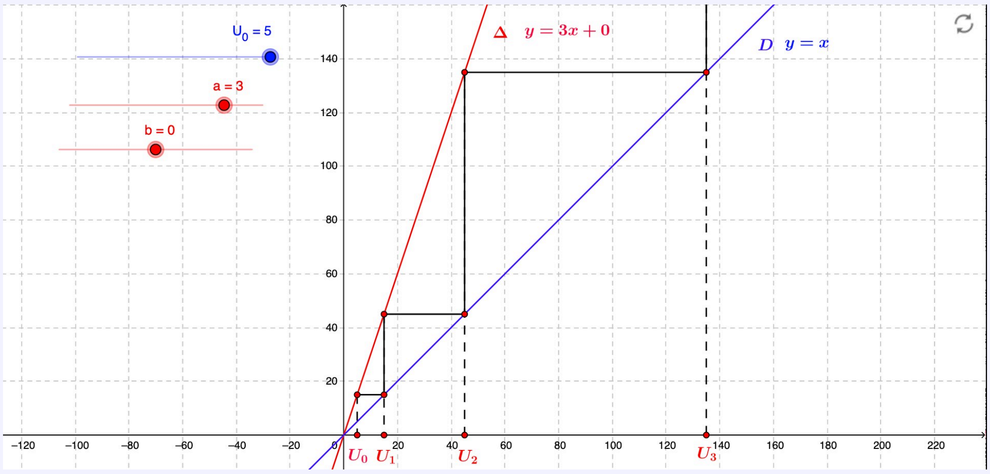


Les éléments de la suite apparaissent sur l'axe des abscisses.

Pour effectuer différentes simulations suivre le lien ou scanner le QR code ci-après. .

A titre d'exemple ► Suite géométrique définie par récurrence et $q > 1$

Exemple 26 :
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3 * u_n \end{cases}$$



A partir de la relation explicite

A titre d'exemple 1 ► Avec GeoGebra

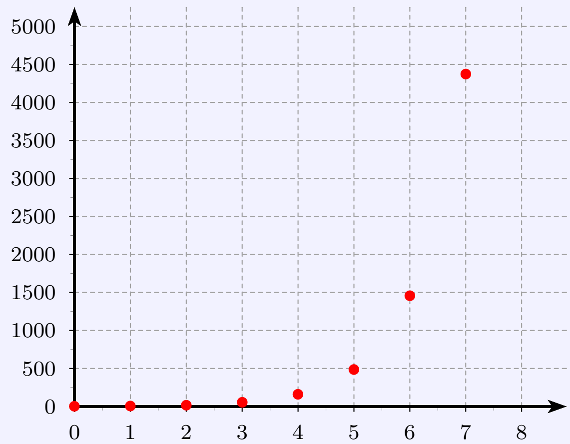
Exercice 22 : soit $(u_n)_{n \geqslant 0}$ la suite géométrique définie par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3 \times u_n \end{cases}$

Rappelons la forme explicite du terme général : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2 \times 3^n$.

Dans la ligne de saisie on écrit :
$L =$ séquence$((k, 2 * 3^k), 0, 7)$.
On obtient alors une représentation graphique des éléments de la suite avec l'ensemble des 8 points d'abscisse k et d'ordonnée u_k pour $k \in [\![0, 7]\!]$.

Mais si dans la ligne de saisie on écrit :
$L =$ séquence$(2 * 3^k, k, 0, 7)$, on obtient les 8 premiers éléments de la suite :

liste1 $= \{2, 6, 18, 54, 162, 486, 1\,458, 4\,374\}$



A titre d'exemple ▶ Avec Xcas

Exercice 23 : soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite géométrique définie par $\begin{cases} u_1 = 5 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 0.5 * u_n \end{cases}$

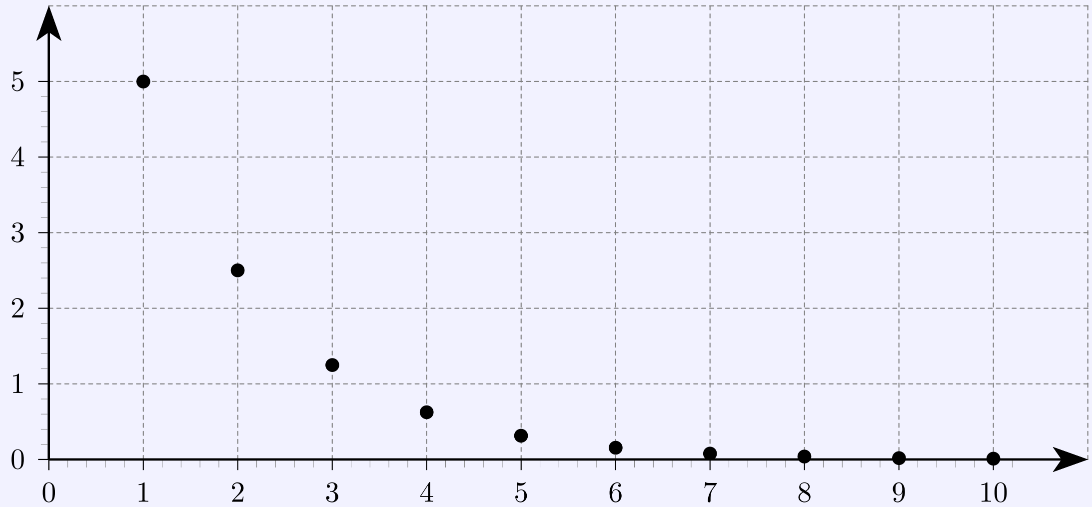
$\boxed{1}$ `n_k:=seq(k,k,1,10) // Liste des indices n de la suite (abscisses des points)`

$$[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]$$

$\boxed{2}$ `u_k:=seq(5*0.5^(k-1),k,1,10) // liste des termes u(k) de la suite (ordonnées des points)`

$$[5.0, 2.5, 1.25, 0.625, 0.3125, 0.15625, 0.078125, 0.0390625, 0.01953125, 0.009765625]$$

$\boxed{3}$ `scatterplot(n_k,u_k)`



f) Sens de variation d'une suite géométrique

Recherche

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison q, avec $q \neq 0$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = q^n$$

Observer les variations de la suite (q^n) en faisant varier la raison q sur geogebra.

Voici le QR code associé au document geogebra :

Théorème ▶ Variations de q^n

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison q, avec $q \neq 0$. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = q^n$$

- Si $q < 0$, alors la suite (q^n) n'est ni croissante, ni décroissante. On dit que la suite est alternée (le terme suivant un terme positif est négatif, et le terme suivant un terme négatif est positif).

- Si $0 < q < 1$, la suite (q^n) est strictement décroissante.
- Si $q = 1$, la suite (q^n) est constante et est toujours égale à son premier terme.
- Si $q > 1$, la suite (q^n) est strictement croissante.

Théorème ▶ Variations de $u_k q^n$

Soit $k \in \mathbb{N}$. Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_k et de raison q.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant k,\ u_n = u_k q^{n-k}$$

- **1er cas :** $u_k = 0$, alors la suite est identiquement nulle, c'est-à-dire que : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq k, u_n = 0$.

- **2ème cas :** $u_k > 0$
  - Si $q < 0$ alors la suite (u_n) n'est ni croissante, ni décroissante. On dit qu'elle est alternée.
  - Si $0 < q < 1$, la suite (u_n) est strictement décroissante.
  - Si $q = 1$, la suite (u_n) est constante et est égal à son premier terme.
  - Si $q > 1$, la suite (u_n) est strictement croissante.

- **3ème cas :** $u_k < 0$
  - Si $q < 0$ alors la suite (u_n) n'est ni croissante, ni décroissante. On dit qu'elle est alternée.
  - Si $0 < q < 1$, la suite (u_n) est strictement croissante.
  - Si $q = 1$, la suite (u_n) est constante et est égal à son premier terme.
  - Si $q > 1$, la suite (u_n) est strictement décroissante.

Vous trouverez , ici, une vidéo d'Yvan Monka explicative mais vous pouvez aussi scanner le QR code.

Recherche

Exercice 24 : Déterminer le sens de variation des suites définies ci-dessous :

- $(u_n)_{n \geqslant 0}$ géométrique de premier terme $1,5$ et de raison 3.
- $(u_n)_{n \geqslant 0}$ géométrique de premier terme $1,5$ et de raison -2.
- $(u_n)_{n \geqslant 0}$ géométrique de premier terme -2 et de raison $1,5$.

g) Somme finie des éléments d'une suite géométrique

Propriété ► Somme finie

La somme de plusieurs termes consécutifs d'une suite géométrique non constante (c'est-à-dire de raison $q \neq 1$) est donnée par la formule :

$$\boxed{S = (\text{premier terme}) \times \left(\frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1-q} \right)}$$

Corollaire

Pour tout entier naturel n et pour tout réel $q \neq 1$, on a :

$$\boxed{S = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$$

On reconnaît une suite géométrique de premier terme 1 et de raison q.

A titre d'exemple

Exemple 27 : Soit $(u_n)_{n \geqslant 0}$ la suite géométrique de premier terme 128 et de raison $\frac{1}{4}$. On a alors :

$u_1 = 32$; $u_2 = 8$; $u_3 = 2$; $u_4 = \frac{1}{2}$; $u_5 = \frac{1}{8}$; $u_6 = \frac{1}{32}$; etc.

Forme explicite :
On peut utiliser la formule :
$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 q^n = 128 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{128}{4^n}$, ou la formule :
$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_1 \times q^{n-1} = 32 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \frac{32}{4^{n-1}}$; en multipliant numérateur et dénominateur par 4, on retrouve la formule $\frac{128}{4^n}$.

Calcul de différentes sommes :

- On souhaite calculer $\displaystyle\sum_{i=0}^{24} u_i$:
  - C'est la somme de 25 termes ;
  - le premier terme est $u_0 = 128$.
  - Calcul de la somme :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{24} u_i &= 128 \times \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{25}}{1-\frac{1}{4}} \\
&= 128 \times \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{25}}{\frac{3}{4}} \\
&= 128 \times \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{25}}{\frac{3}{4}} \\
&= 128 \times \frac{4}{3} \times \left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{25}\right] \\
&= \frac{512}{3} \simeq 170.67
\end{aligned}$$

- On souhaite calculer $\sum_{i=13}^{51} u_i$:
  - C'est la somme de 39 termes ;
  - le premier terme est $u_{13} = 128 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{13}$.
  - $\sum_{i=13}^{51} u_i = 128 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{13} \times \dfrac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{39}}{1-\frac{1}{4}} \simeq 2.5 \times 10^{-6}$.

Développer les automatismes avec Labomep/wim's

Exercice 25 : Somme des termes d'une suite géométrique

Exercice 25

Recherche

Exercice 26 : Déterminer $S = \sum_{i=1}^{5} 3^i$. Pour vous aider, vous pouvez suivre ce lien.

Exercice 27 : Soit $(v_n)_{n \geqslant 0}$ la suite géométrique de premier terme 18 et de raison 1,1.

Donner sa relation explicite, puis calculer $\sum_{i=5}^{30} v_i$.

Exercice 26

Algorithme et Python ▶ Somme finie des termes d'une suite géométrique

On souhaite effectuer la somme de N termes d'une suite géométrique de raison q et de premier terme u_k. On renseigne le premier terme u_k, la raison q et le nombre de termes N consécutifs à sommer.

Algorithme :

$S \leftarrow 0$
Pour I allant de 0 à N-1
  $S \leftarrow S + u$
  $u \leftarrow q \times u$
Fin du Pour

Programme en Python (Jupyter) :

Codage en Python

```python
def sommegeom(u,q,N) :
# u est le premier terme
# q est la raison
# N est le nombre de termes
    S=0 # initialisation de la somme à 0
    for i in range(N) :
        S=S+u
        u=q*u
    return S
```

```
>>> sommegeom(128,0.25,25)
170.6666666666666
>>> sommegeom(128*0.25**13,0.25,39)
2.5431315104166665e-06
```

Recherche

Exercice 27 : Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont définies ci-dessous.
Pour chacune d'elles, préciser s'il s'agit d'une suite arithmétique ou géométrique, et préciser éventuellement sa raison.

• $u_0 = -3$ • $u_{n+1} = u_n - 4$	• $v_0 = 3$ • $v_{n+1} = v_n + n$	• $w_0 = 3$ • $w_{n+1} = 5w_n$	• $y_0 = 1$ • $y_{n+1} = 4^{y_n}$

Exercice 28 : On considère la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ w_n = n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6) + n.$$

1. Déterminer les cinq premiers termes de la suite.
2. Quelle conjecture peut-on faire ?
3. Calculer w_7. Que peut-on dire de la conjecture précédente ?

Exercice 29 :

1. a) Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{10} k$.

   b) Combien y aurait-il de boules de billard si la figure comportait 10 rangées ?

2. a) Exprimer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k$ en fonction de n.

   b) En arrangeant les boules de billard comme sur le dessin, combien de rangées obtient-on avec 1 653 boules ?

Exercice 30 : Pour stocker des fichiers photos numériques, on peut utiliser des algorithmes de compression pour réduire la taille du fichier. On estime qu'à chaque niveau de compression, la taille du fichier diminue de 21,4 %.
On considère un fichier de taille initiale $T_0 = 689$ et, pour tout entier naturel non nul n, T_n désigne la taille de ce fichier après une compression de niveau n.

1. Déterminer T_1.
2. Exprimer T_{n+1} en fonction de T_n.
3. En déduire la nature de la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Déterminer l'expression du terme général T_n.
5. Déterminer la taille du fichier après une compression de niveau sept.

Exercice 31 :

On pose un premier grain de riz sur la première case d'un échiquier, deux grains de riz sur la deuxième case, quatre grains de riz sur la troisième case, huit grains de riz sur la quatrième case, etc...
On continue en doublant le nombre de grains de riz d'une case à la suivante.
Combien y a-t-il de grains de riz sur la septième case ? Sur l'échiquier tout entier ?