Sommaire

Chapitre VI

Compléments dérivation

1. Histoire des Mathématiques

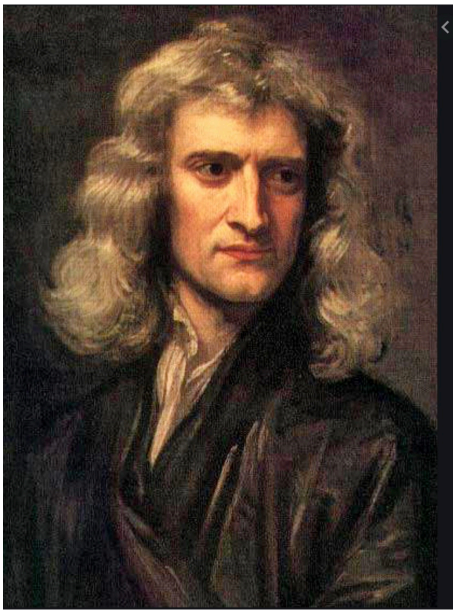
Le saviez-vous ?

Extrait du site wikipédia :[1]

L'histoire du calcul infinitésimal remonte à l'Antiquité. Sa création est liée à une polémique entre deux mathématiciens : Isaac Newton et Gottfried Wilhelm Leibniz. Néanmoins, on retrouve chez des mathématiciens plus anciens les prémices de ce type de calcul : Archimède, Pierre de Fermat et Isaac Barrow notamment.
La notion de nombre dérivé a vu le jour au xviie siècle dans les écrits de Gottfried Wilhelm Leibniz et d'Isaac Newton qui le nomme fluxion et qui le définit comme « le quotient ultime de deux accroissements évanescents ».
Le domaine mathématique de l'analyse numérique connut dans la seconde moitié du xviie siècle une avancée prodigieuse grâce aux travaux de Newton et de Leibniz en matière de calcul différentiel et intégral, traitant notamment de la notion d'infiniment petit et de son rapport avec les sommes dites intégrales.
C'est cependant Blaise Pascal qui, dans la première moitié du xviie siècle, a, le premier, mené des études sur la notion de tangente à une courbe - lui-même les appelait « touchantes ». Le marquis de l'Hospital contribuera à diffuser le calcul différentiel de Leibniz à la fin du xviie siècle grâce à son livre sur l'analyse des infiniment petits.
Wallis, mathématicien anglais (surtout connu pour la suite d'intégrales qui porte son nom) contribua également à l'essor de l'analyse différentielle.
Néanmoins cette théorie tout juste éclose n'est pas encore, à l'époque, pourvue de toute la rigueur mathématique qu'elle aurait exigée, et notamment la notion d'infiniment petit introduite par Newton, qui tient plus de l'intuitif, et qui pourrait engendrer des erreurs dès lors que l'on ne s'entend pas bien sur ce qui est ou non négligeable. C'est au xviiie siècle que d'Alembert introduit la définition plus rigoureuse du nombre dérivé en tant que limite du taux d'accroissement - sous une forme semblable à celle qui est utilisée et enseignée de nos jours. Cependant, à l'époque de d'Alembert, c'est la notion de limite qui pose problème : $\mathbb{R}$ n'est pas encore construit formellement. C'est seulement avec les travaux de Weierstrass au milieu du xixe siècle que le concept de dérivée sera entièrement formalisé.
C'est à Lagrange (fin du xviiie siècle) que l'on doit la notation $f'(x)$, aujourd'hui usuelle, pour désigner le nombre dérivé de f en x. C'est aussi à lui qu'on doit le nom de « dérivée » pour désigner ce concept mathématique.

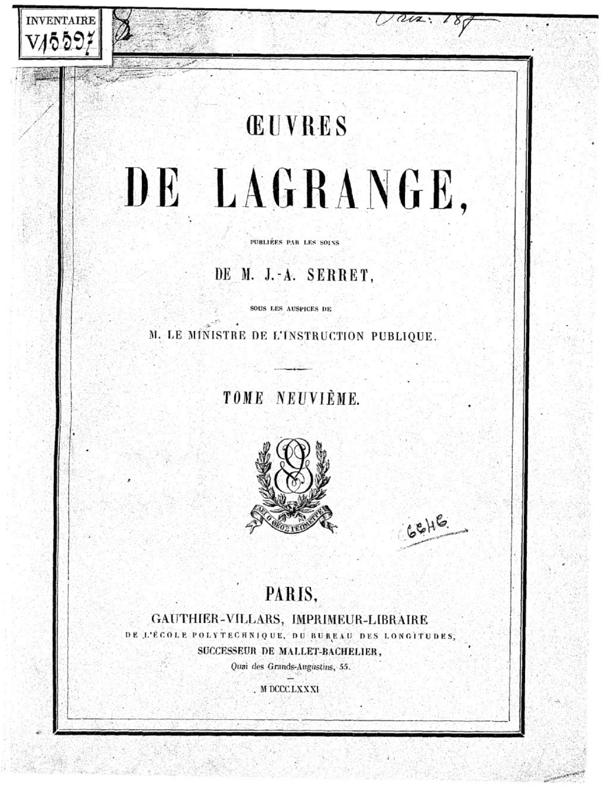
1.

Ainsi l'histoire retient que la notion de dérivée a été introduite par le physicien anglais Isaac Newton (1643-1727) et le mathématicien allemand Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716).

Leibniz (1646-1716) Newton (1643-1727)

La paternité du calcul différentiel et du calcul intégral a été une source de conflit important entre les deux mathématiciens contemporains.
Le mathématicien Jospeh-Louis Lagrange a défini le lien entre le signe de la dérivée d'une fonction et le sens de variations de la fonction. Il a aussi posé des notations encore utilisé aujourd'hui.



ŒUVRES

DE LAGRANGE,

PUBLIÉES PAR LES SOINS

DE M. J.-A. SERRET,

SOUS LES AUSPICES DE

M. LE MINISTRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

TOME NEUVIÈME.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Grands-Augustins, 55.

M DCCC LXXXI

Cette nouvelle expression a l'avantage de faire voir comment les termes de la série dépendent les uns des autres, et surtout comment, lorsqu'on sait former la première fonction dérivée d'une fonction primitive quelconque, on peut former toutes les fonctions dérivées que la série renferme.

9. Nous appellerons la fonction $f(x)$ *fonction primitive* par rapport aux fonctions $f'(x)$, $f''(x)$, ... qui en dérivent, et nous appellerons celles-ci *fonctions dérivées* par rapport à celle-là. Nous nommerons de plus la première fonction dérivée $f'(x)$ *fonction prime*, la seconde fonction dérivée $f''(x)$ *fonction seconde*, la troisième fonction dérivée $f'''(x)$ *fonction tierce*, et ainsi de suite.

De la même manière, si y est supposée une fonction de x, nous dénoterons ses fonctions dérivées par y', y'', y''', ..., de sorte que, y étant une fonction primitive, y' sera sa fonction *prime*, y'' en sera la fonction *seconde*, y''' la fonction *tierce*, et ainsi de suite.

De sorte que, x devenant $x+i$, y deviendra

$$y + y'i + \frac{y''i^2}{2} + \frac{y'''i^3}{2.3} + \cdots.$$

Ainsi, pourvu qu'on ait un moyen d'avoir la fonction prime d'une fonction primitive quelconque, on aura, par la simple répétition des mêmes opérations, toutes les fonctions dérivées, et par conséquent tous les termes de la série qui résulte du développement de la fonction primitive.

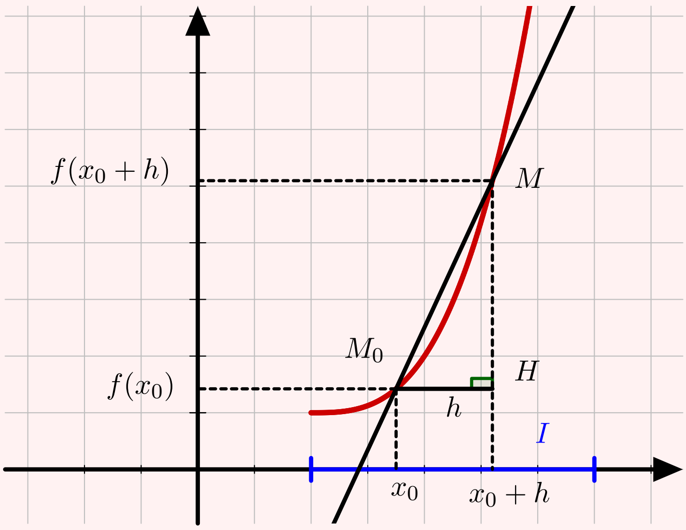
Au reste, pour peu qu'on connaisse le Calcul différentiel, on doit voir que les fonctions dérivées y', y'', y''', ..., relatives à x, coïncident avec les expressions $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, ...

2. Rappels fondamentaux

a) Définition

Définition 1

Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I et soit x_0 un point de I.
Soit h un nombre réel différent de zéro.
On note M_0 et M les points de la courbe de la fonction f d'abscisses respectives x_0 et $x_0 + h$.



⊛ Dans le triangle M_0HM rectangle en H, **la tangente de l'angle** $\widehat{HM_0M}$ est donnée par :

$$\tan \widehat{HM_0M} = \frac{\text{côté opposé à } \widehat{HM_0M}}{\text{côté adjacent à } \widehat{HM_0M}} = \frac{MH}{M_0H} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{x_0+h-x_0} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

⊛ On appelle **taux de variation entre** x_0 et x_0+h, noté $\tau_{x_0}(h)$, **le coefficient directeur** de la droite (MM_0).

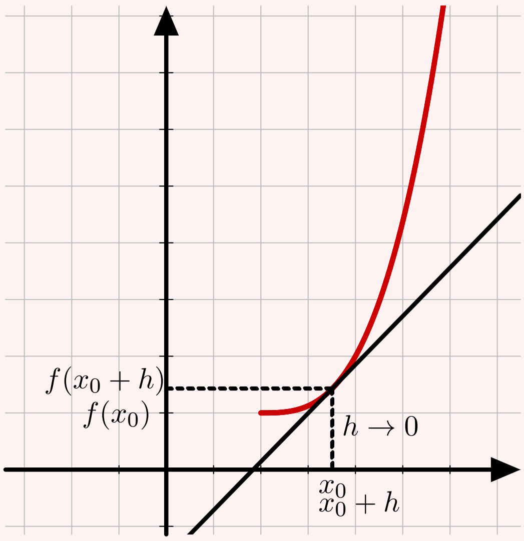
$$\tau_{x_0}(h) = \frac{\text{décalage vertical}}{\text{décalage horizontal}} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{x_0+h-x_0} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

⊛ On remarque l'égalité importante : $\boxed{\tau_{x_0}(h) = \tan \widehat{HM_0M} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}$.

⊛ On dit que f est **dérivable** en x_0 de dérivée ℓ si le taux d'accroissement de f en x_0 admet une limite finie quand $h \to 0$.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \ell.$$

Cette dérivée se note $f'(x_0)$ et on a donc $f'(x_0) = \ell$.



- Si la fonction f admet en x_0 la dérivée $f'(x_0)=\ell$ alors, **la courbe de la fonction f admet au point d'abscisse** x_0 une **tangente dont le coefficient directeur est** $f'(x_0)=\ell$.

$$\boxed{\text{Le coefficient directeur de la tangente à } C_f \text{ au point d'abscisse } x_0 \text{ est } f'(x_0)=\ell.}$$

- **L'équation de la tangente** à la courbe C_f au point d'abscisse x_0 s'écrit :

$$\boxed{T_{x_0} : y = \underbrace{f'(x_0)}_{\text{pente}}(x-x_0)+f(x_0)}$$

Recherche

Exercice 1 : On considère f_1 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_1(x)=2x^2-3x+1$.

1. Exprimer, en fonction de h, le taux de variation de la fonction f_1 entre 2 et $2+h$.
2. Conjecturer un nombre dérivé.

   a) Compléter le programme ci-dessous afin qu'il retourne la liste du taux de variation de la fonction f entre x_0 et x_0+h pour les n valeurs de h allant de $h=10^{-1}$ à $h=10^{-n}$.

   Codage en Python

```python
def nombre_derive(f,x_0,n) :
    taux_variation=[]
    for k in range( ..... , ..... ) :
        h=10**(-k)
        tau=1/h*(f(x_0+h)-f(x_0))
        taux_variation.append( ..... )
    return taux_variation
```

b) Saisir les lignes manquantes dans le programme réalisé sous Jupyter.

c) Compléter la ligne de commande qui vous permet d'obtenir la liste du taux de variation de la fonction f_1 entre 2 et $2+h$ pour les 12 valeurs de h allant de $h=10^{-1}$ à $h=10^{-12}$.

d) Donner le résultat du taux de variation de la fonction f_1 entre 2 et $2+10^{-12}$. Écrire cette ligne de commande sur votre cahier.

e) En déduire une conjecture du nombre dérivé de la fonction f_1 au point d'abscisse 2.

f) Vérifier votre conjecture à l'aide de l'animation GeoGebra .

3. Démontrer votre conjecture.

4. Déterminer la tangente à la courbe représentative de la fonction f_1 au point d'abscisse 2.

Exercice 2 : On considère la fonction exponentielle notée f_2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_2(x)=e^x$. On note $\mathscr{C}_{f_2}$ la courbe représentative de la fonction f_2 dans un repère.

1. Déterminer, en fonction de h, le taux de variation de la fonction f_2 entre 0 et $0+h$.

2. En utilisant le programme en Python de l'exercice précédent déterminer le taux de variation de la fonction f_2 entre 0 et $0+10^{-10}$. En déduire une conjecture du nombre dérivé de la fonction f_2 au point d'abscisse 0. Écrire sur votre cahier l'ensemble des instructions saisies.

3. Vérifier votre conjecture à l'aide de l'animation GeoGebra .

4. Démontrer en utilisant la définition de la fonction exponentielle que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$.

5. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_{f_2}$ en 0.

Animation Jupyter

b) Fonction dérivée et principe de Lagrange

Définition 2 ▶ Fonction dérivée

Si f est une fonction dérivable en tout point d'un intervalle I, on peut définir sur I la fonction f', $x \longmapsto f'(x)$ appelée fonction dérivée de f.

Théorème 1 ▶ Principe de Lagrange

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- Si la dérivée est **nulle** sur I, alors la fonction f est **constante** sur I.
- Si la dérivée est **strictement positive** sur I sauf en un nombre fini de points où elle s'annule, alors la fonction f est **strictement croissante** sur I.
- Si la dérivée est **strictement négative** sur I sauf en un nombre fini de points où elle s'annule, alors la fonction f est **strictement décroissante** sur I.

Conséquence fondamentale : l'étude des variations d'une fonction sur un intervalle I passe par l'étude du signe de sa dérivée sur I.

Dérivée des fonctions usuelles		
Fonction f définie par	dérivable sur	fonction dérivée f'
$f(x) = k$ (k constante)	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 1$
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^3$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 3x^2$
$f(x) = x^n$ (n entier $\geqslant 1$)	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$\mathbb{R}^{+*}$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = \mathrm{e}^x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = \mathrm{e}^x$
$f(x) = \ln(x)$	$\mathbb{R}^{+*}$	$f'(x) = \dfrac{1}{x}$
$f(x) = \sin(x)$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = \cos(x)$
$f(x) = \cos(x)$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = -\sin(x)$

3. Composée de deux fonctions

Propriété ▶ Dérivée d'une fonction composée

- Soient u une fonction réelle définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et v une fonction réelle définie dans un intervalle J contenant $u(\mathrm{I})$; on peut alors former $f = v \circ u$ qui est définie sur I.

$$f: \begin{array}{l} I \xmapsto{u} u(I) \subset J \xmapsto{v} \mathbb{R}. \\ x \longmapsto u(x) = X \longmapsto v(X) \end{array}$$

- Si u est dérivable en x_0 et v est dérivable en $u(x_0)$, alors f est dérivable en x_0 et :

$$\boxed{f'(x_0) = u'(x_0) \times v'(X_0) = u'(x_0) \times v'[u(x_0)]}$$

- Si u est dérivable en tout point de I et v est dérivable en tout point de $u(\mathrm{I})$, $f = v \circ u$ est dérivable en tout point de I et on a :

$$\boxed{f' = (v' \circ u)\, u'}$$

Propriété ▶ Corollaire : dérivée de u^n pour $n \in \mathbb{N}^*$

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I, et f la fonction définie sur I par $f(x) = u(x)^n$. Alors f est dérivable sur I, et

$$\forall x \in \mathrm{I}\ ,\ f'(x) = n \times u'(x) \times u(x)^{n-1}.$$

$$\text{On note : } (u^n)' = nu'u^{n-1}.$$

En particulier, $(u^2)' = 2u'u$; $(u^3)' = 3u'u^2$

Propriété ▶ Corollaire : dérivée de $\frac{1}{u^n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I, qui ne s'annule pas sur I (c'est-à-dire que $\forall x \in \mathrm{I}\ ,\ u(x) \neq 0$) et f la fonction définie sur I par $f(x) = \frac{1}{u(x)^n}$. Alors f est dérivable sur I, et

$$\forall x \in \mathrm{I}\ ,\ f'(x) = \frac{-n \times u'(x)}{u(x)^{n+1}}.$$

$$\text{On note : } \left(\frac{1}{u^n}\right)' = \frac{-nu'}{u^{n+1}}.$$

En particulier, $\left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-u'}{u^2}$; $\left(\frac{1}{u^2}\right)' = \frac{-2u'}{u^3}$.

Propriété ▶ Corollaire : dérivée de $\sqrt{u}$

Soit u est une fonction strictement positive et dérivable sur I, et f la fonction définie sur I par $f(x) = \sqrt{u(x)}$. Alors f est dérivable sur I, et

$$\forall x \in \mathrm{I}\ ,\ f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}.$$

$$\text{On note : } \left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

.

Propriété ▶ Corollaire : dérivée de e^u

Soit u est une fonction dérivable sur I, et f la fonction définie sur I par $f(x) = \mathrm{e}^{u(x)}$.
Alors f est dérivable sur I, et

$$\forall x \in \mathrm{I}\ ,\ f'(x) = u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}.$$

$$\text{On note : } (\mathrm{e}^u)' = u'\mathrm{e}^u$$

.

Recherche

Exercice 3 : Déterminer les dérivées des fonctions définies ci-dessous :

$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ f_1(x) = (2x^2 - 3x + 5)^3$ $\quad$ $\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ f_2(x) = (-x^3 + 1)^5$

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2; -1\}\ ,\ f_3(x) = \frac{4}{x^2+3x+2}$ $\quad$ $\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ f_4(x) = \frac{1}{(x^2+1)^5}$

$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ f_5(x) = \sqrt{3x^2 + 1}$ $\quad$ $\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ f_6(x) = 4x^2 + \sqrt{x^2 - 2x + 5}$

$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ f_7(x) = \mathrm{e}^{3x^2+1}$ $\quad$ $\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ f_8(x) = 3e^{-4x-1} - 3e^{-\frac{x}{2}+1}$

Recherche

Exercice 4 : Image par une composée de fonction
Exercice 5 : Schéma de décomposition d'une fonction
Exercice 6 : Calcul de dérivées de fonctions composées (niveau 1)
Exercice 7 : Calcul de dérivées de fonctions composées (niveau 2)

Exercice 4 **Exercice 5**

Exercice 6 **Exercice 7**

Dérivées et opérations sur les fonctions		
u et v sont des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, sur un intervalle ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$.		
Fonction f définie par	dérivable si	fonction dérivée f'
$f = u + v$		$f' = u' + v'$
$f = ku$ (k cte)		$f' = ku'$
$f = u \times v$		$f' = u'v + uv'$
$f = \dfrac{u}{v}$	$v \neq 0$	$f' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$
$f = v \circ u$		$f' = (v' \circ u) \times$ u'
$f = \dfrac{1}{u}$	$u \neq 0$	$f' = \dfrac{-\text{u'}}{u^2}$
$f = \sqrt{u}$	$u > 0$	$f' = \dfrac{\text{u'}}{2\sqrt{u}}$
$f = u^n$	$u \neq 0$	$f' = nu^{n-1}$ u'
$f = \mathrm{e}^u$		$f' =$ u' e^u
$f = \ln(u)$	$u > 0$	$f' = \dfrac{\text{u'}}{u}$
$f = \sin(u)$		$f' =$ u' $\cos(u)$
$f = \cos(u)$		$f' = -$ u' $\sin(u)$

4. Convexité et point d'inflexion

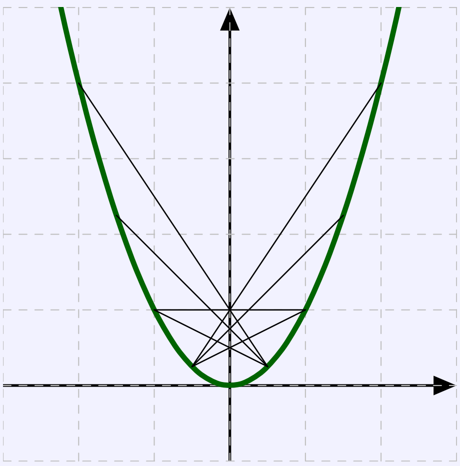
Définition 3

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de fonction dérivée notée f'.
Lorsque f' est dérivable sur I, on note f'' sa dérivée.
f'' est appelée **la dérivée seconde** de f sur I.

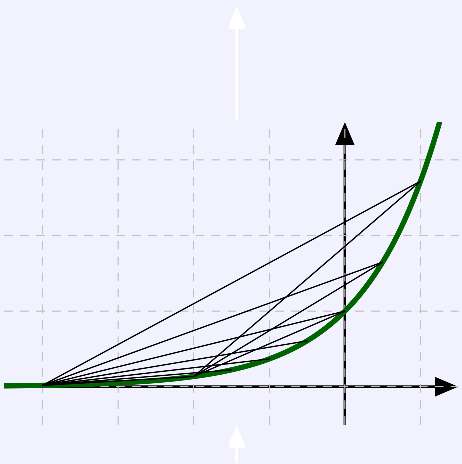
Définition 4 ▶ Fonction convexe

Une fonction f définie sur un intervalle I est dite **convexe** sur I si **les sécantes** à sa courbe sont au-dessus de la courbe.

A titre d'exemple ► Fonction convexe



La fonction carré

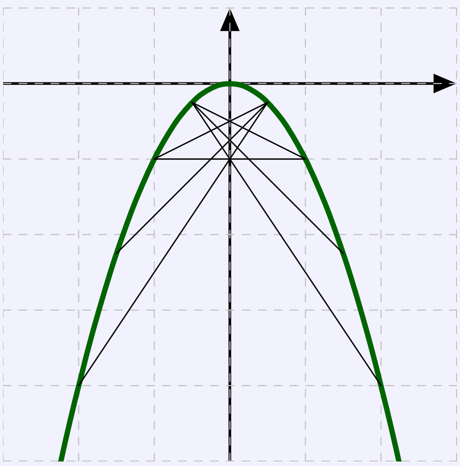


La fonction exponentielle

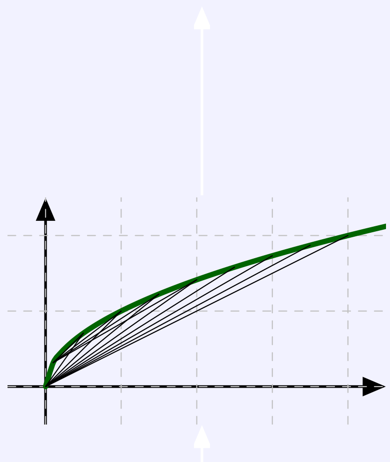
Définition 5 ► Fonction concave

Une fonction f définie sur un intervalle I est dite **concave** sur I si **les sécantes** à sa courbe sont au-dessous de la courbe.

A titre d'exemple ► Fonction concave



La fonction $x \mapsto -x^2$



La fonction racine carrée

Recherche

Exercice 8 : Que peut-on dire, au sujet de la convexité, des fonctions cube et inverse ?

Théorème

Soit f une fonction deux fois dérivable en un réel a appartenant à un intervalle I.
On appelle **point d'inflexion** d'une courbe C_f en $A\,(a; f(a))$, un point de la courbe en lequel la tangente au point d'abscisse a à C_f **traverse** la courbe.

- ⊛ Si $f''(a) \geq 0$, f est **localement convexe** en $A\,(a; f(a))$.
- ⊛ Si $f''(a) \leq 0$, f est **localement concave** en $A\,(a; f(a))$.
- ⊛ Si f'' s'annule en a $(f''(a) \leq 0)$ **et** si f'' change de signe alors f admet en $A\,(a; f(a))$ **un point d'inflexion**.

Recherche

Exercice 9 : Soit f la fonction définie par $f(x) = -3x^2 - 2x + 1$.
Étudier la convexité de f. Une correction
Exercice 10 : Cliquer sur ce lien, puis déterminer le lien entre la convexité de la fonction f, le sens de variation de la dérivée, le signe de la dérivée seconde et la position de la tangente par rapport à la courbe. Préciser les intervalles sur lesquels la fonction est convexe et concave.

Exercice 9 **Exercice 10**

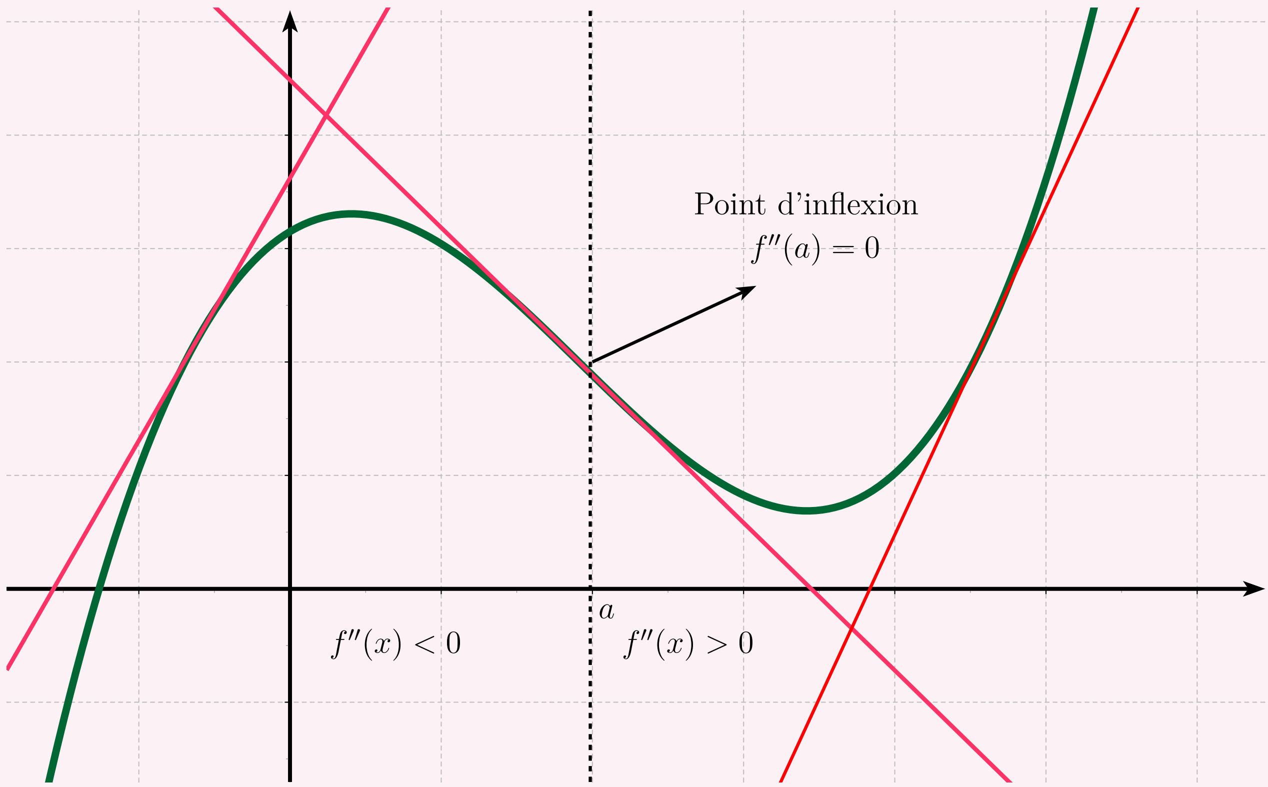
Propriété 1

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur un intervalle I. Les propositions sont équivalentes :
⊛ f est **convexe** sur I ;
⊛ La courbe représentative de la fonction f est entièrement située au dessus de ses tangentes ;
⊛ f' est croissante sur I ;
⊛ f'' est positive sur I.

Propriété 2 ► A compléter

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur un intervalle I. Les propositions sont équivalentes :
⊛ f est **concave** sur I ;
⊛ La courbe représentative de la fonction f est entièrement située ……………………………………………de ses tangentes ;
⊛ f' est ……………………………………………sur I ;
⊛ f'' est………………………………………………sur I.

Graphique



A titre d'exemple ▶ reconnaître graphiquement une convexité et point d'inflexion.

Exemple 1 : une convexité (lien vers une vidéo d'Yvan Monka)
Exemple 2 : un point d'inflexion (lien vers une vidéo d'Yvan Monka)

Exercice 9 **Exercice 10**

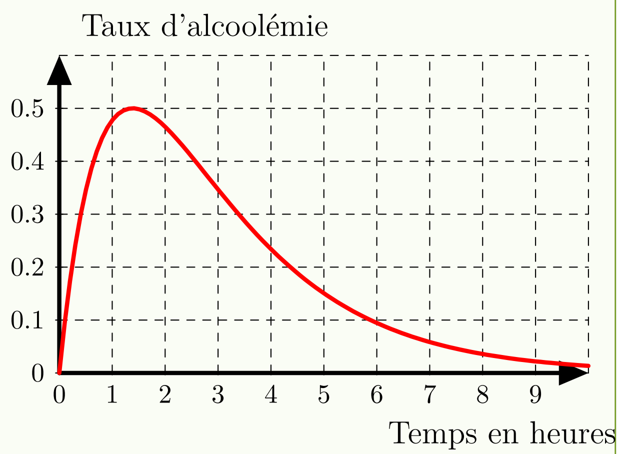
Recherche

Exercice 11 **:** Lien entre convexité d'une fonction et sa dérivée
Exercice 12 **:** Lecture graphique de la convexité (niveau 1)
Exercice 13 **:** Lecture graphique de la convexité (niveau 2)

Exercice 11 **Exercice 12** **Exercice 13**

Recherche

Exercice 14 : En lien avec la SVT (Prise d'initiative)

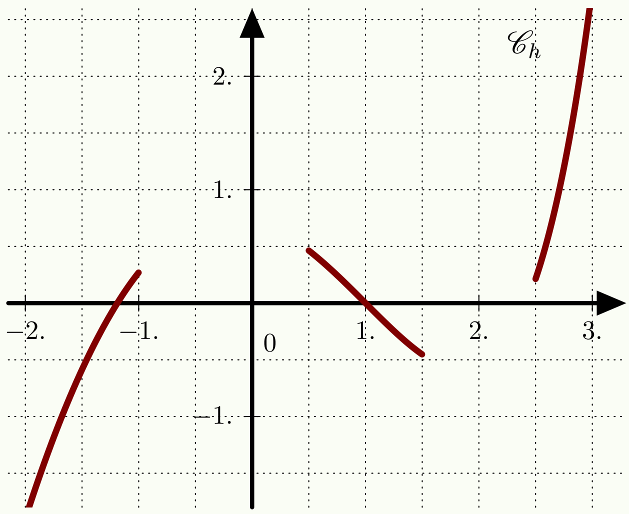


L'évolution du taux d'alcoolémie d'un patient est modélisée par la fonction f définie sur l'intervalle $[0;7]$ par $f(t) = 2e^{-\frac{t}{2}} - 2e^{-t}$. On donne : $e^{0,693} \approx 2$ et $e^{1,386} \approx 4$.
Conjecturer approximativement puis, déterminer plus précisément, au bout de combien de temps la diminution du taux d'alcool dans le sang décélère.

Recherche

Exercice 15 Etude de la convexité
Soit h la fonction définie sur $[-2;3]$ par $h(x) = 2\mathrm{e}^{x-1} - x^2 - x$. On note $\mathscr{C}_h$ sa courbe. Pour $a \in [-2;3]$, on appelle $\mathscr{T}_a$ la tangente à la courbe $\mathscr{C}_h$ au point d'abscisse a.

1. Etudier la convexité de la fonction h. Déterminer les coordonnées du point d'inflexion $A(x_A; y_A)$.
2. Déterminer l'équation de la tangente $\mathscr{T}_1$.
3. Discuter de la position de $\mathscr{T}_a$ par rapport $\mathscr{C}_h$ en fonction de a.
4. On admet que la dérivée $h'(x)$ s'annule exactement deux fois sur $[-2;3]$, en x_1 et en x_2, avec $x_1 < x_2$.
   Déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près de x_1 et x_2, puis dresser le tableau de variation complet de la fonction h.
5. Compléter le graphique précisément et tracer la tangente $\mathscr{T}_1$.

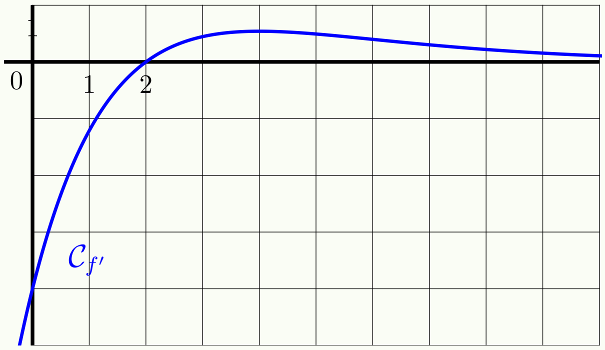


Recherche

Exercice 16 : QCM de type bac

On donne ci-contre la représentation graphique $\mathcal{C}_{f'}$ de **la fonction dérivée** $\boldsymbol{f'}$ d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.
On peut affirmer que la fonction f est :

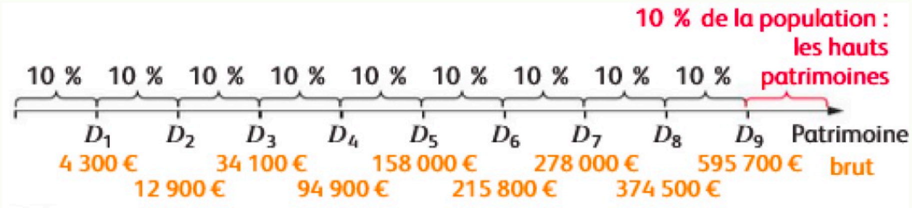
a. concave sur $]0\ ;\ +\infty[$;
b. convexe sur $]0\ ;\ +\infty[$;
c. convexe sur $[0\ ;\ 2]$;
d. convexe sur $[2\ ;\ +\infty[$.



5. Approfondissement : courbe de Lorenz et indice de Gini

Recherche

Dans l'édition 2018 de l'étude sur le patrimoine des ménages français (hors Mayotte) de l'INSEE, on trouve cette représentation pour l'année 2015 :



Le patrimoine brut d'un ménage regroupe le patrimoine immobilier (résidences principale et secondaire), les revenus fonciers, ainsi que le patrimoine résiduel : voiture, équipement de la maison, bijoux, oeuvres d'art, ...

Le tableau du patrimoine brut moyen en euros ci-contre est issu de la même étude INSEE.

Inf à D_1	2 000
Entre D_1 et D_2	7 800
Entre D_2 et D_3	21 700
Entre D_3 et D_4	61 300
Entre D_4 et D_5	128 500
Entre D_5 et D_6	186 500
Entre D_6 et D_7	245 100
Entre D_7 et D_8	319 100
Entre D_8 et D_9	463 800
Sup.à D_9	1 254 000
Ensemble	268 980

On note N le nombre total de ménages français en 2015.

1. Justifier que :
   - l'ensemble du patrimoine français est égal à $268\,980 \times N$ euros ;
   - le patrimoine détenu par 10% des ménages ayant le patrimoine le plus faible est égal à $2000 \times \dfrac{N}{10}$ euros.
2. En déduire que le patrimoine détenu par 10% des ménages ayant le patrimoine le plus faible représente environ $0,07\%$ du patrimoine total.
3. Justifier que le patrimoine détenu par 20% des ménages ayant le patrimoine le plus faible représente environ $0,36\%$ du patrimoine total.
4. Recopier et compléter le tableau suivant :

Décile	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5
Part du patrimoine en %	$0,07$	$0,29$	$0,81$	$2,28$	………
Parts cumulées du patrimoine en %	$0,07$	$0,36$	$1,17$	$3,45$	………

Décile	D_6	D_7	D_8	D_9	D_{10}
Part du patrimoine en %	6,93	………	………	17,24	………
Parts cumulées du patrimoine en %	………	………	………	………	100

On lit par exemple que 30% des français ont un patrimoine inférieur ou égal à $1,17\%$ du patrimoine total.

5. **Courbe de Lorenz.**
On a représenté les points $(0;0)$, $(10\%;0,07\%)$, $(20\%;0,36\%)$, $(30\%;1,17\%)$ et $(40\%;3,45\%)$.

   a) Placer les autres points sur le graphique ci-dessous. Que remarquez-vous ?

   b) La courbe $\mathscr{C}_f$ (en rouge) est la représentation graphique de la fonction f définie par $f(x) = 0,8x^5 + 0,2x^2$.

   c) Démontrer que la fonction f est convexe sur $[0,1]$.

   d) Justifier que $\mathscr{C}_f$ est en dessous de la droite (d) d'équation $y = x$ sur $[0;1]$.

   e) Donner une interprétation quant à la répartition du patrimoine au sein de la population française en 2015.

La courbe $\mathscr{C}_f$ s'appelle courbe de Lorenz, en hommage à l'économiste américain Max Otto Lorenz (1876 – 1959). Elle permet de visualiser des inégalités de répartition : revenus, patrimoine, niveau de vie.

6. **Indice de Gini.**

Pour mesurer le degré d'inégalité de la répartition, on calcule l'indice de Gini (ou coefficient de Gini), noté G, qui est égal au double de l'aire $\mathscr{A}$ de la partie délimitée par la courbe de Lorenz $\mathscr{C}_f$ et le segment [OA]. (Corrado Gini (1884 – 1965) est un statisticien, démographe, ethnologue et sociologue italien.)

   a) Expliquez pourquoi $0 \leqslant G \leqslant 1$.

   b) Justifier que plus G est proche de 0, plus la répartition est égalitaire, alors que plus G est proche de 1, plus la répartition est inégalitaire.

   c) Evaluer G le plus précisément possible.