Chapitre XIII

Intégration d'une fonction continue sur un intervalle borné

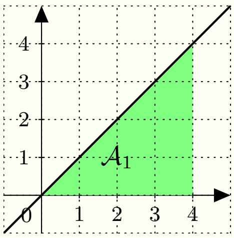
1. Intégrale d'une fonction continue et positive sur un intervalle

Dans toute cette partie, f est une fonction **continue** et **positive** sur un intervalle $[a\ ;\ b]$.

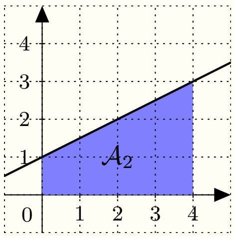
Activité 1 ▶ Calculs d'aires sous la courbe d'une fonction à l'aide de formules du collège

Dans chacun des cas, donner la valeur de l'aire de la partie du plan délimitée par chacune des courbes, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 4$, en unités d'aire.

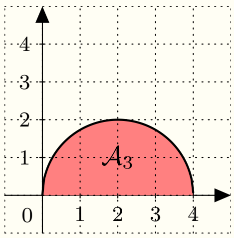
a) $f(x) = x$



b) $g(x) = 0,5x + 1$



c) $h(x) = \sqrt{4 - (x-2)^2}$



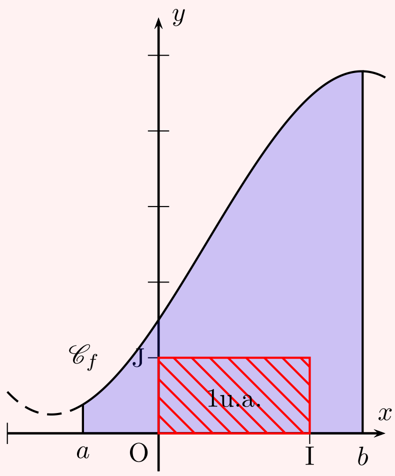
Définition 1 ▶ Intégrale d'une fonction continue et positive

- Dans un repère orthogonal (O ; I, J), on appelle unité d'aire, l'aire du rectangle de côtés [OI] et [OJ].
- Soit f une **fonction continue et positive sur un intervalle** $[\boldsymbol{a}\ ;\ \boldsymbol{b}]$. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

  On appelle **intégrale de f entre a et b, l'aire, exprimée en unités d'aire, de la surface délimitée par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.**

  Cette aire est appelée « **l'aire sous la courbe de** f ».

  Cette intégrale se note : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ et se lit « intégrale de a à b de f ». a est la borne inférieure de cette intégrale et b la borne supérieure.



Remarques :

- « f positive sur I » signifie que « pour tout x de I, $f(x) \geq 0$ ».

- $\displaystyle\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$ avec f positive est un nombre positif (car elle représente une aire).
- $\displaystyle\int_a^a f(x)\ \mathrm{d}x = 0$ car la surface est réduite à un segment.
- La variable x peut être remplacée par tout autre variable, notamment t (souvent utilisé en physique pour désigner le temps) ou u. On parle de variable muette.

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\ \mathrm{d}u = \dots.$$

Exemple 1 ▶ Aire sous la courbe d'une fonction sous forme d'intégrale

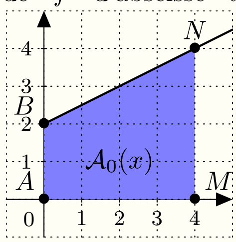
Écrire les aires de l'activité 1 sous forme d'intégrales :

a) $\mathcal{A}_1 =$ **b)** $\mathcal{A}_2 =$ **c)** $\mathcal{A}_3 =$

Activité 2 ▶ Lien entre intégrale et primitive

On considère la fonction $f(x) = \dfrac{1}{2}x + 2$ sur $\mathbb{R}^+$.
M est un point de coordonnées $(x; 0)$ et N est le point de la courbe de f d'abscisse x.

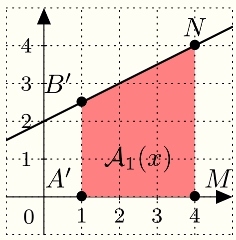
PARTIE A



1. Montrer que l'aire $\mathcal{A}_0(x)$ du trapèze $AMNB$ est égale à $\mathcal{A}_0(x) = \dfrac{1}{4}x^2 + 2x$.
2. Exprimer, à l'aide d'une intégrale, l'aire colorée sous la courbe de la fonction f entre 0 et x.
3. Calculer la dérivée de la fonction $\mathcal{A}_0$. Quel lien peut-on faire entre $\mathcal{A}_0$ et la fonction f ?

PARTIE B

On suppose dans cette partie que $x \geqslant 1$.



1. Exprimer l'aire $\mathcal{A}_1(x)$ du trapèze $A'M'NB$ en fonction de $\mathcal{A}_0(x)$.
2. Exprimer, à l'aide d'une intégrale, l'aire colorée sous la courbe de la fonction f entre 1 et x.
3. Calculer la dérivée de la fonction $\mathcal{A}_1$. Quel lien peut-on faire entre $\mathcal{A}_1$ et la fonction f ?

Théorème 1 ▶ Théorème fondamental : Lien entre intégrale et primitive

Si f est une fonction **continue et positive** sur $[a\ ;\ b]$, alors la fonction :

$$F_a(x) = \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$$

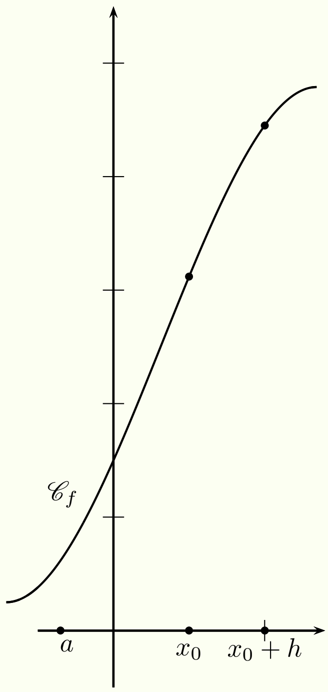
est **la** primitive de la fonction f sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$ telle que $F_a(a) = 0$.

Démonstration uniquement pour f fonction continue, strictement croissante et positive.

- Soient x_0 et $x_0 + h$ deux réels de cet intervalle avec $h > 0$.
  Le but est de montrer que $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} \dfrac{F_a(x_0+h) - F_a(x_0)}{h} = f(x_0)$.
  Colorier sur le graphique ci-contre la surface d'aire $F_a(x_0 + h) - F_a(x_0)$.
  Donner un encadrement de cette aire par des rectangles :

  $$\leqslant F_a(x_0 + h) - F_a(x_0) \leqslant$$

  Conclure :



- Soient x_0 et $x_0 + h$ deux réels de cet intervalle avec $h < 0$.
  On établit de la même façon que $f(x_0 + h) \leqslant \dfrac{F_a(x_0+h) - F_a(x_0)}{h} \leqslant f(x_0)$
  et donc que $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h<0}} \dfrac{F_a(x_0+h) - F_a(x_0)}{h} = f(x_0)$
- Conclusion : F_a est dérivable en x_0 et $F_a'(x_0) = f(x_0)$. Avec la définition de l'intégrale, $F_a(a) = 0$ et finalement F_a est la primitive de la fonction f sur $[a\ ;\ b]$ telle que $F_a(a) = 0$.

Conséquence : Toute fonction **continue et positive** sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ admet des primitives.

Activité 3 ▶ Calculer une intégrale à l'aide d'une primitive

On reprend l'activité 2 : on considère la fonction $f(x) = \dfrac{1}{2}x + 2$ définie sur $\mathbb{R}^+$.

1. Calculer $\displaystyle\int_2^4 f(x)\ \mathrm{d}x$ en utilisant la fonction $\mathcal{A}_0$.
2. Calculer $\displaystyle\int_2^4 f(x)\ \mathrm{d}x$ en utilisant la fonction $\mathcal{A}_1$.

Propriété 1 ► Calculer une intégrale à l'aide d'une primitive

Soit f une fonction **continue et positive** sur un intervalle $[a\ ;\ b]$.
Si F est une primitive de la fonction f, alors

$$\boldsymbol{\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)}$$

Démonstration
On sait que la fonction F_a définie par $F_a(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$ est une primitive de f.
De plus, si F est une primitive de f, alors il existe une constante k telle que $F_a(x) = F(x) + k$.
Comme $F_a(a) = 0$ on en déduit que $k = -F(a)$ et donc $F_a(x) = F(x) - F(a)$.
$\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = F_a(b) = F(b) - F(a)$

Remarque : Si on connaît une primitive de la fonction f **continue et positive** sur un intervalle $[a\ ;\ b]$, on peut calculer la valeur exacte de $\displaystyle\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$.

Exemple 2 ► Calculer une intégrale à l'aide d'une primitive

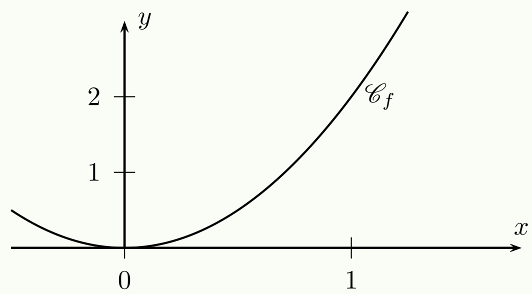
Donner une primitive sur $]0\,;+\infty[$ de la fonction f telle que $f(x) = \dfrac{1}{x}$, puis calculer $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}\ \mathrm{d}x$.

Exercice 1 ► Calculer une aire à l'aide d'une intégrale

Soit la fonction f définie sur $[0\,;1]$ par $f(x) = 2x^2$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère $(O\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ orthogonal d'unités 3 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

1. La courbe $\mathscr{C}_f$ est construite ci-dessous, colorier la surface S comprise entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.
2. Déterminer l'aire de S, en unités d'aire.
3. Donner cette aire en cm^2.

Correction :

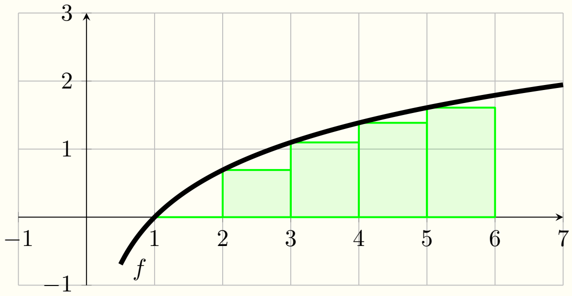


Remarque : Si on ne connaît pas de primitive de la fonction f **continue, positive et monotone** sur un intervalle $[a\ ;\ b]$, on peut encadrer la valeur de $\displaystyle\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$ à l'aide de la méthode des rectangles.

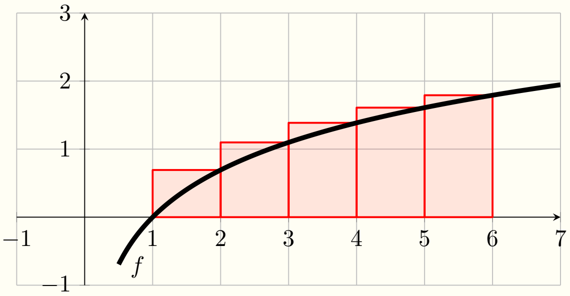
Activité 4 ► Encadrer une intégrale par la méthode des rectangles

On ne connaît pas (pour l'instant) de primitive de la fonction ln, mais on désire estimer $\displaystyle\int_1^6 \ln(x)\,\mathrm{d}x$.

1. En divisant l'intervalle $[1\,;\,6]$ en 5 intervalles de même amplitude, encadrer $\displaystyle\int_1^6 \ln(x)\,\mathrm{d}x$.

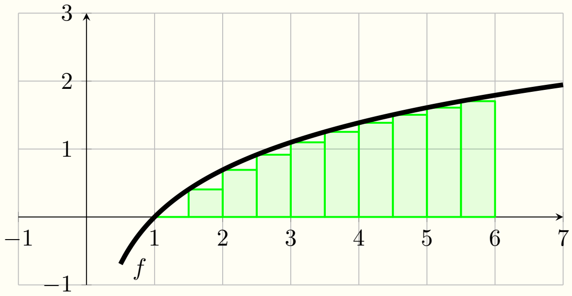


$\mathcal{A}_i =$

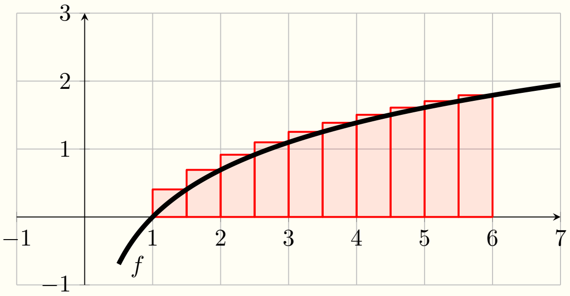


$\mathcal{A}_s =$

2. En divisant l'intervalle $[1\,;\,6]$ en 10 intervalles de même amplitude, encadrer $\displaystyle\int_1^6 \ln(x)\,\mathrm{d}x$.



$\mathcal{A}_i =$



$\mathcal{A}_s =$

Remarque : Plus le nombre de rectangles augmente, meilleur est l'encadrement.

Lien vers le fichier Geogebra en ligne

Entraînement Labomep et/ou wim's 1

Exemple 1 Exemple 2 Exemple 2

Algorithme et Python 1 ► Encadrement par la méthode des rectangles

Mettre les trois lignes suivantes (à mettre dans le bon ordre) dans le programme de droite pour qu'il retourne l'encadrement de $\displaystyle\int_1^6 \ln(x)\ \mathrm{d}x$, n correspondant au nombre de rectangles, h la largeur des rectangles, i la somme des aires des rectangles inférieurs et s la somme des aires des rectangles supérieurs.

Codage en Python

```
x=x+h
i=i+h*ln(x)
s=s+h*ln(x)
```

Lien Jupyter

Codage en Python

```
import numpy as np
from math import *
def ln(x) :
    return np.log(x)
def encadrementln(n) :
    h=5/n
    x=1
    i=0
    s=0
    for k in range(n) :
        ...
        ...
        ...
    return (i,s)
```

2. Intégrale d'une fonction continue sur un intervalle

Théorème 2 ► Condition suffisante sur l'existence de primitives

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives.

Définition 2 ► Intégrale d'une fonction continue de signe quelconque

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, F une primitive de f, et a, b deux réels quelconques de I.
On appelle **intégrale de f entre a et b la différence $F(b) - F(a)$**.
Cette intégrale est notée :

$$\boldsymbol{F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x}$$

Remarque : Si f n'est pas positive on ne peut plus interpréter géométriquement l'intégrale comme l'aire d'un domaine.

Exemple 3 ► Calculer une intégrale à l'aide d'une primitive

1. Calculer $\displaystyle\int_{-4}^{3} (x^3 - x)\ \mathrm{d}x$

2. Calculer $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}\ \mathrm{d}x$

Entraînement Labomep et/ou wim's 2

Exemple 3	Exemple 3	Exemple 3	Exemple 3	Exemple 3	Exemple 3	Exemple 3
$ax+b$	$\dfrac{u'}{u^2}$	e^x	e^{ax}	$x\mathrm{e}^{ax^2}$	$\dfrac{k}{ax+b}$	Mélange

Propriété 2 ► Propriétés des intégrales

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, a, b, c trois réels de I et k un réel quelconque.

- $\displaystyle\int_a^a f(x)\ \mathrm{d}x = 0.$
- $\displaystyle\int_b^a f(x)\ \mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x.$
- **Propriétés de linéarité** de l'intégrale :
  $\displaystyle\int_a^b k \times f(x)\ \mathrm{d}x = k \times \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_a^b (f(x)+g(x))\ \mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x.$
- **Relation de Chasles** :
  $\displaystyle\int_a^c f(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\ \mathrm{d}x.$
- **Propriété de positivité** :
  soit $a < b$, si $f(x) \geqslant 0$ pour tout x de $[a\ ;\ b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \geqslant 0.$
- **Propriété d'intégration des inégalités** :
  Si $f(x) \geqslant g(x)$ sur $[a\ ;\ b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \geqslant \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x$

Démonstration :

- $\displaystyle\int_a^a f(x)\ \mathrm{d}x = F(a) - F(a) = 0.$
- $\displaystyle\int_b^a f(x)\ \mathrm{d}x = F(a) - F(b) = -(F(b) - F(a)) = -\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x.$
- On sait que kF est une primitive de kf, donc :
  $$\int_a^b k \times f(x)\ \mathrm{d}x = (kF)(b) - (kF)(a) = k(F(b) - F(a)) = k \times \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x.$$
  Ensuite on utilise le fait que $F + G$ est une primitive de $f + g$.
- $(F(b) - F(a)) + (F(c) - F(b)) = F(c) - F(a).$
- Découle de la définition de l'intégrale dans le cas où f est positive.
- Si $f(x) \geqslant g(x)$ alors $f(x) - g(x) \geqslant 0$, donc $\displaystyle\int_a^b f(x) - g(x)\ \mathrm{d}x \geqslant 0$. On obtient alors le résultat attendu en utilisant la linéarité de l'intégrale.

Exemple 4 ▶ Calculer des intégrales en utilisant des propriétés

Soient f et g deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

On donne : $\displaystyle\int_1^2 f(x)\ \mathrm{d}x = 3$, $\displaystyle\int_1^2 g(x)\ \mathrm{d}x = -2$ et $\displaystyle\int_{-4}^1 f(x)\ \mathrm{d}x = 5$.

Calculer :

- $I = \displaystyle\int_1^2 7f(x)\ \mathrm{d}x$
- $J = \displaystyle\int_1^2 0,5g(x)\ \mathrm{d}x$
- $K = \displaystyle\int_1^2 (4f(x) - 5g(x))\ \mathrm{d}x$
- $L = \displaystyle\int_{-4}^2 f(x)\ \mathrm{d}x$

Exercice 2 ▶ Calculer des intégrales en utilisant des propriétés

On souhaite calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\mathrm{e}^x + 1}\ \mathrm{d}x$.

1. Dans l'exemple 3 nous avons déjà calculé $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}\ \mathrm{d}x$, rappeler sa valeur.
2. Calculer $I + J$.
3. En déduire la valeur de I.

Entraînement Labomep et/ou wim's 3

Exercice 2	Exemple 4	Exemple 4	Exercice 2
modif f	Linéarité	Linéarité	Étapes

3. Intégration par parties

Propriété 3 ▸ Intégration par parties

Soient u et v deux fonctions dérivables et dont les dérivées sont continues sur un intervalle $[a;b]$.

$$\boxed{\int_a^b \boldsymbol{u(x)v'(x)}\ \mathrm{d}\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{uv}]_a^b - \int_a^b \boldsymbol{u'(x)v(x)}\ \mathrm{d}\boldsymbol{x}}$$

Notation :
Le crochet $[F]_a^b$ est par définition $[F]_a^b = F(b) - F(a)$, donc :

$$[uv]_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a)$$

Démonstration :
La dérivée du produit uv est donnée par $(uv)' = u'v + uv'$. uv est donc une primitive de $u'v + uv'$ sur $[a\,;b]$, donc

$$[u(x)v(x)]_a^b = \int_a^b (u'(x)v(x) + u(x)v'(x))\ \mathrm{d}x = \int_a^b u'(x)v(x)\ \mathrm{d}x + \int_a^b u(x)v'(x)\ \mathrm{d}x$$

d'où la formule.

Remarque : L'intérêt de la propriété est de se ramener à une intégrale $\displaystyle\int_a^b u'(x)v(x)\ \mathrm{d}x$ plus facilement calculable que $\displaystyle\int_a^b u(x)v'(x)\ \mathrm{d}x$.

Exemple 5 ▸ Calcul de $\displaystyle\int_0^1 xe^x\ \mathrm{d}x$

Calculer $\displaystyle\int_0^1 xe^x\ \mathrm{d}x$.

Correction :
On pose $u(x) = x$ et $v'(x) = e^x$.
Alors $u'(x) = 1$ et une primitive de v' est $v(x) = e^x$. La formule d'intégration par partie donne :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 xe^x\ \mathrm{d}x &= \int_0^1 u(x)v'(x)\ \mathrm{d}x \\
&= [u(x)v(x)]_0^1 - \int_0^1 u'(x)v(x)\ \mathrm{d}x \\
&= [xe^x]_0^1 - \int_0^1 1e^x\ \mathrm{d}x \\
&= (1e^1 - 0e^0) - [e^x]_0^1 \\
&= e^1 - (e^1 - e^0) \\
&= 1
\end{aligned}$$

Exercice 3 ▸ Calcul de $\displaystyle\int_1^6 \ln(x)\ \mathrm{d}x$

En remarquant que $\ln(x) = \ln(x) \times 1$. Calculer $\displaystyle\int_1^6 \ln(x)\ \mathrm{d}x$.

Exercice 4 ▸ Intégrations par parties

1. Calculer $I_1 = \int_1^e x \ln x \, dx$.

2. Calculer $I_2 = \int_0^1 t e^{-2t} \, dt$.

3. Calculer $I_3 = \int_{-5}^4 (m^2+1)e^m \, dm$.

4. Calculer $I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cos t \, dt$ puis $I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \sin t \, dt$.

5. Calculer $I_5 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \times e^x \, dx$.

Entraînement Labomep et/ou wim's 4

Exercice 4 $x\ln(x)$

Exercice 4 te^{at}

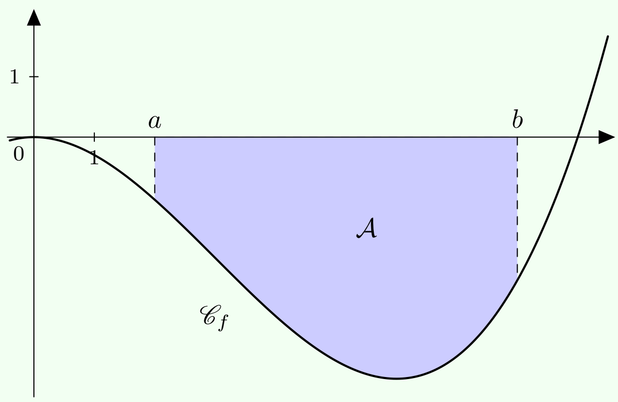
4. Des applications du calcul intégral

a) Calcul d'aires

Propriété 4 ▸ Aire et fonction négative

Si f est continue et négative sur $[a\,;\,b]$, l'aire exprimée en unités d'aire de la surface plane délimitée par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axes des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$, est égale à

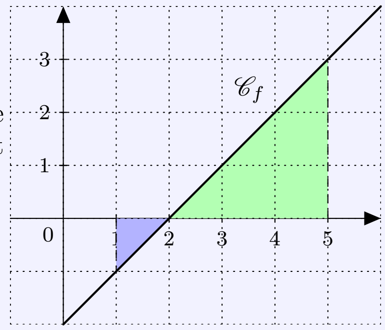
$$\mathcal{A} = -\int_a^b f(x) \, dx$$



Remarque : Si la fonction f change de signe sur un intervalle, pour calculer l'aire entre la courbe et l'axe des abscisses, on utilise la relation de Chasles sur des intervalles où la fonction est de signe constant.

Exemple 6 ▶ Calculer une intégrale avec des aires

Ci-contre, la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f. D'après le graphique, nous savons que l'aire du triangle bleu est de 0,5 u.a et que celle du triangle vert est de 4,5 u.a. Déterminer $\displaystyle\int_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x$.

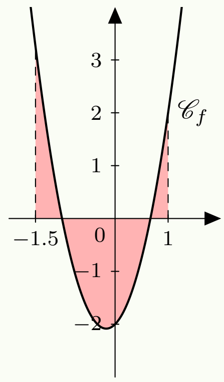


Entraînement Labomep et/ou wim's 5

Propriété 4 Exemple 6

Exercice 5 ▶ Calculer une aire avec des intégrales

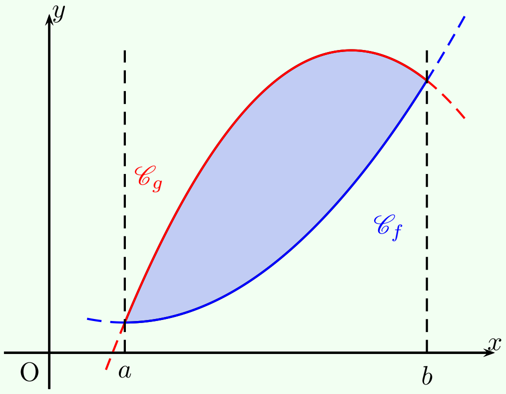
f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 3x^2 + x - 2$.
Voici ci-contre la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.
Calculer l'aire du domaine rouge en unités d'aire.



Propriété 5 ▶ Aire entre deux courbes

Si f et g sont deux fonctions continues sur $[a\,;b]$ telles que $f(x) \leqslant g(x)$, alors l'aire, exprimée en unités d'aire, de la surface comprise entre les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$, est égale à

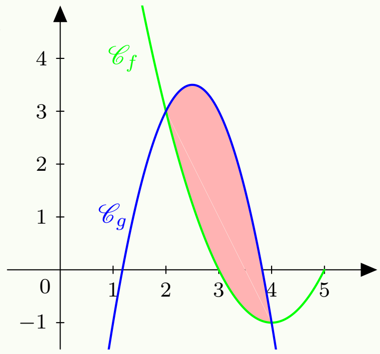
$$\int_a^b (g(x) - f(x))\ \mathrm{d}x$$



Exercice 6 ▶ Calculer une aire entre deux courbes

Soit $f : x \mapsto x^2 - 8x + 15$ et $g : x \mapsto -2x^2 + 10x - 9$ deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ dont une représentation graphique est donnée ci-contre.

1. Déterminer la position relative de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
2. Calculer l'aire du domaine rouge en unités d'aire.



b) Valeur moyenne d'une fonction

Activité 5 ▶ Valeur moyenne d'une fonction (à faire en ligne)

Trouver la valeur du curseur m pour que l'aire du rectangle $ABCD$ soit égal à $\displaystyle\int_{-1}^{1,5} f(x)\ \mathrm{d}x$. Lien

Définition 3 ▶ Valeur moyenne d'une fonction

Pour toute fonction f continue sur un intervalle $[a\,;b]$, on appelle **valeur moyenne de f sur $[a\,;b]$** le réel m tel que :

$$m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$$

Remarque : cette égalité s'écrit aussi $m(b-a) = \displaystyle\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$.

Illustration : dans le cas où f est strictement positive sur $[a\,;b]$, la valeur moyenne de f est la hauteur **m** du rectangle de largeur $b-a$ qui a la même aire que l'aire sous la courbe.
Sur la figure ci-contre, l'aire de la surface hachurée en rouge est égale à l'aire sous la courbe colorée en bleu.

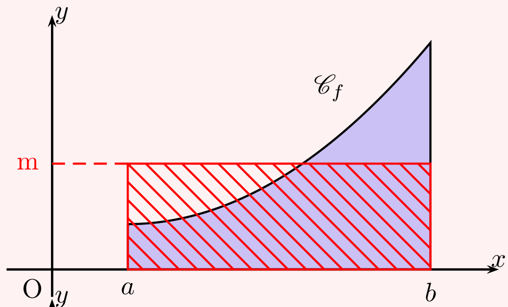
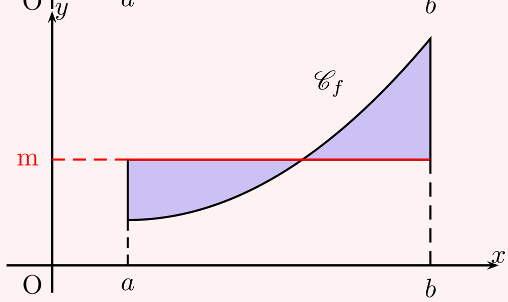


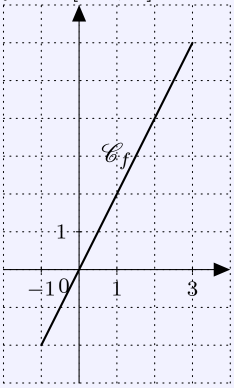
Illustration : Quelque soit le signe de f sur l'intervalle $[a\,;b]$, $\displaystyle\int_a^b f(x)-m\ \mathrm{d}x = 0$, graphiquement l'aire entre la courbe et la droite d'équation $y=m$ sur les intervalles où $f(x)>m$ est la même que l'aire entre la courbe et cette même droite sur les intervalles où $f(x)<m$.



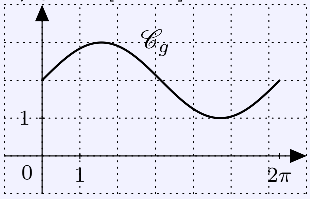
Exemple 7 ▶ Estimer la valeur moyenne d'une fonction graphiquement

Estimer graphiquement la valeur moyenne des fonctions suivantes sur l'intervalle considéré :

1) f sur $[-1\,;\,3]$.



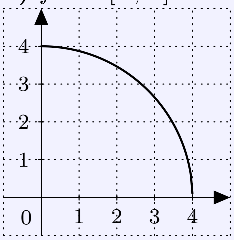
2) g sur $[0\,;\,2\pi]$.



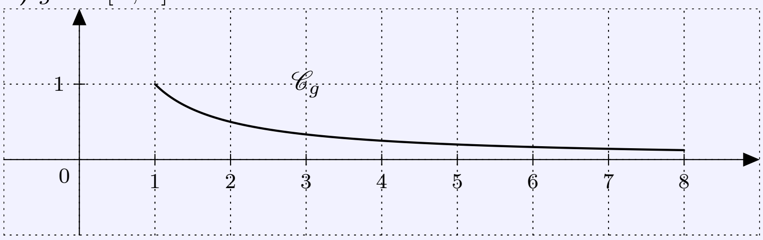
Exemple 8 ▶ Encadrer la valeur moyenne d'une fonction

Donner un encadrement, par deux nombres entiers consécutifs de la valeur moyenne des fonctions suivantes sur l'intervalle considéré.

1) f sur $[0\,;\,4]$.



2) g sur $[1\,;\,8]$.



Exemple 9 ▶ Calculer la valeur moyenne d'une fonction

Calculer la valeur moyenne de la fonction f telle que $f(x) = 2x$ sur $[-1\,;\,3]$.

Correction :

$m = \dfrac{1}{4}\displaystyle\int_{-1}^{3} 2x \,\mathrm{d}x.$

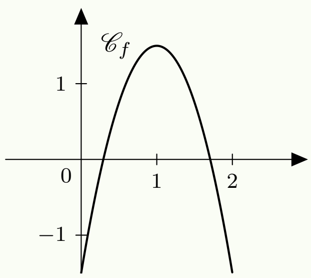
Une primitive de f est la fonction F telle que $F(x) = x^2$, donc $F(3) = 9$ et $F(-1) = 1$.

La valeur moyenne de la fonction f sur [-1 ; 3] est donc égale à $\frac{1}{4}(9-1) = 2$.

Exercice 7 ▶ Interpréter une valeur moyenne

Le bénéfice en milliers d'euros d'une production de q kg de produit de beauté est donné par :
$f(q) = -3q^2 + 6q - 1,5$.
La production de l'entreprise varie selon les jours entre 0 et 2 kg.
Déterminer la valeur moyenne du bénéfice de l'entreprise. Illustrer cette valeur sur le graphique.

Correction :



5. Problèmes

Intégrales et mouvement d'un mobile

Un mobile se déplace le long d'une droite à une vitesse constante $v_0 = 3\,\text{m.s}^{-1}$. Au temps $t_0 = 0$ et durant 10 s, il est soumis à une accélération constante $a = 0,25\,\text{m.s}^{-2}$. On dit alors que le mouvement est un mouvement rectiligne uniformément accéléré.
L'expression de la vitesse instantanée v en fonction du temps t est $v(t) = at + v_0$, où le temps t est exprimé en s, l'accélération a en m.s^{-2} et les vitesses v et v_0 en m.s^{-1}.

1. a) Donner l'expression de la vitesse instantanée du mouvement décrit ci-dessus.
   b) Représenter graphiquement cette fonction dans un repère orthonormé d'unité graphique 1 cm.
   c) Déterminer graphiquement en combien de temps le mobile aura atteint une vitesse instantanée de $4{,}5\,\text{m.s}^{-1}$.
   d) Retrouver ce résultat par un calcul.
2. a) À l'aide du graphique, donner une approximation de l'aire de la surface comprise entre l'axe des abscisses, la courbe représentative de la fonction v et les droites d'équations $x = 2$ et $x = 8$, en unités d'aire du repère.
   b) Calculer la valeur exacte de cette aire.
3. L'équation horaire d'un mouvement rectiligne uniformément accéléré exprime, en fonction du temps, la distance d parcourue par le mobile dans l'intervalle de temps $[0\,;\,t]$.
   a) sachant que $d(t) = \displaystyle\int_0^t v(x)\,\mathrm{d}x$, déterminer l'équation horaire de ce mobile.
   b) Calculer la distance parcourue durant les deux premières secondes.
   c) Que représente la valeur trouvée à la question 2.b) ?

Intégrales et économie

Un supermarché souhaite acheter des pommes à un fournisseur.
Ce fournisseur propose des prix au kilogramme, dégressifs en fonction de la masse de pommes commandée.
Pour une commande de x kilogrammes de pommes, le prix $P(x)$ en euros du kilogramme de fruits est donné par la formule :

$$P(x) = \frac{x+300}{x+100} \quad \text{pour } x \in [100\,;\,+\infty[.$$

Par exemple si le supermarché achète 300 kilogrammes de pommes, ils lui sont vendus $P(300) = \dfrac{600}{400} = 1,50$ euros le kilogramme.
Dans ce cas, le supermarché devra payer $300 \times 1,5 = 450$ euros au fournisseur pour cette commande.

Partie A : Étude du prix P proposé par le fournisseur

1. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} P(x)$.
2. Montrer que $P'(x) = -\dfrac{200}{(x+100)^2}$ sur $[100\,;\,+\infty[$.
3. Dresser le tableau de variations de la fonction P sur $[100\,;\,+\infty[$. Interpréter économiquement le résultat.

Partie B : Étude de la somme S à dépenser par le supermarché

On appelle $S(x)$ la somme en euros à dépenser par le supermarché pour une commande de x kilogrammes de pommes (ces fruits étant vendus par le fournisseur au prix de $P(x)$ euros par kilogramme).
Cette somme est donc égale à $S(x) = xP(x)$ pour $x \in [100\,;\,+\infty[$.

1. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} S(x)$.
2. Montrer que pour tout x appartenant à $[100\,;\,+\infty[$: $S(x) = x + 200 - 20000 \times \dfrac{1}{x+100}$.

3. En déduire une primitive T de S sur $[100\,;\,+\infty[$.

Partie C : Étude de différentes situations

1. Le magasin dispose d'un budget de 900 € pour la commande de pommes, déterminer la valeur arrondie, au kg près, de la masse maximum de pommes que le supermarché peut commander sans dépasser son budget.
2. Le supermarché estime acheter régulièrement, selon les saisons, entre 400 et 600 kg de pommes à ce fournisseur. Déterminer la valeur moyenne de S sur $[400\,;\,600]$ et donner le résultat arrondi à l'unité.

Intégrales et suites

Soit f la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ telle que :

$$f(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^x - x}$$

On admet que la fonction f est positive sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal du plan.
La courbe $\mathcal{C}$ est représentée en annexe.

Partie A

Soit la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n par $I_n = \displaystyle\int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x$.
On ne cherchera pas à calculer la valeur exacte de I_n en fonction de n.

1. Montrer que la suite (I_n) est croissante.
2. On admet que pour tout réel x de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, $\mathrm{e}^x - x \geqslant \dfrac{\mathrm{e}^x}{2}$.
   a) Montrer que, pour tout entier naturel n, $I_n \leqslant \displaystyle\int_0^n 2x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.
   b) Soit H la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ telle que :
   $$H(x) = (-x-1)\mathrm{e}^{-x}$$
   Déterminer la fonction dérivée H' de la fonction H.
   c) En déduire que, pour tout entier naturel n, $I_n \leqslant 2$.
3. Montrer que la suite (I_n) est convergente. On ne demande pas la valeur de sa limite.

Partie B

On considère l'algorithme suivant dans lequel les variables sont

- K et i des entiers naturels, K étant non nul ;
- A, x et h des réels.

```
A ← 0
x ← 0
h ← 1/K
Pour i variant de 1 à K
    | A ← A + h × f(x)
    | x ← x + h
Fin Pour
```

1. Reproduire et compléter le tableau suivant, en faisant fonctionner cet algorithme pour $K = 4$. Les valeurs successives de A seront arrondies au millième.

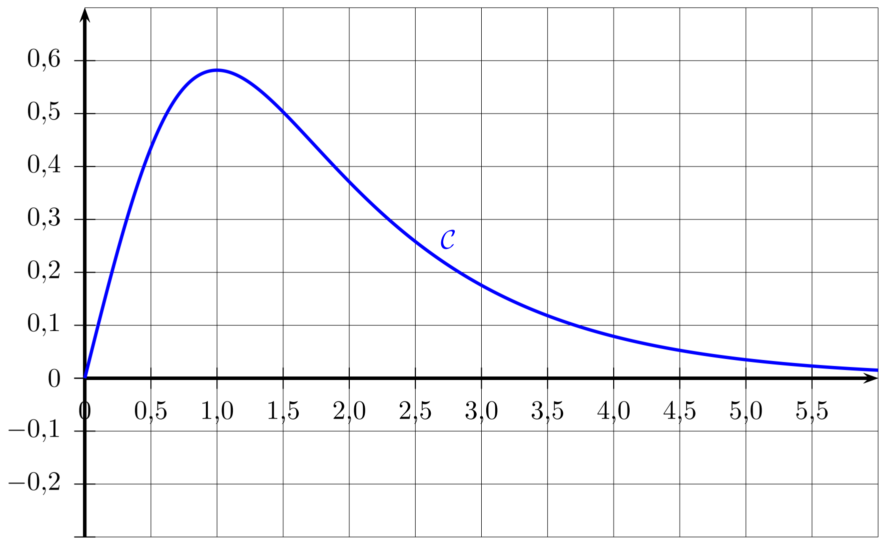
i	A	x
1		
2		
3		
4		

2. En l'illustrant sur l'annexe, donner une interprétation graphique du résultat affiché par cet algorithme pour $K = 8$.

3. Que donne l'algorithme lorsque K devient grand ?

Annexe

Courbe $\mathcal{C}$, représentative de la fonction f sur $[0\,;\,6]$



Courbe $\mathcal{C}$, représentative de la fonction f sur $[0\,;\,1]$