Sommaire

Chapitre XII

Fonctions Trigonométriques

1. Le cercle trigonométrique

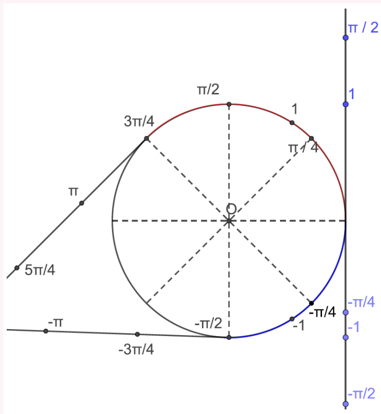
En guise d'explications

a. Le cercle trigonométrique est le cercle de rayon 1, orienté dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

b. La circonférence du cercle trigonométrique est égale à 2π.

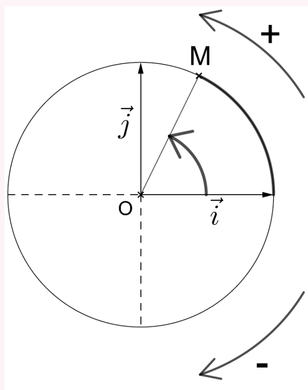
c. En enroulant la droite des réels sur le cercle trigonométrique, on fait correspondre tout nombre réel à un unique point du cercle trigonométrique, appelé son point-image.

d. En enroulant la droite des réels sur le cercle trigonométrique, tout point de ce cercle est le point-image d'une infinité de nombres réels.



e. Soit M un point du cercle trigonométrique, repéré par un nombre x.
x est la mesure en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{\mathrm{OM}}\right)$.
$x+2\pi$; $x+4\pi$; $x+6\pi$; etc ... et $x-2\pi$; $x-4\pi$; $x-6\pi$; etc ... repèrent le même point M. Tous ces nombres sont des mesures en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{\mathrm{OM}}\right)$.

$$\text{On note : } \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{\mathrm{OM}}\right) = x\,[2\pi]\,(\text{« modulo } 2\pi \text{ »})\ .$$



f. La mesure principale d'un angle orienté est son unique mesure appartenant à l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$.

Méthode ▶ pour déterminer la mesure principale :

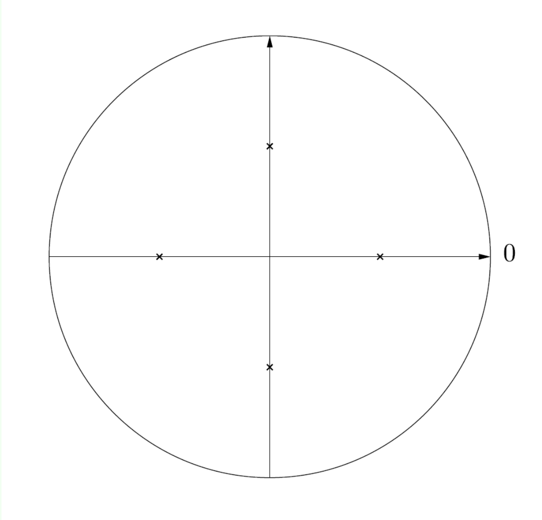
Soit $\frac{a\pi}{b}$ (a et b sont des nombres entiers, $b \neq 0$) la mesure d'angle dont on veut déterminer la mesure principale. On détermine le nombre **pair** $2n$ le plus proche de $\frac{a}{b}$.

$$\text{La mesure principale de } \frac{a\pi}{b} \text{ est égale à } \left(\frac{a}{b} - 2n\right)\pi.$$

Dans le cas où on cherche la mesure principale d'un angle de mesure « nombre impair »$\times\pi$, comme 27π, on ne peut pas déterminer de nombre pair le plus proche, mais la mesure principale est π.

Méthode

g. Les mesures principales remarquables à savoir placer sur le cercle trigonométrique sont les multiples de $\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{6}$.
La construction se fait à partir des milieux de rayons horizontaux et verticaux.



Définition 1

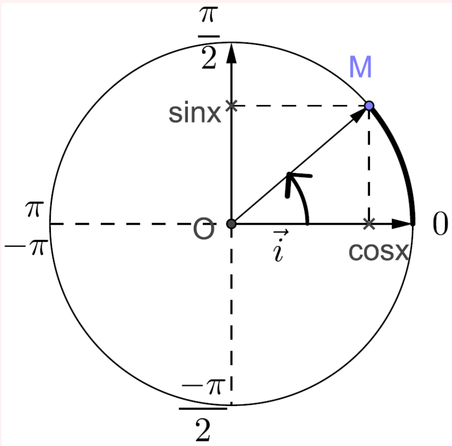
h. On définit le cosinus et le sinus d'un nombre réel à partir du cercle trigonométrique.

Soit x un nombre réel, et M son point-image sur le cercle trigonométrique :

- $\cos x$ est l'abscisse de M ;
- $\sin x$ est l'ordonnée de M.

On déduit de ces définitions que :

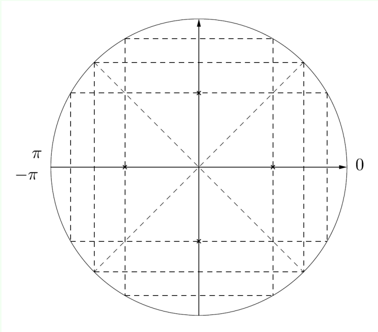
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$;
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$;
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$;
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ et $\sin(x + 2\pi) = \sin x$;
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$;



Propriété 1

i. Valeurs remarquables du cosinus et du sinus :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$					
$\sin x$					



Entraînement Labomep

Exercice 1 : Cosinus et sinus d'angles remarquables (niveau 1).
Exercice 2 : Cosinus et sinus d'angles remarquables (niveau 2).
Exercice 3 : Construire un point sur un cercle trigonométrique (niveau 1).
Exercice 4 : Construire un point sur un cercle trigonométrique (niveau 2).
Exercice 5 : Additionner des fractions de π.

Exercice 1 **Exercice 2** **Exercice 3** **Exercice 4** **Exercice 5**

Recherche

Exercice 6 :

1. Sur le cercle trigonométrique, placer les points-images de $\frac{50\pi}{3}$, $-\frac{39\pi}{4}$, $\frac{77\pi}{6}$, -51π, $-\frac{538\pi}{3}$, $2\,018\pi$.
2. Déterminer graphiquement le cosinus et le sinus de ces nombres.

2. Formules d'addition et de duplication

Propriété 2 ▶ Rappel : produit scalaire de deux vecteurs

On se place dans un repère **orthonormé** du plan.
Soient $\vec{u}\binom{x}{y}$ et $\vec{u'}\binom{x'}{y'}$ deux vecteurs du plan.
Le produit scalaire des deux vecteurs peut s'obtenir des deux façons suivantes :

$$\vec{u}\cdot\vec{u'} = xx' + yy' = \|\vec{u}\| \times \|\vec{u'}\| \times \cos\left(\vec{u}, \vec{u'}\right) .$$

En guise d'explications

On considère deux réels a et b.
Sur le cercle trigonométrique de centre O, on place les points A et B, points-images respectifs des réels a et b.
Les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ ont pour coordonnées :

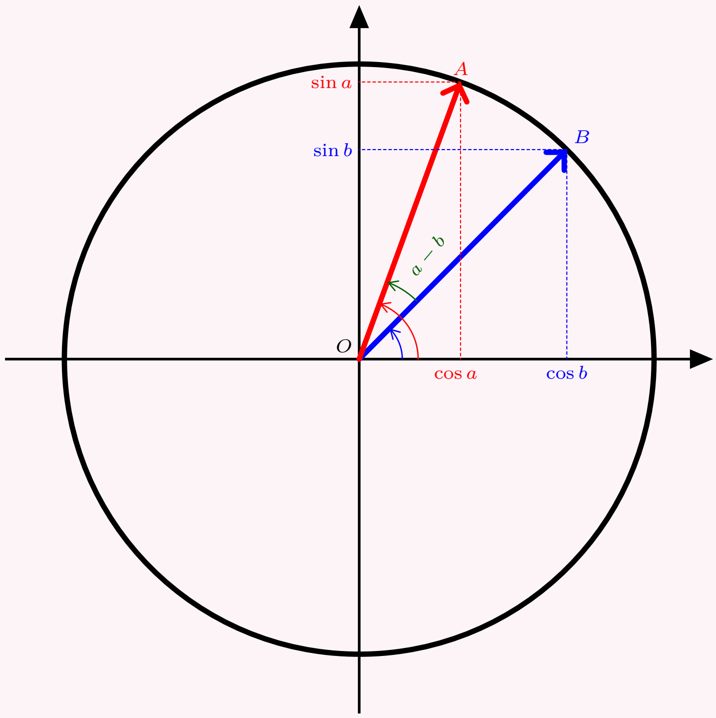
$$\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}\cos a\\ \sin a\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}\cos b\\ \sin b\end{pmatrix}.$$

Leur produit scalaire $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}$ est égal à $\cos a\cos b+\sin a\sin b$.

D'autre part, la norme de chacun des deux vecteurs vaut 1 (A et B sont sur le cercle-unité !) et l'angle orienté de vecteurs $\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}\right)$ est égal à $a-b$ modulo 2π.

Leur produit scalaire $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}$ est égal à $1\times 1\times\cos\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}\right)=\cos(a-b)$.

D'où $\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$; c'est la formule de soustraction du cosinus.



Propriété 3 ▶ Formules d'addition et de duplication

a et b sont deux nombres réels.

• $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$	• $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$
• $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$	• $\sin(2a) = 2 \sin a \cos a$

$\forall a \in \mathbb{R}$, $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$; on en déduit que $\cos^2 a = 1 - \sin^2 a$ et $\sin^2 a = 1 - \cos^2 a$.
En remplaçant $\cos^2 a$ ou $\sin^2 a$ par les expressions ci-dessus dans la formule $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$, on obtient deux autres formules de duplication du cosinus :

• $\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1$	• $\cos(2a) = 1 - 2\sin^2 a$

A titre d'exemple ▶ Exercice corrigés d'Yvan Monka

Exercice 7 : appliquer les formules d'addition.

1. Démontrer que $\dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{6}$.
2. En déduire $\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$

Exercice 7

Recherche

Exercice 8 :

1. Calculer $\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$; en déduire la valeur exacte de $\cos \frac{7\pi}{12}$.
2. En remarquant que $\frac{\pi}{4} = 2 \times \frac{\pi}{8}$, calculer la valeur exacte de $\sin \frac{\pi}{8}$.
3. Trouver deux mesures principales remarquables dont la différence vaut $\dfrac{\pi}{12}$; puis déterminer le cosinus et le sinus de $\dfrac{\pi}{12}$.
4. Simplifier $2 \times \dfrac{3\pi}{8}$; puis calculer le cosinus et le sinus de $\dfrac{3\pi}{8}$.

Entraînement Labomep

Exercice 9 : Connaître les formules d'addition et de duplication (niveau 1).
Exercice 10 : Connaître les formules d'addition et de duplication (niveau 2).

Exercice 9 **Exercice 10**

3. Inéquations trigonométriques

Résoudre chacune de ces inéquations dans $]-\pi\ ;\ \pi]$, puis dans $[0\ ;\ 2\pi[$.

a. $\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \geqslant 0$ **b.** $3 - 2\sqrt{3}\cos x < 0$ **c.** $2\cos x - \sqrt{3} < 0$ **d.** $1 - 2\sin x > 0$

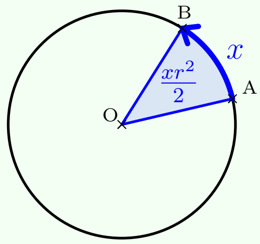
4. Fonctions cosinus et sinus

a) Aire d'un secteur angulaire

Propriété 4

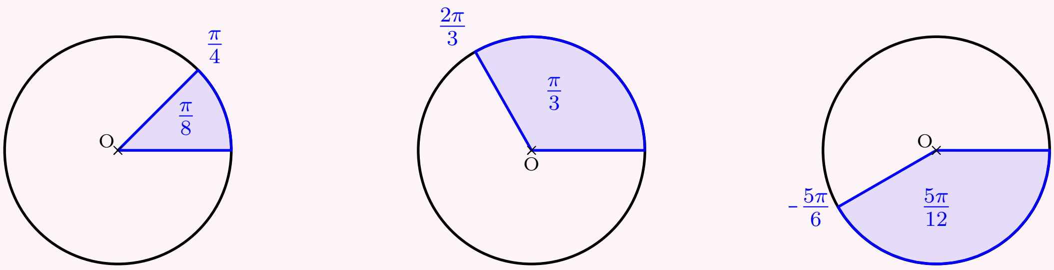
On considère un disque de centre O, de rayon r, et deux points A et B sur le cercle. On note x la mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$ comprise entre 0 et 2π.

L'aire (en Unité d'Aire) du secteur angulaire défini par l'arc $\widehat{AB}$ est égale à $\dfrac{xr^2}{2}$.



Démonstration

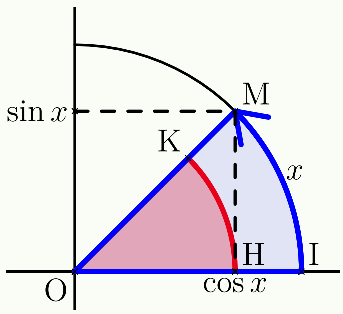
Il y a proportionnalité entre la mesure de l'angle orienté comprise entre 0 et 2π et l'aire du secteur angulaire. Pour un angle orienté de 2π, le secteur angulaire est le disque entier : son aire vaut πr^2.
Donc l'aire du secteur défini par l'arc $\widehat{AB}$ vaut : $\dfrac{x \times \pi r^2}{2\pi} = \dfrac{xr^2}{2}$.
Quelques exemples pour le cercle trigonométrique :



b) Des formes indéterminées pour cosinus et sinus

Recherche

Exercice 11 : Pour $x \in \left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[$, on considère le point M image de x sur le cercle trigonométrique, H son projeté orthogonal sur (OI), et K le point d'intersection de (OM) et du cercle de centre O passant par H.



1. a) Exprimer l'aire du secteur angulaire de centre O défini par l'arc $\widehat{HK}$ en fonction de x et $\cos x$.
   b) Exprimer l'aire du triangle OHM en fonction de $\sin x$ et $\cos x$.
   c) En déduire que $\cos x \leqslant \dfrac{\sin x}{x}$.
2. a) Exprimer l'aire du secteur angulaire de centre O défini par l'arc $\widehat{IM}$ en fonction de x.
   b) Exprimer l'aire du triangle OIM en fonction de $\sin x$.
   c) En déduire que $\dfrac{\sin x}{x} \leqslant 1$.

3. Déduire de ce qui précède $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\sin x}{x}$.
4. a) En remarquant que $x = 2 \times \dfrac{x}{2}$, utiliser une formule de duplication pour écrire $\cos x$ en fonction de $\sin\left(\frac{x}{2}\right)$.
   b) En utilisant un résultat établi ci-dessus, justifier que $0 \leqslant \sin\left(\frac{x}{2}\right) \leqslant \dfrac{x}{2}$.
   c) Déduire de ce qui précède que $1 - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \cos x \leqslant 1$.
   d) Déduire de ce qui précède $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\cos x - 1}{x}$.

c) Dérivées des fonctions trigonométriques

Propriété 5

Les fonctions sinus et cosinus sont continues sur $\mathbb{R}$.

Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x :

$$\boxed{\sin'(x) = \cos(x)} \quad ; \quad \boxed{\cos'(x) = -\sin(x)}.$$

a et b sont deux réels. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(ax+b)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x :

$$\boxed{f'(x) = a\cos(ax+b)}.$$

a et b sont deux réels. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(ax+b)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x :

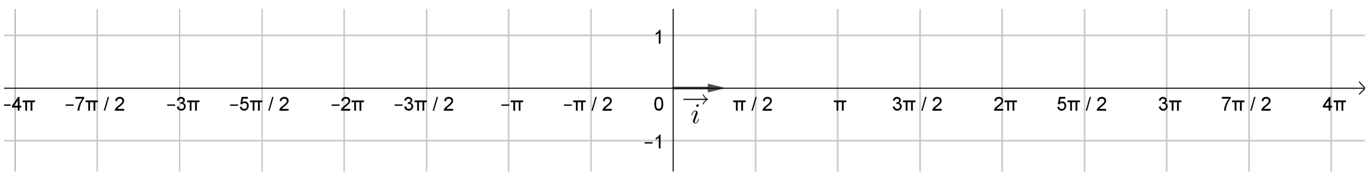
$$\boxed{f'(x) = -a\sin(ax+b)}.$$

Recherche

Exercice 12 : Déterminer la dérivée des fonctions ci-dessous.

$f_1(x) = \cos(-3x+4)$	$f_2(x) = [\sin(-x+4)]^3$	$f_3(x) = \cos(2x-1)$	$f_4(x) = \sin(-3x-2)$
$f_5(x) = \dfrac{1}{\cos(-3x)}$	$f_6(x) = \sqrt{\cos(5x+1)}$	$f_7(x) = [\cos(-4x+1)]^2$	$f_8(x) = \sqrt{\sin(4x-1)}$

d) Courbe de la fonction cos



1. Dresser le tableau de variation de la fonction cos sur $[0\ ;\ \pi]$.
2. Tracer la courbe sur $[0\ ;\ \pi]$.
3. Tracer la courbe sur $[-\pi\ ;\ 0]$.

Définition 2 ▶ Fonctions paires

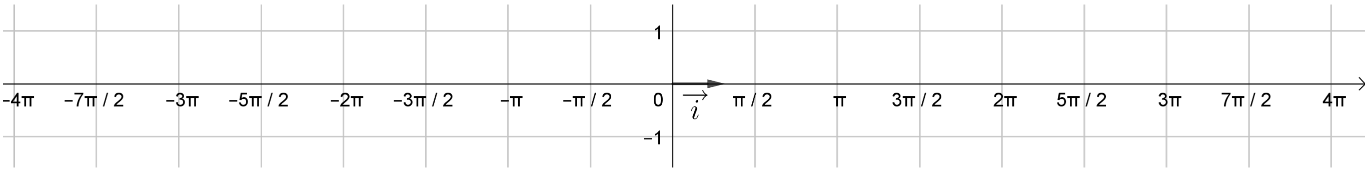
Les fonctions f vérifiant, pour tout x, $f(-x) = f(x)$ sont appelées **fonctions paires**.
L'axe des ordonnées est axe de symétrie de la courbe.

4. Compléter la courbe

Propriété 6

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(x + 2\pi) = \cos x$: on dit que la fonction cos est 2π-périodique (ou de période 2π).
On obtient la courbe par translation de vecteur $2\pi \overrightarrow{i}$ ou $-2\pi \overrightarrow{i}$.

e) Courbe de la fonction sin



1. Dresser le tableau de variation de la fonction sin sur $[0 ; \pi]$.
2. Tracer la courbe sur $[0 ; \pi]$.
3. Tracer la courbe sur $[-\pi ; 0]$.

Définition 3 ▶ Fonctions impaires

Les fonctions f vérifiant, pour tout x, $f(-x) = -f(x)$ sont appelées **fonctions impaires**.
L'origine du repère est centre de symétrie de la courbe.

4. Compléter la courbe

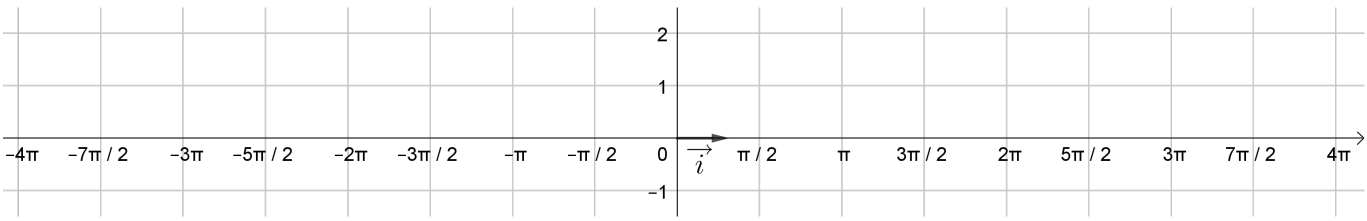
Propriété 7

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin(x + 2\pi) = \sin x$: on dit que la fonction sin est 2π-périodique (ou de période 2π).
On obtient la courbe par translation de vecteur $2\pi \overrightarrow{i}$ ou $-2\pi \overrightarrow{i}$.

Recherche

Exercice 13 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(2x) + 1$.

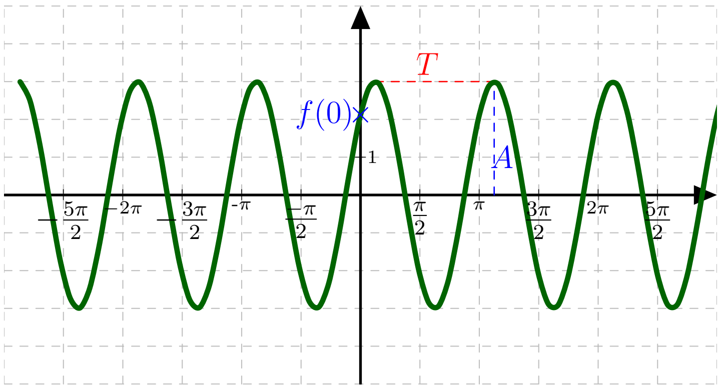
1. Pour x réel, exprimer $f(x + \pi)$ puis $f(-x)$ en fonction de x. Que peut-on en déduire pour la fonction f ?
2. Pourquoi peut-on se contenter de dresser le tableau de variation sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$?
3. Dresser le tableau de variation sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$.
4. Dresser le tableau de variation sur $\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$.
5. Tracer la courbe.



5. Ecritures des fonctions trigonométriques

a) Paramètres des fonctions trigonométriques

Voici la courbe de la fonction f d'expression $f(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$:



On peut lire graphiquement :

- la hauteur A du sommet des sinusoïdes : ici, $A = 3$;
- la période T, qui est l'écart entre deux sommets consécutifs : ici, $T = \pi$;
- la valeur de $f(0)$: ici, $f(0) = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

La pulsation ω est donnée par la formule : $\boxed{\omega = \dfrac{2\pi}{T}}$; ici, $\omega = \dfrac{2\pi}{\pi} = 2$.

$$\text{Donc } f(t) = 3\cos(2t + \varphi) \;.$$

Il reste à déterminer la phase φ .

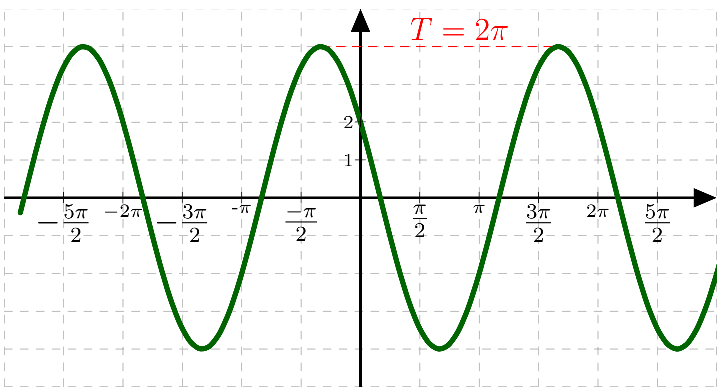
Comme $f(0) = 3\cos(2 \times 0 + \varphi) = 3\cos\varphi$, $\cos\varphi = \dfrac{f(0)}{3} = \dfrac{\frac{3\sqrt{2}}{2}}{3} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Par lecture du cercle trigonométrique, ma mesure principale de φ est $\dfrac{\pi}{4}$ ou $-\dfrac{\pi}{4}$.

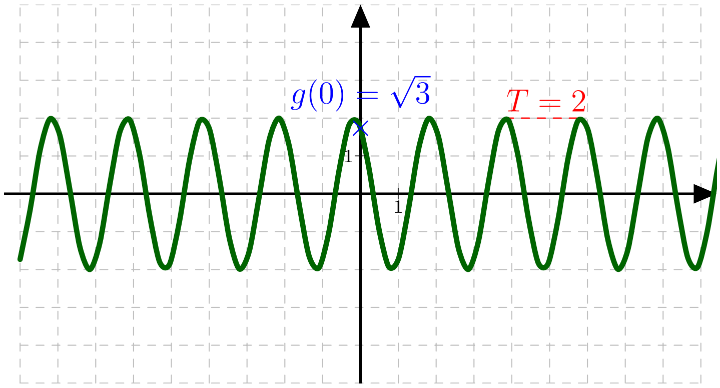
Or on constate graphiquement qu'à l'origine, la fonction est croissante ; donc $f'(0) > 0$.
Comme $f(t) = 3\cos(2t + \varphi)$, $f'(t) = -6\sin(2t + \varphi)$, d'où $f'(0) = -6\sin\varphi > 0$: ceci montre que $\sin\varphi < 0$, et donc que $\varphi = -\dfrac{\pi}{4}$.

$$\text{Ainsi } \boxed{f(t) = 3\cos\left(2t - \frac{\pi}{4}\right)}.$$

En utilisant cette méthode, déterminer les expressions $A\cos(\omega t + \varphi)$ des fonctions f et g représentées ci-dessous :



$f(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$.



$g(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$.

b) Ecrire sous la forme $a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$

Méthode ▶ Ecrire une fonction $A\cos(\omega t + \varphi)$ sous la forme $a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$

Il suffit d'appliquer la formule d'addition du cosinus à

$$\cos(\omega t + \varphi)\ ;$$

on obtient

$$\cos(\omega t)\cos(\varphi) - \sin(\omega t)\sin(\varphi)$$

A titre d'exemple

1. Ecrire $2\cos\left(t - \frac{3\pi}{4}\right)$ sous la forme $a\cos t + b\sin t$.
2. Ecrire $\sqrt{3}\cos\left(\pi t + \frac{2\pi}{3}\right)$ sous la forme $a\cos(\pi t) + b\sin(\pi t)$.

Recherche

Exercice 14 :

1. Ecrire $3\cos\left(\pi t - \frac{\pi}{2}\right)$ sous la forme $a\cos(\pi t) + b\sin(\pi t)$.
2. Ecrire $\sqrt{2}\cos\left(t + \frac{3\pi}{4}\right)$ sous la forme $a\cos t + b\sin t$.

c) Ecrire sous la forme $A\cos(\omega t+\varphi)$

En guise d'explications

Soient a, b et ω trois nombres réels, avec au moins un des deux nombres a et b différent de 0.

On s'intéresse à l'expression
$$f(t)=a\cos(\omega t)+b\sin(\omega t)\ .$$
En factorisant par $\sqrt{a^2+b^2}$ (qui est forcément différent de 0), on obtient :
$$f(t)=\sqrt{a^2+b^2}\left[\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos(\omega t)+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin(\omega t)\right]\ .$$
Soit φ le réel tel que :
$$\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\ \text{ et }\ \sin\varphi=\frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}\ :$$
on peut réécrire $f(t)$ ainsi :
$$f(t)=\sqrt{a^2+b^2}\left[\cos\varphi\cos(\omega t)-\sin\varphi\sin(\omega t)\right]\ .$$
On reconnaît le développement de la formule d'addition du cosinus ; nous pouvons écrire en conclusion que
$$f(t)=\sqrt{a^2+b^2}\cos(\omega t+\varphi)\ .$$

Méthode ▶ Ecrire une fonction $a\cos(\omega t)+b\sin(\omega t)$ sous la forme $A\cos(\omega t+\varphi)$

Il suffit de déterminer le réel φ tel que :
$$\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\ \text{ et }\ \sin\varphi=\frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}\ :$$
On peut alors écrire :
$$f(t)=\sqrt{a^2+b^2}\cos(\omega t+\varphi)\ .$$
• Si on veut l'écriture avec sin, il suffit de rajouter $\frac{\pi}{2}$ à la phase :
$\sin\left(\omega t+\varphi+\frac{\pi}{2}\right)=\sin(\omega t+\varphi)\cos\frac{\pi}{2}+\cos(\omega t+\varphi)\sin\frac{\pi}{2}=\cos(\omega t+\varphi)$ car $\cos\frac{\pi}{2}=0$ et $\sin\frac{\pi}{2}=1$.

A titre d'exemple

1. $f(t)=\cos t+\sin t$; déterminer les réels A et φ tels que $f(t)=A\cos(t+\varphi)$.
2. $g(t)=\frac{-3\sqrt{3}}{2}\cos(2\pi t)-\frac{3}{2}\sin(2\pi t)$; déterminer les réels A et φ tels que $g(t)=A\cos(2\pi t+\varphi)$.

Recherche

1. $f(t)=\sqrt{3}\cos(2\pi t)-\sin(2\pi t)$; déterminer les réels A et φ tels que $f(t)=A\cos(2\pi t+\varphi)$.
2. $g(t)=\frac{-5\sqrt{2}}{2}\cos(\pi t)+\frac{5\sqrt{2}}{2}\sin(\pi t)$; déterminer les réels A et φ tels que $g(t)=A\cos(\pi t+\varphi)$.