Sommaire

Chapitre II

Suites numériques

1. Raisonnement par récurrence

a) Le principe de récurrence

Les suites sont souvent définies par une relation de récurrence.
Lorsqu'on étudie une suite on s'intéresse souvent à :

- déterminer sa forme explicite lorsqu'elle existe,
- démontrer, le cas échéant, sa monotonie,
- démontrer, le cas échéant, qu'elle est minorée, majorée ou/et bornée.

Ne connaissant d'une suite que son premier terme et sa forme récurrente, c'est-à-dire la formule qui permet de passer d'un terme au suivant, pour démontrer une propriété sur la suite, il sera nécessaire et suffisant de :

1. montrer que la propriété est vraie au moins une fois,
2. montrer que si la propriété est vraie à un rang quelconque k, alors elle le sera au rang suivant $(k+1)$.

Ces deux étapes constituent **le principe de récurrence**. Il s'articule en deux raisonnements bien distincts.

Axiome ▶ Principe de récurrence

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$.
Soit $\mathrm{P}(n)$ une propriété portant sur un entier n tel que $n \geqslant n_0$, dont on sait pas, a priori, si elle est vraie ou fausse.

Pour que $\mathrm{P}(n)$ soit vraie pour tout entier n tel que $n \geqslant n_0$, **il faut et il suffit que l'on ait** :

- **Initialisation :** $\mathrm{P}(n_0)$ vraie ;
- **Hérédité :** Pour tout entier k tel que $k \geqslant n_0$

Si $\mathrm{P}(k)$ est vraie, alors $\mathrm{P}(k+1)$ est vraie

b) Exercices et exemples

Développer les automatismes avec Labomep/wim's

Exercice 1 : Démontrer une égalité par récurrence.

Exercice 1

Recherche

Exercice 2 : détermination d'une forme explicite

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + 2n + 3 \end{cases}$

Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (n+1)^2$.

Pour une correction, suivre la vidéo d'Yvan Monka

Exercice 3 : détermination d'une forme explicite

Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par : $\begin{cases} a_0 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = 2a_n - 7 \end{cases}$

Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = 7 - 3 \times 2^n$.

Exercice 4 : variation et importance de l'initialisation

1. Soit $(v_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par :
   $\begin{cases} v_0 = 5 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = \frac{1}{5}v_n + 3 \end{cases}$

   Montrer que la suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante.

2. Soit $(w_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par :
   $\begin{cases} w_0 = -5 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad w_{n+1} = \frac{1}{5}w_n + 3 \end{cases}$

   Montrer que la suite $(w_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante.

Exercice 2

A titre d'exemple ▶ une inégalité importante, l'inégalité de Bernoulli

Exemple 1 : démontrer par récurrence que pour tout nombre réel $\alpha > 0$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (1+\alpha)^n \geqslant 1+n\alpha$$

Démonstration : Soit α un nombre réel strictement positif. Soit $n \in \mathbb{N}$; on définit la propriété $\mathrm{P}(n)$:

$$(1+\alpha)^n \geqslant 1+n\alpha$$

On cherche à démontrer l'inégalité entre les deux membres.

1. **Initialisation :**
   $n = 0$; montrons que $\mathrm{P}(0)$ est vraie.
   $$\left.\begin{array}{ll} \text{D'une part :} & (1+\alpha)^0 = 1 \\ \text{D'autre part :} & 1+0\times\alpha = 1 \end{array}\right\} (1+\alpha)^0 \geqslant 1+0\times\alpha$$
   , donc $\mathrm{P}(0)$ est vraie.

2. **Hérédité :**
   Soit un entier $k \geqslant 0$.
   On suppose que $\mathrm{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire que $(1+\alpha)^k \geqslant 1+k\alpha$.
   Montrons que $\mathrm{P}(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $(1+\alpha)^{k+1} \geqslant 1+(k+1)\alpha$.
   $$\begin{aligned} (1+\alpha)^k &\geqslant 1+k\alpha \\ (1+\alpha)(1+\alpha)^k &\geqslant (1+k\alpha)(1+\alpha) \quad (\text{Car } \alpha > 0 \quad \text{, donc } 1+\alpha > 1 > 0\ ) \\ (1+\alpha)^{k+1} &\geqslant (1+k\alpha)(1+\alpha) \\ (1+\alpha)^{k+1} &\geqslant 1+\underbrace{k\alpha+\alpha}_{(k+1)\alpha}+k\alpha^2 \\ (1+\alpha)^{k+1} &\geqslant 1+(k+1)\alpha+\underbrace{k\alpha^2}_{>0} > 1+(k+1)\alpha \\ (1+\alpha)^{k+1} &\geqslant 1+(k+1)\alpha \end{aligned}$$
   On a montré que si $\mathrm{P}(k)$ est vraie, alors $\mathrm{P}(k+1)$ est vraie.

3. **Conclusion :**
   La propriété est vraie au rang 0 (initialisation) et elle est héréditaire, donc, d'après le principe de récurrence :

   Pour tout nombre réel $\alpha > 0$, on a :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ (1+\alpha)^n \geqslant 1+n\alpha$$

Pour une autre explication, suivre la vidéo d'Yvan Monka ou scanner le QR code .

Vidéo Y.M..

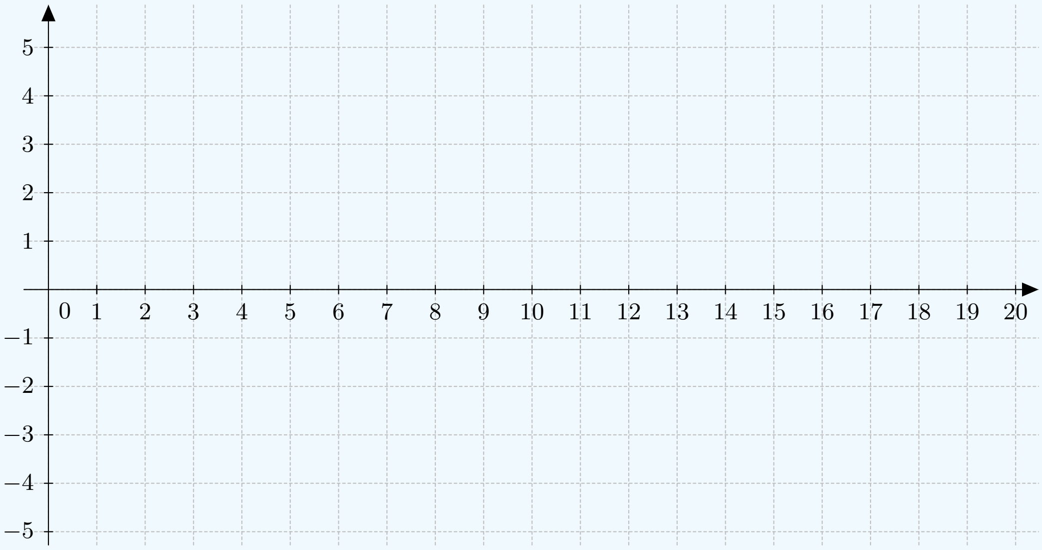
2. Limite finie ou infinie d'une suite

Recherche

On s'intéresse aux suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ définies ainsi :

- $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 1,2^n - 5$
- $\begin{cases} v_0 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N}\ ,\ v_{n+1} = 0,6v_n - 1 \end{cases}$

A l'aide de la calculatrice, représenter graphiquement ces suites ci-dessous.



On s'intéresse au comportement à l'infini de ces suites, c'est-à-dire quand n tend vers $+\infty$. D'après ces graphiques et d'après les tableaux de valeurs, on peut conjecturer que :

- Si on se fixe n'importe quel nombre A, à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ sont supérieurs à A.
  On dit que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ a pour limite $+\infty$.
- Si on se fixe n'importe quel nombre a, à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ sont compris entre $-2,5 - a$ et $-2,5 + a$.
  On dit que la suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ a pour limite $-2,5$.

A titre d'exemple

Deux animations permettent de comprendre la notion de limite de suite :

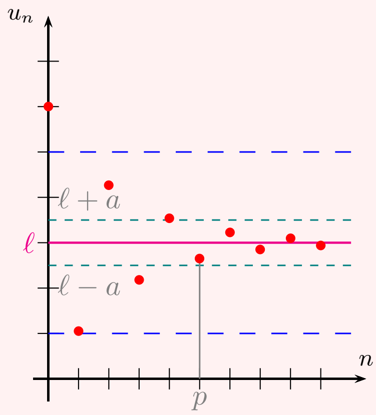
- 1er cas : dans le cas où la suite tend vers une limite finie.
- 2ème cas : dans le cas où la suite tend vers l'infini .

limite finie **limite infinie**

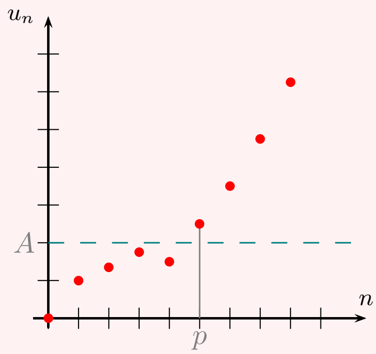
Définition ▶ Convergence et divergence d'une suite à l'infini

Soit la suite (u_n). On s'intéresse à son comportement à l'infini, c'est-à-dire lorsque n tend vers $+\infty$. Trois cas se présentent :

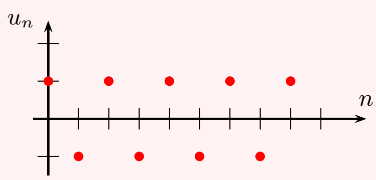
- 1^{er} cas : la suite (u_n) admet une limite finie ℓ à l'infini. Si tout intervalle ouvert et centré sur ℓ (du type $]\ell - a\ ;\ \ell + a[$ avec $a > 0$) contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang alors on dit que la suite (u_n) **converge** vers le réel ℓ. On écrit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.
  Si une suite converge alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.
  Toute suite constante converge vers la valeur de la constante.
  Si une suite converge alors sa limite est unique.
  Si une suite ne converge pas elle est **divergente**.



- $2^{\text{ème}}$ cas : la suite (u_n) admet une limite infinie. Si tout intervalle ouvert du type $]A\ ;\ +\infty[$ (avec A un nombre réel) contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang alors on dit que la suite (u_n) **diverge** vers $+\infty$. On écrit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
  Il en va de même pour une limite égale à $-\infty$, si tout intervalle ouvert du type $]-\infty\ ;\ A[$ (avec A un nombre réel) contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.



- $3^{\text{ème}}$ cas : la suite (u_n) n'admet ni de limite finie, ni de limite infinie. On dit qu'elle n'a pas de limite. La suite est alors divergente. Par exemple la suite de terme général $(-1)^n$.



Propriété ▶ limites de référence

Les suites de terme général $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n^2}$, $\frac{1}{n^k}$ (k entier naturel non nul), $\frac{1}{\sqrt{n}}$ sont convergentes et leur limite est 0.
Les suites de terme général n, n^2, n^k (k entier naturel), $\sqrt{n}$ sont divergentes et leur limite est $+\infty$.

3. Opérations sur les limites

On considère deux suites (u_n) et (v_n) dont on connaît la limite lorsque n tend vers l'infini. On présente dans cette partie des résultats qui permettent d'établir les limites de $u_n + v_n$, u_nv_n et $\frac{u_n}{v_n}$ à partir de celles de (u_n) et (v_n).
Les résultats sont intuitifs ; ils ne seront pas démontrés.
Dans certains cas, on ne peut pas prévoir la limite : on parle alors de forme indéterminée, notée **F.I.**. Pour autant, on apprendra à « lever » les indéterminations. *Dans ce qui suit, ℓ désigne un nombre réel.*

a) Multiplication par une constante

Propriété

Il suffit d'appliquer la règle des signes d'un produit.

- Si $k > 0$:

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	ℓ	$+\infty$	$-\infty$
Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (k \times u_n) =$	$k \times \ell$	$+\infty$	$-\infty$

- Si $k < 0$:

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	ℓ	$+\infty$	$-\infty$
Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (k \times u_n) =$	$k \times \ell$	$-\infty$	$+\infty$

b) Limite d'une somme de suites

Propriété

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) =$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.

Recherche ▶ $+\infty - \infty$

Exercice 3 : soient les suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$, $(v_n)_{n\geqslant 0}$ et $(w_n)_{n\geqslant 0}$ définies pour tout entier naturel n par :

$$u_n = n^2,\ v_n = 1 - n^2,\ w_n = 2 - n^2.$$

1. Déterminer les limites de u_n, v_n et de w_n.
2. Déterminer les limites de $u_n + v_n$ et de $u_n + w_n$.

c) Limite d'un produit de suites

Propriété

Le principe est là encore celui de la règle des signes d'un produit.

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	ℓ	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	0
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	ℓ'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$ ou $+\infty$
Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n \times v_n) =$	$\ell\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.

Recherche ▶ $\infty \times 0$

Exercice 4 : soient les suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$, $(v_n)_{n\geqslant 0}$ et $(w_n)_{n\geqslant 0}$ définies pour tout entier naturel n par :

$$u_n = 5n^2,\ v_n = 5n^3,\ w_n = \frac{1}{n^2}.$$

1. Déterminer les limites de u_n, v_n et de w_n.
2. Déterminer les limites de $u_n \times w_n$ et de $v_n \times w_n$.

d) Limite d'un quotient de suites

Propriété

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	ℓ	ℓ	$\ell \neq 0$	∞	∞	0
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	$\ell' \neq 0$	∞	0	0	∞	0
Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{u_n}{v_n}\right) =$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	∞ (Il faut étudier l'expression pour déterminer le signe.)	∞ (Il faut étudier l'expression pour déterminer le signe.)	F.I.	F.I.

On peut retenir facilement ces résultats en retenant les deux principes suivants :

- en limite, diviser par l'infini revient à multiplier par 0 ;
- en limite, diviser par 0 revient à multiplier par l'infini ;

puis en appliquant les résultats sur les limites d'un produit. Ainsi, le cas « $\dfrac{\infty}{\infty}$ » se ramène au cas « $\infty \times 0$ », qui est une forme indéterminée.

Recherche

Exercice 5 : déterminer les limites des suites définies pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 par :

$$u_n = n^2 + 4n + 1\ ;\ v_n = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)(-n+3)\ ;\ p_n = u_n v_n\ ;\ q_n = \frac{1}{u_n}$$

e) Formes indéterminées (F.I.)

On recense 4 situations de formes indéterminées que l'on peut résumer en : « $\infty - \infty$ », « $0 \times \infty$ », « $\frac{\infty}{\infty}$ » et « $\frac{0}{0}$ ». Pour lever l'indétermination, il faut transformer l'écriture de l'expression pour se ramener à un des théorèmes généraux, par exemple en développant ou en factorisant.

Recherche

Exercice 6 : déterminer les limites des suites définies pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 par :

$$u_n = 2\sqrt{n} - n\ ;\ v_n = \frac{n^2+3n}{3n^2+4}\ ;\ p_n = \frac{1}{\sqrt{n}}(n+2)\ ;\ q_n = \frac{\dfrac{1}{n^2}}{\dfrac{2}{n} + \dfrac{1}{n^2}}$$

4. Théorèmes sur les limites

Théorème ▶ Théorème de comparaison à l'infini

Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles qu'à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant v_n$.

- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$;
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Démonstration du premier point :
Soit A un nombre réel, et I $=]$A ; $+\infty[$; $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ donc il existe un entier n_1 tel que $\forall n \geqslant n_1$, $u_n \in I$.
De plus à partir d'un certain rang n_2, $u_n \leqslant v_n$, c'est-à-dire que pour tout $n \geqslant n_2$, $u_n \leqslant v_n$.
Soit N un entier supérieur ou égal à n_1 et n_2 ; alors $\forall n \geqslant N$, $A < u_n$ et $u_n \leqslant v_n$.
Donc pour tout $n \geqslant N$, $A < v_n$ donc $v_n \in I$; par définition : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Recherche

Observer l'animation pour comprendre comment on peut déterminer la limite d'une suite lorsqu'elle est encadrée par deux suites convergentes vers une même limite.

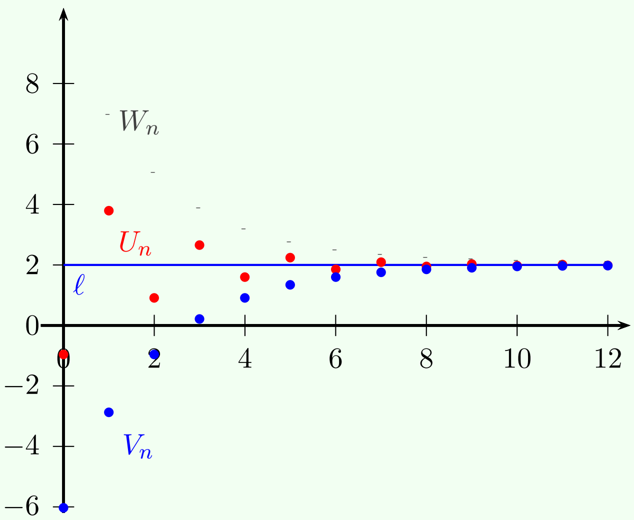
Animation

Théorème ▶ Théorème des gendarmes (admis)

Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites telles que, à partir d'un certain rang,

$$v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$$

Si (v_n) et (w_n) convergent vers une même limite ℓ, alors (u_n) converge vers ℓ.



A titre d'exemple ▶ Exercices corrigés d'Yvan Monka

Exercice 7 : théorème de comparaison sur les limites.
Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n^2+(-1)^n\right)$

Exercice 8 : théorème des gendarmes.
Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{\sin(n)}{n}\right)$

Exercice 7 Exercice 8

Développer les automatismes avec Labomep/wim's

Exercice 9 : théorème de comparaison sur les limites.
Exercice 10 : théorème de comparaison et théorème des gendarmes.

Exercice 9 Exercice 10

Recherche

Exercice 11 : Déterminer les limites des suites définies pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 par :

$$u_n=\frac{5+(-1)^n}{n}\ ;\ v_n=\frac{n+\sin n}{n-\sin n}$$

Théorème ▶ Comportement à l'infini de la suite géométrique (q^n) avec q réel

	$q\leqslant -1$	$-1<q<1$	$q=1$	$q>1$
$\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=$				

Démonstration dans le cas où $q>1$
Prérequis : $\forall\alpha>0,\ \forall n\in\mathbb{N},\ (1+\alpha)^n\geqslant 1+n\alpha$.
Soit $u_n=q^n$. Si $q>1$, on peut poser $q=1+\alpha$ avec $\alpha>0$.
$\forall n\in\mathbb{N}$, on a alors $q^n=(1+\alpha)^n$.
D'après le prérequis $(1+\alpha)^n\geqslant 1+n\alpha$, donc $q^n\geqslant 1+n\alpha$.
Or $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+n\alpha=+\infty$ car $\alpha>0$, donc, d'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=+\infty$.

Recherche

Exercice 12 : Déterminer les limites des suites définies pour tout entier naturel n par :

$$u_n=\frac{2}{3^n}\ ;\ v_n=\frac{-3}{\sqrt{2}^n}\ ;\ w_n=\frac{(-3)^n}{5}\ ;\ p_n=2^n-3^n$$

5. Algorithme de seuil et programmation en Python

Lorsqu'une suite diverge vers $+\infty$, alors pour toute valeur de A, il existe un plus petit rang n_0 à partir duquel tous les termes de la suite sont supérieurs à A, ce qui s'écrit en langage symbolique :

$$\boxed{\exists\, n_0\in\mathbb{N}\,/\,\forall n\in\mathbb{N}, n\geqslant n_0, u_n\geqslant \mathrm{A}}$$

La détermination du rang n_0 à partir duquel les termes de la suite u_n dépasse le seuil A, peut s'obtenir à partir d'un algorithme, appelé originalement **algorithme de seuil**.

De manière analogue, lorsqu'une suite diverge vers $-\infty$, alors pour toute valeur de A, il existe un plus petit rang n_0 à partir duquel tous les termes de la suite sont inférieurs à A, ce qui s'écrit en langage symbolique :

$$\boxed{\exists n_0 \in \mathbb{N}, / \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0, u_n \leqslant \mathrm{A}}$$

A titre d'exemple ▶ Vidéos d'Yvan Monka pour programmer un algorithme de seuil

- Programmer sous TI
- Programmer sous Casio
- Programmer en Python

TI Casio Python

Développer les automatismes avec Labomep/wim's

Exercice 13 : savoir utiliser la calculatrice pour émettre des conjectures et déterminer n_0.
Exercice 14 : comprendre une boucle non bornée.
Exercice 15 : savoir programmer en Python un algorithme de seuil.
Exercice 16 : conjecturer des limites, programmer en python et déterminer un seuil à la calculatrice.

Exercice 13 **Exercice 14** **Exercice 15** **Exercice 16**

Recherche

Exercice 17 : On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier n par $u_n = 3n^2 + 5n + 2$.

1. Démontrer que cette suite est strictement croissante.
2. Démontrer que cette suite diverge vers $+\infty$.
3. On saisit une valeur A.
   Cet algorithme en pseudo-code incomplet permet de déterminer, quel que soit la valeur A, le plus petit rang n_0 à partir duquel $u_{n_0} > A$. Cette valeur est la dernière stockée dans la variable n.
   Compléter l'algorithme en pseudo-code ci-contre.
4. Compléter le programme en Python sur la plateforme Jupyter et le tester lorsque A$=10\,000$.
5. Tester la fonction pour différentes valeurs de A et compléter le tableau avec les résultats trouvés.

A	10	10^2	10^5	10^8
n_0	………	………	………	………

$n \longleftarrow \ldots\ldots$
$u \longleftarrow \ldots\ldots$
Tant que $u \ldots\ldots A$
  $n \longleftarrow n+1$
  $u \longleftarrow \ldots\ldots\ldots$
Fin Pour

Jupyter

Exercice 18 : On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie ainsi : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + 2n + 1. \end{cases}$

1. Démontrer que cette suite est strictement croissante.
2. Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > n$.
3. En déduire la limite de cette suite.
4. Ecrire un algorithme qui, pour un nombre A donné, détermine le plus petit rang n_0 tel que $u_{n_0} > A$.

Codage en Python

```
def seuil(A) :
    u=2
    n=0
    while u ... ...  :
        u= ...
        n= ...
    return ...
```

Le compléter sur la plateforme Jupyter .

6. Suites majorées, minorées et bornées

Définition ▶ Suite minorée, majorée, bornée

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, s'il existe un réel M supérieur à tous les termes de la suite.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée si : $\exists\ M \in \mathbb{R}\ /\ \forall\ n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant M$.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée, s'il existe un réel m inférieur à tous les termes de la suite.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée si : $\exists\ m \in \mathbb{R}\ /\ \forall\ n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant m$.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, si elle est minorée et majorée.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si : $\exists\ m \in \mathbb{R},\ \exists\ M \in \mathbb{R}\ /\ \forall\ n \in \mathbb{N},\ m \leqslant u_n \leqslant M$.

Recherche

Exercice 19 : soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = 3 + \frac{2}{n}$, démontrer que (u_n) est bornée.

A titre d'exemple

- ☐ Toute suite croissante est minorée par son premier terme : $u_n \geqslant u_{n-1} \geqslant \cdots \geqslant u_2 \geqslant u_1 \geqslant u_0$.
- ☐ Toute suite décroissante est majorée par son premier terme : $u_n \leqslant u_{n-1} \leqslant \cdots \leqslant u_2 \leqslant u_1 \leqslant u_0$.
- ☐ Les suites de terme général $u_n = n$, $u_n = n^2$ et $u_n = \sqrt{n}$ sont croissantes. Elles sont donc toutes minorées par leur premier termes u_0 , qui vaut 0. Mais ces suites, dont on a vu précédemment qu'elles divergeaient vers $+\infty$, ne sont pas majorées ; elles ne sont pas bornées.
- ☐ Les suites de terme général $u_n = \frac{1}{n}$, $u_n = \frac{1}{n^2}$ et $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ sont décroissantes. Elles sont donc toutes majorées par leur premier terme qui vaut $u_1 = 1$, car $n \in \mathbb{N}^*$.

  Ces suites sont toutes minorées par zéro. Elles sont donc bornées par 0 et 1.
- ☐ Les suites de terme général $\sin(n)$, $\cos(n)$ et $(-1)^n$ sont majorées par 1 et minorées par -1, donc elles sont bornées.

Propriété

Une suite croissante non majorée a pour limite $+\infty$.

Démonstration
Soit A un réel quelconque. La suite (u_n) n'est pas majorée, donc il existe au moins un entier p tel que : $u_p > A$. La suite (u_n) est croissante, donc pour tout entier $n \geqslant p$, $u_n > A$, ce qui justifie que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Propriété

Si une suite est croissante et admet pour limite ℓ, alors la suite est majorée par ℓ.

Démonstration
Pour démontrer ce résultat, on va réaliser un raisonnement par l'absurde, c'est-à-dire « prêcher le faux pour avoir le vrai ». Expliquons ce qu'est précisément un raisonnement par l'absurde :

Rappel à propos du raisonnement par l'absurde :

> *Pour établir qu'une proposition est vraie, on va démontrer que la proposition contraire débouche sur un résultat absurde. Autrement dit pour démontrer qu'une proposition A est vraie, on va supposer que la proposition A est une proposition fausse. Par une suite de déductions logiques, on arrivera à un résultat absurde (comme par exemple $1 = 0$) ; on pourra alors conclure que l'hypothèse de départ est fausse, c'est-à-dire que la proposition « A est fausse » est fausse. On aura alors prouvé que la proposition A est vraie.*

Soit (u_n) une suite croissante qui admet une limite finie ℓ.

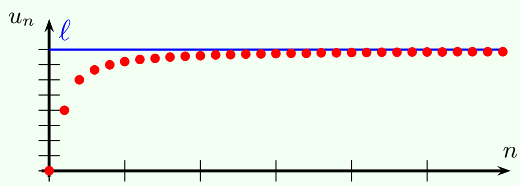
Supposons que la suite ne soit pas majorée par ℓ.

Alors : $\exists\, p \in \mathbb{N} /\ u_p > \ell$.
Soit I l'intervalle ouvert $]\ell - 1; u_p[$, qui contient la limite ℓ. La suite (u_n) est croissante, donc : $\forall n \geqslant p$, $u_n \geqslant u_p$.
Il existe alors un intervalle ouvert I contenant ℓ qui ne contient aucun des termes suivant u_p ; c'est absurde, car la suite converge vers ℓ.

Par conséquent l'hypothèse est fausse : la suite est donc majorée par ℓ.

Propriété ▶ Convergence d'une suite monotone (admis)

- Si une suite croissante est majorée, alors elle est convergente.
- Si une suite décroissante est minorée, alors elle est convergente.



Un exemple et un corrigé avec une Vidéo d'Yvan Monka.

Exercice 20 : Convergence d' une suite monotone .

Développer les automatismes avec Labomep/wim's

Exercice 21 : Convergence d'une suite monotone .

Recherche

Exercice 22 : on considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie ainsi : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}\ ,\ u_{n+1} = \dfrac{1}{5}u_n + 4 \end{cases}$

1. Démontrer par récurrence que cette suite est majorée par 5.
2. Exprimer $u_{n+1} - u_n$; puis en utilisant le résultat précédent, montrer que la suite est croissante.
3. Justifier que cette suite converge vers un nombre ℓ.
4. Déterminer la valeur de la limite ℓ.
5. a) Expliquer la ligne 5 du programme en Python ci-contre.

   b) Compléter cette fonction, qui, pour un nombre r donné, renvoie le plus petit rang n_0 tel que $u_{n_0} \in [\ell - r, \ell]$.

   Utiliser la plateforme Jupyter .

   c) Tester la fonction pour différentes valeurs de r et compléter le tableau avec les résultats trouvés.

r	$r=1$	$r=10^{-1}$	$r=10^{-2}$	$r=10^{-3}$
n_0	....	....	....	....

Codage en Python

```
1 def seuil(r) :
2     l= ...
3     u=1
4     n=0
5     while (u<l-r) or (u>l)  :
6         u= ...
7         n=n+1
8     return ...
```

6. a) Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $v_n = u_n - 5$ pour tout entier n. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique, donner son premier terme et sa raison.

   b) Exprimer v_n en fonction de n.

   c) En déduire une relation explicite pour u_n, puis, en justifiant, retrouver la valeur de ℓ.

Développer les automatismes avec Labomep/wim's

Exercice 23 : Terme général et limite d'une suite arithmético-géométrique.

Recherche 1 ► Problème de type bac

On considère la suite (u_n) à valeurs réelles définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 8}.$$

Partie A : Conjectures

Les premières valeurs de la suite (u_n) ont été calculées à l'aide d'un tableur dont voici une capture d'écran :

	A	B
1	n	u_n
2	0	1
3	1	0,111 111 11
4	2	0,013 698 63
5	3	0,001 709 4
6	4	0,000 213 63
7	5	2,670 3E−05
8	6	3,337 9E−06
9	7	4,172 3E−07
10	8	5,215 4E−08
11	9	6,519 3E−09
12	10	8,149 1E−10

1. Quelle formule peut-on entrer dans la cellule B3 et copier vers le bas pour obtenir les valeurs des premiers termes de la suite (u_n) ?
2. Quelle conjecture peut-on faire sur les variations de la suite (u_n) ?
3. Quelle conjecture peut-on faire sur la limite de la suite (u_n) ?
4. Écrire un algorithme calculant u_{30}.

Partie B : Étude générale

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.
2. Étudier les variations de la suite (u_n).
3. La suite (u_n) est-elle convergente ? Justifier.

Partie C : Recherche d'une expression du terme général

On définit la suite (v_n) en posant, pour tout entier naturel n,

$$v_n = 1 + \frac{7}{u_n}.$$

1. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 8 dont on déterminera le premier terme.
2. Justifier que, pour tout entier naturel n,

$$u_n = \frac{7}{8^{n+1} - 1}.$$

3. Déterminer la limite de la suite (u_n)

7. Approfondissement

Recherche ▶ Grand Oral

Étude de la convergence de la méthode de Héron.

Exemple de question : pourquoi la méthode de Héron permet d'obtenir rapidement une approximation de la racine carrée d'un nombre positif A ?

Situation déclenchante :
Sujet riche qui mêle histoire, culture, et qui fait intervenir de nombreux éléments du programme à tous les niveaux ; le sujet permet d'aborder différents types de démonstration : raisonnement par l'absurde, récurrence, raisonnement déductif,...
La situation déclenchante est liée à la richesse du problème historique qui mêle la géométrie et l'analyse et débouche sur des programmes en Python. De nombreux approfondissements sont possibles.

- Comprendre que les nombres réels, tels que nous les connaissons, sont issus d'un processus lent.
- Évoquer la découverte de l'irrationnalité de certains nombres comme la longueur de la diagonale d'un carré de côté 1 (raisonnement par l'absurde).
- Expliquer d'où vient la formule de récurrence de la suite.
- Établir la preuve de la convergence de la méthode de Héron.
- Programmer en Python pour approcher, à une précision souhaitée, la racine carrée d'un nombre positif.
- Approfondir en parlant de la vitesse de convergence de la suite. La comparer avec une autre méthode : dichotomie par exemple.
- Approfondir en montrant que la méthode de Héron est un cas particulier de la méthode de Newton et de la méthode de la tangente.

L'élève peut avoir rencontré ce problème à différents niveaux de sa scolarité. Il peut alors justifier pourquoi ce thème l'a intéressé(e).

Si on attribue à Héron l'Ancien (ier siècle av. J.-C), encore appelé Héron d'Alexandrie en référence à la ville grecque, une formule récurrente d'approximation de la racine carrée d'un nombre A, la méthode semblait connu des Babyloniens, plusieurs siècles auparavant ; c'est pourquoi l'algorithme de Héron s'appelle aussi l'algorithme de Babylone.

I. L'algorithme de Babylone et la suite $\begin{cases} \mathbf{u_0} = \boldsymbol{a} \\ \forall \mathbf{n} \in \mathbb{N}, \mathbf{u_{n+1}} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\left(\mathbf{u_n} + \dfrac{\mathbf{A}}{\mathbf{u_n}}\right). \end{cases}$

On souhaite construire un carré d'aire a cm^2 ce qui revient, avec les notations d'aujourd'hui, de construire un segment de longueur $\sqrt{a}$ cm. Tout comme les Grecs, nous allons effectuer une construction géométrique pas à pas.

1. **Etape 0.**
   On considère un rectangle de longueur u_0 et d'aire A.
   Exprimer sa largeur l_0 en fonction de A et u_0.
2. **Etape 1.**
   Soit un nouveau rectangle d'aire A dont la longueur u_1 est la moyenne arithmétique de u_0 et l_0.
   Exprimer u_1 en fonction de A et u_0.
3. **Etape 2.**
   De manière analogue, on considère un nouveau rectangle d'aire A dont la longueur u_2 est la moyenne arithmétique de la longueur et la largeur du précédent rectangle.
   Exprimer u_2 en fonction de A et u_1.
4. **Etape (n+1).**
   En réitérant le raisonnement précédent, exprimer la longueur u_{n+1} en fonction de A et u_n.

La répétition des différentes étapes est le fondement de l'algorithme de Héron (de Babylone).

II. Etude de la suite $(\mathbf{u_n})$ définie par $\begin{cases} \mathbf{u_0 = a} \\ \forall \mathbf{n} \in \mathbb{N}, \mathbf{u_{n+1}} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\left(\mathbf{u_n} + \dfrac{\mathbf{A}}{\mathbf{u_n}}\right). \end{cases}$

On choisit le réel a de manière à ce que $a \geqslant \sqrt{A}$.
On pose f la fonction définie sur $\left[\sqrt{A}; +\infty\right[$ par $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{A}{x}\right)$.

1. Démontrer que f est strictement croissante et continue *(Nécessaire d'avoir vu le chapitre sur la continuité)* sur $\left[\sqrt{A}; +\infty\right[$.
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant \sqrt{A}$, autrement dit que la suite (u_n) est minorée par $\sqrt{A}$.
3. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.
4. Démontrer que la suite est convergente.
5. Déterminer sa limite.
6. Prolongement possible : la convergence quadratique de la suite (u_n). Comparaison de la vitesse de convergence avec, par exemple, la méthode dichotomie *(voir chapitre sur la continuité)*.
   $u_{n+1} - \sqrt{A} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{A}{u_n}\right) - \sqrt{A} = \dfrac{1}{2u_n}\left(u_n^2 - 2u_n\sqrt{A} + A\right) = \dfrac{1}{2u_n}\left(u_n - \sqrt{A}\right)^2$
   Si $A \geqslant 1, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant 1$ et $u_{n+1} - \sqrt{A} \leqslant \dfrac{1}{2}\left(u_n - \sqrt{A}\right)^2$.
   Ainsi, si à l'étape n, $u_n - \sqrt{A} \leqslant 10^{-n}$ alors à l'étape suivante $u_{n+1} - \sqrt{A} \leqslant 10^{-2n}$
7. Lien avec la méthode de Newton

III. Application, algorithme et programmation en Python.

1. Déterminer les valeurs exactes de u_1, u_2, u_3 et u_4 dans le cas où $u_0 = 4$ et $A = 5$, puis en donner une valeur arrondie à 10^{-6} près.

2. Construire les rectangles de longueurs u_0, u_1, u_2, u_3, puis u_4.

3. Compléter la fonction suivante qui retourne N termes de la suite (u_n).

Codage en Python

```
def babylone(A,a,N) :
    l=[]
    u=a
    for i in range(N)  :
        l.append(u)
        u= ...
    return ...
```

4. Donner alors une valeur arrondie de $\sqrt{5}$ à 10^{-5} près. Construire un carré de côté u_4. Quelle est son aire ? Conclure.

5. Tester la fonction suivante en saisissant par exemple l'instruction « trace(2,2,8) » ! Que fait-il ?
La fonction « babylone » est appelée par la fonction « trace ».

Codage en Python

```
import turtle
from turtle import*


def trace(A,a,N) :
#A  : nombre dont on cherche la racine carrée
#a  : valeur approchée par excès de la racine carrée
#N  : nombre de rectangles à tracer
    up()
    goto(-450,-350)
    down()
    setheading(-90)
    l=babylone(A,a,N)
    for i in range(N) :
        if i%4==0 :
            turtle.pencolor("orange")
        elif i%4==1 :
            turtle.pencolor("blue")
        elif i%4==2 :
            turtle.pencolor("red")
        elif i%4==3 :
            turtle.pencolor("green")
        for j in range(2) :
            left(90)
            forward(l[i]*700/a)
            left(90)
            forward((A*700/a)/l[i])
    done()
```

Ces programmes se retrouvent sur la plateforme Jupyter

Quelques éléments bibliographiques qui peuvent aider :

https://www.irem.univ-mrs.fr/IMG/pdf/BabyloneV2-2.pdf
https://fr.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9thode_de_H%C3%A9ron
http://mediamaths.over-blog.com/article-web-et-mathematiques-babyloniennes-45144085.html

Mais aussi et surtout ! De André Seguin IREM de la Réunion
https://maths.discip.ac-caen.fr/spip.php?article466
https://irem.univ-reunion.fr/IMG/pdf/methode_heron.pdf

Et d'Alain Busser
https://irem.univ-reunion.fr/spip.php?article531