Sommaire

Chapitre XI

Equations différentielles

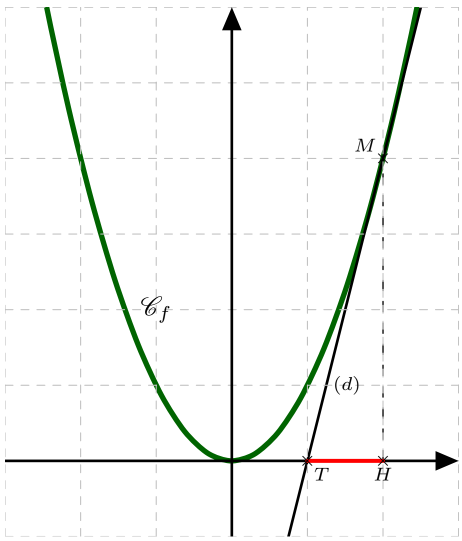
1. Historique et premières définitions

Bref historique : C'est au début du $XVII^{ème}$ siècle, avec le calcul différentiel et intégral de Newton et Leibniz, qu'apparut la notion d'équations différentielles. Elles sont issues de problèmes de géométrie et de mécanique. Au début du $XVIII^{ème}$ siècle les méthodes classiques de résolution de certaines équations (linéaires et de Bernoulli notamment) furent découvertes. Avec le développement de la mécanique, la résolution des équations différentielles devient une branche importante des mathématiques (grâce à Euler, Lagrange, Laplace …). Aujourd'hui, les équations différentielles sont utilisées pour construire des modèles mathématiques de phénomènes physiques, biologiques, informatiques, etc. Par conséquent, elles représentent un vaste champ d'étude en mathématiques appliquées.

2. Un problème soumis à Descartes

Les références historiques suivantes sont extraites du manuel Barbazo 2020.
Florimont de Beaune (1601-1652) est un juriste et mathématicien français. Disciple et ami de René Descartes, il propose en 1638 quelques problèmes nommés « inverse des tangentes »pour lesquels Descartes et Leibniz seront parmi les premiers à proposer des solutions. Voici l'un de ces problèmes :

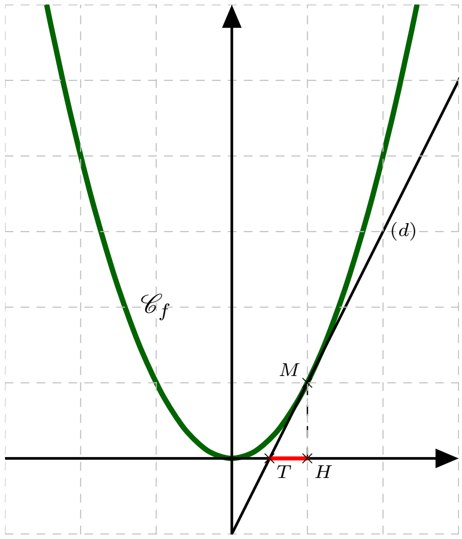
Dans un repère orthonormé, la droite (d) est la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f au point M.
La droite (d) coupe l'axe des abscisse au point T.
Le projeté orthogonal du point M sur l'axe des abscisse est nommé H.
On appelle **sous-tangente** à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point M la longueur TH.
Dans l'illustration ci-contre, on a représenté la parabole de la fonction carré, ainsi que sa sous-tangente au point d'abscisse 2, qui vaut 1.



Ci-contre, c'est cette fois la sous-tangente au point d'abscisse 1 qui est représentée ; celle-ci vaut $\frac{1}{2}$.

Le problème soumis par sieur Florimond à ses savants amis est le suivant :

Existe-t-il des fonctions pour lesquelles la sous-tangente est constante en tout point de la courbe ?



Avec les notations actuelles, ce problème se traduit ainsi : il s'agit de trouver une fonction f dérivable sur un intervalle I et vérifiant, pour tout $x \in I$, $f'(x) = kf(x)$, où k est un nombre constant.

Une telle relation entre une fonction et sa dérivée est nommée **équation différentielle** : c'est une équation dont l'inconnue est une fonction f.
Pour la distinguer d'une équation où l'inconnue est un nombre, l'inconnue désignant une fonction sera notée y, et cette équation différentielle sera notée : $y' = ky$.

3. Définition

a) Introduction

Une équation différentielle est une équation :

- dont l'inconnue est une fonction (généralement notée $y(x)$ ou simplement y) ;
- dans laquelle apparaissent certaines des dérivées de la fonction (dérivée première y', ou dérivées d'ordres supérieurs y'', $y^{(3)}, \ldots$).

A titre d'exemple ▶ Équations différentielles faciles à résoudre.

De tête, trouver au moins une fonction, solution des équations différentielles suivantes :

$$\begin{array}{ll} y' = \sin x & y(x) = -\cos x + k \quad \text{où } k \in \mathbb{R} \\ y' = 1 + e^x & y(x) = x + e^x + k \quad \text{où } k \in \mathbb{R} \\ y' = y & y(x) = ke^x \quad \text{où } k \in \mathbb{R} \\ y' = 3y & y(x) = ke^{3x} \quad \text{où } k \in \mathbb{R} \end{array}$$

Il est aussi facile de vérifier qu'une fonction donnée est bien solution d'une équation.

A titre d'exemple ▶ Vérifier si une fonction est solution d'une équation différentielle

Prouver que la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = 3x^2 + \ln(x)$ est solution de l'équation différentielle $y'(x) = 6x + \frac{1}{x}$.
Pour vous aider, une correction d'Y. Monka ici.

Recherche 1

1. Soit l'équation différentielle $y' = 2xy + 4x$. Vérifier que $y(x) = k\exp(x^2) - 2$ est une solution sur $\mathbb{R}$, ceci quel que soit $k \in \mathbb{R}$.
2. Soit l'équation différentielle $x^2y'' - 2y + 2x = 0$. Vérifier que $y(x) = kx^2 + x$ est une solution sur $\mathbb{R}$, pour tout $k \in \mathbb{R}$.

b) Définition

Passons à la définition complète d'une équation différentielle et surtout d'une solution d'une équation différentielle.

Définition 1

- Une **équation différentielle** d'ordre n est une équation de la forme

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0 \qquad (E)$$

où F est une fonction de $(n+2)$ variables.

- Une **solution** d'une telle équation sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ est une fonction $y : I \to \mathbb{R}$ qui est n fois dérivable et qui vérifie l'équation (E).

En terminale et dans le cadre du programme, on travaillera essentiellement sur les équation différentielles d'ordre 1, c'est-à-dire des équations de la forme

$$F(x, y, y') = 0 \qquad (E)$$

où F est une fonction de 3 variables.

Remarques

- C'est la coutume pour les équations différentielles de noter y au lieu de $y(x)$, y' au lieu $y'(x)$,...On note donc « $y' = \sin x$ » ce qui signifie « $y'(x) = \sin x$ ».
- Il faut s'habituer au changement de nom pour les fonctions et les variables. Par exemple $(x'')^3 + t(x')^3 + (\sin t)x^4 = e^t$ est une équation différentielle d'ordre 2, dont l'inconnue est une fonction x qui dépend de la variable t. On cherche donc une fonction $x(t)$, deux fois dérivable, qui vérifie $(x''(t))^3 + t(x'(t))^3 + (\sin t)(x(t))^4 = e^t$.
- Rechercher une primitive, c'est déjà résoudre l'équation différentielle $y' = f(x)$. C'est pourquoi on trouve souvent « intégrer l'équation différentielle » pour « trouver les solutions de l'équation différentielle ».
- La notion d'intervalle dans la résolution d'une équation différentielle est fondamentale. Si on change d'intervalle, on peut très bien obtenir d'autres solutions. Par exemple, si on se place sur l'intervalle $I_1 =]0, +\infty[$, l'équation différentielle $y' = 1/x$ a pour solutions les fonctions $y(x) = \ln(x) + k$. Alors que sur l'intervalle $I_2 =]-\infty, 0[$, les solutions sont les fonctions $y(x) = \ln(-x) + k$ (k est une constante).
- Si aucune précision n'est donnée sur l'intervalle I, on considérera qu'il s'agit de $I = \mathbb{R}$.

4. Primitives

En guise d'explications

Dans cette section, nous verrons des formules permettant de résoudre des équations différentielles du type :

$$y' = f, \text{ où } f \text{ est une fonction connue.}$$

a) Primitives d'une fonction continue

Définition 2

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. On appelle **primitive de f sur I**, une fonction F dérivable sur I dont la dérivée est égale à f. Ainsi pour tout x de I, $F'(x) = f(x)$.

Théorème 1

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives.
Plus précisément, si F est une primitive de f sur un intervalle I, alors toutes les primitives de f sont les fonctions G définies sur I par $G(x) = F(x) + k$ où $k \in \mathbb{R}$.
Ce théorème sera admis pour l'instant. Il sera démontré dans le chapitre consacré au calcul intégral.

b) Primitives des fonctions usuelles

Propriété 1

Par lecture inverse du tableau des dérivées, le tableau suivant donne, pour chaque fonction f de référence, les fonctions primitives F sur l'intervalle considéré.

On peut vérifier qu'on a bien $F' = f$ sur l'intervalle considéré.

Fonction f	Fonction primitive ($k \in \mathbb{R}$ constante)	Intervalle I
$f(x) = m$ (constante)	$F(x) = mx + k$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$F(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + k$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$F(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + k$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^3$	$F(x) = \dfrac{1}{4}x^4 + k$	$\mathbb{R}$
Plus généralement : $f(x) = x^n$ où $n \in \mathbb{N}$	$F(x) = \dfrac{1}{n+1}x^{n+1} + k$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$F(x) = \ln(x) + k$	$]0\,;+\infty[$
$f(x) = \dfrac{1}{x^n}$ où $n > 1$ entier	$F(x) = \frac{-1}{(n-1)x^{n-1}}$	$]0\,;+\infty[$
$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$	$F(x) = -\dfrac{1}{x} + k$	$]-\infty\,;0[$ ou $]0\,;+\infty[$
$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x} + k$	$]0\,;+\infty[$
$f(x) = \mathrm{e}^x$	$F(x) = \mathrm{e}^x + k$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \mathrm{e}^{ax}$ $(a \neq 0)$	$F(x) = \frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax} + k$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin(x) + k$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos(x) + k$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos(ax+b)$ $(a \neq 0)$	$F(x) = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + k$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin(ax+b)$ $(a \neq 0)$	$F(x) = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + k$	$\mathbb{R}$

c) Primitives de fonctions composées

Propriété 2

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, u une fonction dérivable sur I et k un réel quelconque.

1. une primitive de kf est kF avec F une primitive de f.
2. une primitive de $f+g$ est $F+G$ avec F une primitive de f et G une primitive de g.
3. une primitive de $u' \times \mathrm{e}^u$ est e^u.
4. une primitive de $u' \times u^n$, avec $n > 0$ un entier, est $\dfrac{1}{n+1}u^{n+1}$.
5. une primitive de $\dfrac{u'}{u}$, avec u strictement positive sur I, est $\ln(u)$.
6. une primitive de $\dfrac{u'}{u^n}$, avec $n > 1$ un entier et u ne s'annulant pas, est $\dfrac{-1}{(n-1)u^{n-1}}$.
7. une primitive de $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$, avec u strictement positive sur I, est $2\sqrt{u}$.

A titre d'exemple 1 ▶ Calcul d'une primitive

Exercice 1 : niveau 1
Dans chaque cas, déterminer une primitive F de f.
•$f_1(x) = 5x^4$ • $f_2(x) = x^3 - 2x$ • $f_3(x) = 5x - 3$ Aide : corrigé d'Yvan Monka

Exercice 2 : niveau 2
Dans chaque cas, déterminer une primitive G de g.
•$g_1(x) = -\dfrac{3}{x^2}$ • $g_2(x) = -\dfrac{5}{x^2}$ • $g_3(x) = 4x - \dfrac{1}{x^2}$ Aide : corrigé d'Yvan Monka

Exercice 3 : niveau 3
Dans chaque cas, déterminer une primitive H de h.
•$h_1(x) = -\dfrac{2}{x}$ • $h_2(x) = 4\mathrm{e}^x$ • $h_3(x) = \dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{x^2}$ Aide : corrigé d'Yvan Monka

Exercice 4 : niveau 4
Dans chaque cas, déterminer une primitive L de l.
•$l_1(x) = x\mathrm{e}^{x^2}$ • $l_2(x) = \mathrm{e}^{4x+1}$ Aide : corrigé d'Yvan Monka

Exercice 5 : niveau 5
Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = 2e^x + \frac{3}{x} - 5x$$

Déterminer LA primitive de f qui prend la valeur $2e$ en 1. Aide : corrigé d'Yvan Monka

Exercice 1 **Exercice 2** **Exercice 3** **Exercice 4** **Exercice 5**

Recherche 2

Déterminer les primitives sur $]0\ ;\ +\infty[$ des fonctions définies par :

- $f_1(x) = x + x^2$
- $f_2(x) = 7 - 8x^3$
- $f_3(x) = \dfrac{3}{x}$
- $f_4(x) = \dfrac{1}{x^2}$
- $f_5(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2}$
- $f_6(x) = x^{-3}$
- $f_7(x) = 2x\mathrm{e}^{x^2}$
- $f_8(x) = (x+1)\mathrm{e}^{x}$
- $f_9(x) = \frac{2x}{x^2+1}$
- $f_{10}(x) = x\mathrm{e}^{-x^2}$
- $f_{11}(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$
- $f_{12}(x) = \dfrac{1}{(3x-1)^2}$

Entraînement Labomep et/ou wim's

Exercice 6 : primitives de fonctions de base

Réaliser les 14 exercices suivants :

1. Primitive de $f : x \longmapsto ax + b$
2. Primitives d'un monôme
3. Primitive de $f : x \longmapsto \frac{a}{bx^2} + \frac{c}{d}$
4. Primitive de $f : x \longmapsto \frac{a}{bx^2}$
5. Primitive de $f : x \longmapsto \frac{a}{b\sqrt{x}}$
6. Primitive de $f : x \longmapsto \frac{a}{b}x$
7. Primitive de $f : x \longmapsto \frac{a}{b}x + \frac{c}{d}$
8. Primitive de $f : x \longmapsto \frac{a}{b\sqrt{x}} + \frac{c}{d}x$
9. Primitive de $f : x \longmapsto \frac{a+bx^n}{x}$
10. Primitive de $f : x \longmapsto \frac{a+cx+dx^2}{bx}$
11. Primitive de $f : x \longmapsto \frac{ax\sqrt{x}+b}{\sqrt{x}}$
12. Primitive de $f : x \longmapsto a\sin(x) + b\cos(x)$
13. Primitive de $f : x \longmapsto \frac{a}{x}$
14. Primitive de $f : x \longmapsto \frac{a}{bx}$

Exercice 1 **Exercice 2** **Exercice 3** **Exercice 4** **Exercice 5** **Exercice 6** **Exercice 7**

Exercice 8 **Exercice 9** **Exercice 10** **Exercice 11** **Exercice 12** **Exercice 13** **Exercice 14**

Entraînement Labomep et/ou wim's

Exercice 7 : primitives de fonctions composées

Réaliser les 14 exercices suivants :

1. Primitive de $\frac{u'}{u^2}$ avec u affine.
2. Primitives de $\frac{u'}{u^2}$ avec u de la forme ax^2+b.
3. Primitive de $u'u^n$ avec u affine
4. Primitive de $u'u^n$ avec u de la forme ax^2+b.
5. Primitive de $u'u^n$ avec u de la forme $\frac{a}{x}+b$
6. Primitive de $u'u^n$ avec u affine
7. Primitive de $u'u^n$ avec u de la forme ax^2+b.
8. Primitive de $\frac{u'}{\sqrt{u}}$
9. Primitive de $\frac{u'}{\sqrt{u}}$
10. Primitive de $k*u'e^u$ avec $u(x)=ax^2+bx+c$
11. Primitive de $k*u'e^u$ avec $u(x)=\frac{a}{x}$
12. Primitive de $f:x\longmapsto\frac{a}{bx+c}$ avec $b>0$
13. Primitive de u'/u avec u affine à valeurs négatives
14. Primitive de u'/u avec u de la forme ax^2+b

Exercice 1 Exercice 2 Exercice 3 Exercice 4 Exercice 5 Exercice 6 Exercice 7

Exercice 8 Exercice 9 Exercice 10 Exercice 11 Exercice 12 Exercice 13 Exercice 14

d) Résoudre une équation différentielle $y'=f$ avec condition initiale

Méthode 1

Premier exemple :

1. Résoudre l'équation différentielle $y'=x^2+2x-1$.
2. Déterminer la solution f de cette équation différentielle vérifiant $f(3)=20$.

---

1. Les solutions sont les primitives de la fonction d'expression x^2+2x-1.

   Ce sont les fonctions d'expressions $\dfrac{x^3}{3}+x^2-x+k$, où k est une constante.

2. f étant une solution, il existe un réel k tel que pour tout réel x, $f(x)=\dfrac{x^3}{3}+x^2-x+k$.

   Comme $f(3)=20$, $f(3)=\dfrac{3^3}{3}+3^2-3+k=9+9-3+k=15+k=20$; d'où $k=5$.

$$f(x)=\frac{x^3}{3}+x^2-x+5\,.$$

Méthode 2

Deuxième exemple :

1. Résoudre l'équation différentielle $y' = 5\mathrm{e}^{-2x}$.
2. Déterminer la solution f de cette équation différentielle vérifiant $f(0) = 0$.
3. Déterminer la solution g de cette équation différentielle vérifiant $g(1) = 5$.

---

1. Les solutions sont les primitives de la fonction d'expression $5\mathrm{e}^{-2x}$.
   Ce sont les fonctions d'expressions $\dfrac{5}{-2}\mathrm{e}^{-2x} + k$, où k est une constante.
2. f étant une solution, il existe un réel k tel que pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{5}{-2}\mathrm{e}^{-2x} + k$.
   Comme $f(0) = 0$, $f(0) = \dfrac{5}{-2}\mathrm{e}^{-2\times 0} + k = \dfrac{5}{-2} + k = 0$; d'où $k = -\dfrac{5}{-2} = \dfrac{5}{2}$.
   $$f(x) = \frac{5}{-2}\mathrm{e}^{-2x} + \frac{5}{2} = \frac{5}{2}\left(1 - \mathrm{e}^{-2x}\right) .$$
3. g étant une solution, il existe un réel k tel que pour tout réel x, $g(x) = \dfrac{5}{-2}\mathrm{e}^{-2x} + k$.
   Comme $g(1) = 5$, $g(1) = \dfrac{5}{-2}\mathrm{e}^{-2\times 1} + k = \dfrac{5}{-2}\mathrm{e}^{-2} + k = 5$; d'où $k = 5 - \dfrac{5}{-2}\mathrm{e}^{-2} = 5 + \dfrac{5}{2}\mathrm{e}^{-2}$.
   $$g(x) = \frac{5}{-2}\mathrm{e}^{-2x} + 5 + \frac{5}{2}\mathrm{e}^{-2} .$$

Recherche

Exercice 15 QCM de type bac

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\mathrm{e}^{x^2}$.
   La primitive F de f sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $F(0) = 1$ est définie par :

   a. $F(x) = \dfrac{x^2}{2}\mathrm{e}^{x^2}$;
   b. $F(x) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}$
   c. $F(x) = \left(1 + 2x^2\right)\mathrm{e}^{x^2}$;
   d. $F(x) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2} + \dfrac{1}{2}$

2. Parmi les primitives de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3\mathrm{e}^{-x^2} + 2$:

   a. toutes sont croissantes sur $\mathbb{R}$;
   b. toutes sont décroissantes sur $\mathbb{R}$;
   c. certaines sont croissantes sur $\mathbb{R}$ et d'autres décroissantes sur $\mathbb{R}$;
   d. toutes sont croissantes sur $]-\infty\ ;\ 0]$ et décroissantes sur $[0\ ;\ +\infty[$.

5. Equations différentielles de degré 1

a) Equation différentielle $y' - ay = 0$ (sans second membre)

Définition 3

Toute équation différentielle linéaire d'ordre 1 est dit **homogène ou sans second membre** si elle peut s'écrire sous la forme $\boldsymbol{y' - ay = 0}$.

Propriété 3

Soit a un nombre réel non nul.
Les solutions de l'équation différentielle sans second membre $\boldsymbol{y' - ay = 0}$ou $y' = ay$ sont les fonctions f d'expression

$$f(x) = C\mathrm{e}^{ax} \text{ où } C \text{ est un nombre constant.}$$

Démonstration

- Soit $g(x) = \mathrm{e}^{ax}$. $g'(x) = a\mathrm{e}^{ax}$, donc nous pouvons écrire que $\forall x \in \mathbb{R}\,,\, g'(x) = ag(x)$: la fonction g est solution de l'équation différentielle $y' = ay$.
- Soit f une solution de l'équation différentielle $y' = ay$ sur $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire que $\forall x \in \mathbb{R}\,,\, f'(x) = af(x)$. Notons, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = \dfrac{f(x)}{\mathrm{e}^{ax}}$.

  $\forall x \in \mathbb{R}\,,\, h'(x) = \dfrac{f'(x) \times \mathrm{e}^{ax} - f(x) \times a\mathrm{e}^{ax}}{(\mathrm{e}^{ax})^2} = \dfrac{f'(x) - f(x) \times a}{\mathrm{e}^{ax}}$. *On obtient la dernière expression en simplifiant par* e^{ax}.

  Or, comme f est une solution de l'équation différentielle $y' = ay$ sur $\mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}\,,\, f'(x) - af(x) = 0$.
  On déduit de ceci que $\forall x \in \mathbb{R}\,,\, h'(x) = 0$, et que par conséquent h est une fonction constante ; il existe un réel C tel que $\forall x \in \mathbb{R}\,,\, h(x) = C$, c'est-à-dire : $\dfrac{f(x)}{\mathrm{e}^{ax}} = C$.

  $$\text{Ainsi } \forall x \in \mathbb{R}\,,\, f(x) = C\mathrm{e}^{ax}\,.$$

A titre d'exemple

Exercice 17 : Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. $y' = 3y$; **2.** $y' + 2y = 0$; **3.** $2y' = y$; **4.** $3y' - 5y = 0$

---

1. Les solutions sont les fonctions d'expression $C\mathrm{e}^{3x}$, où C est un nombre constant.

2. $y' + 2y = 0 \iff y' = -2y$.
Les solutions sont les fonctions d'expression $C\mathrm{e}^{-2x}$, où C est un nombre constant.

3. $2y' = y \iff y' = \dfrac{1}{2}y$.
Les solutions sont les fonctions d'expression $C\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$, où C est un nombre constant.

4. $3y' - 5y = 0 \iff y' = \dfrac{5}{3}y$.
Les solutions sont les fonctions d'expression $C\mathrm{e}^{\frac{5x}{3}}$, où C est un nombre constant.

A titre d'exemple

Exercice 18 :

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l' équation différentielle :

$$y' = 2\,020y\,.$$

2. Déterminer la solution f telle que $f(0) = 2$.

---

1. Les solutions sont les fonctions d'expression $C\mathrm{e}^{2\,020x}$, où C est un nombre constant.
2. f étant solution, il existe une constante C telle que $\forall x \in \mathbb{R}\,,\ f(x) = C\mathrm{e}^{2\,020x}$. Comme $f(0) = 2$, $C\mathrm{e}^{2\,020\times 0} = 2$, d'où $C = 2$.

$$\text{Ainsi } f(x) = 2\mathrm{e}^{2\,020x}\,.$$

Exercice 19 :

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l' équation différentielle :

$$y' + y = 0\,.$$

2. Déterminer la solution f telle que $f(0) = 1$.
3. Déterminer la solution g telle que $g'(1) = 2$.

---

1. $y' + y = 0 \iff y' = -y$.
   Les solutions sont les fonctions d'expression $C\mathrm{e}^{-x}$, où C est un nombre constant.
2. f étant solution, il existe une constante C telle que $\forall x \in \mathbb{R}\,,\ f(x) = C\mathrm{e}^{-x}$. Comme $f(0) = 1$, $C\mathrm{e}^{-0} = 1$, d'où $C = 1$.

$$\text{Ainsi } f(x) = \mathrm{e}^{-x}\,.$$

3. Déterminer la solution g telle que $g'(1) = 2$.g étant solution, il existe une constante C telle que $\forall x \in \mathbb{R}\,,\ g(x) = C\mathrm{e}^{-x}$. Comme $g'(1) = 2$, et que $\forall x \in \mathbb{R}\,,\ g'(x) = -g(x) = -C\mathrm{e}^{-x}$, on a $-C\mathrm{e}^{-1} = 2$, d'où $C = -\dfrac{2}{\mathrm{e}^{-1}} = -2\mathrm{e}$.

$$\text{Ainsi } g(x) = -2\mathrm{e} \times \mathrm{e}^{-x} = -2\mathrm{e}^{1-x}\,.$$

b) Equation différentielle $y' - ay = b$ (avec second membre constant)

Propriété 4

Soient a un nombre réel non nul, et b un réel.
Les solutions de l'équation différentielle $y' - ay = b$ ou $y' = ay + b$ sont les fonctions f d'expression

$$f(x) = C\mathrm{e}^{ax} - \frac{b}{a} \text{ où } C \text{ est un nombre constant.}$$

Démonstration

- Soit $g(x) = -\dfrac{b}{a}$. (g est la fonction constante égale à $-\dfrac{b}{a}$.)

  Pour tout réel x, $g'(x) = 0$, et d'autre part $a \times g(x) + b = a \times \left(-\dfrac{b}{a}\right) + b = -b + b = 0$ donc nous pouvons écrire que $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = a \times g(x) + b$: la fonction g est solution de l'équation différentielle $y' = ay + b$.

- Soit f une solution de l'équation différentielle $y' = ay+b$ sur $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = af(x)+b$.)

  Notons, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = f(x) + \dfrac{b}{a}$.

  $\forall x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = f'(x)$, et d'autre part, $f'(x) = af(x) + b$ (car f est solution de $y' = ay + b$), d'où

  $$\underbrace{f'(x)}_{h'(x)} = a\underbrace{\left(f(x) + \frac{b}{a}\right)}_{h(x)} \text{ (en factorisant par } a\text{).}$$

  Ainsi h est solution de l'équation différentielle $y' = ay$: il existe un réel C tel que $h(x) = C\mathrm{e}^{ax}$, ce qui donne : $f(x) + \dfrac{b}{a} = C\mathrm{e}^{ax}$, puis : $f(x) = C\mathrm{e}^{ax} - \dfrac{b}{a}$.

A titre d'exemple

Exercice 20 : Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

$$\textbf{1. } y' = 3y - 1 \ ; \quad \textbf{2. } y' + 2y = \sqrt{3} \ ; \quad \textbf{3. } 2y' - \mathrm{e} = y \ ; \quad \textbf{4. } 3y' - 5y = -3$$

---

1. Les solutions sont les fonctions d'expression $C\mathrm{e}^{3x} - \dfrac{-1}{3} = C\mathrm{e}^{3x} + \dfrac{1}{3}$, où C est un nombre constant.

2. $y' + 2y = \sqrt{3} \iff y' = -2y + \sqrt{3}$.

Les solutions sont les fonctions d'expression $C\mathrm{e}^{-2x} - \dfrac{\sqrt{3}}{-2} = C\mathrm{e}^{-2x} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, où C est un nombre constant.

3. $2y' - \mathrm{e} = y \iff y' = \dfrac{1}{2}y + \dfrac{\mathrm{e}}{2}$.

Les solutions sont les fonctions d'expression $C\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - \dfrac{\frac{\mathrm{e}}{2}}{\frac{1}{2}} = C\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - \mathrm{e}$, où C est un nombre constant.

4. $3y' - 5y = -3 \iff y' = \dfrac{5}{3}y - 1$.

Les solutions sont les fonctions d'expression $C\mathrm{e}^{\frac{5x}{3}} - \dfrac{-1}{\frac{5}{3}} = C\mathrm{e}^{\frac{5x}{3}} + \dfrac{3}{5}$, où C est un nombre constant.

A titre d'exemple

Exercice 21 :

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l' équation différentielle :

$$y' = 2\,020y - 2\,020\,.$$

2. Déterminer la solution f telle que $f(0) = 2$.

---

1. Les solutions sont les fonctions d'expression $C\mathrm{e}^{2\,020x}+1$, où C est un nombre constant.
2. f étant solution, il existe une constante C telle que $\forall x \in \mathbb{R}\,,\ f(x) = C\mathrm{e}^{2\,020x}+1$. Comme $f(0)=2$, $C\mathrm{e}^{2\,020\times 0}+1=2$, d'où $C=1$.

$$\text{Ainsi } f(x) = \mathrm{e}^{2\,020x}+1\,.$$

Entraînement Labomep et/ou wim's

Exercice 22 : équations différentielles

Réaliser les 4 exercices suivants :

1. $y' = ay$ (Solution générale)
2. $y' = ay$ avec condition initiale
3. $y' = ay + b$ (solution générale)
4. $y' = ay + b$ avec condition initiale

Exercice 10 **Exercice 11** **Exercice 12** **Exercice 13**

c) Equation différentielle $y' - ay = f$ (avec second membre non constant)

Propriété 5

Cette propriété généralise celle de la section précédente.
Soient a un nombre réel non nul, et f une fonction.
On suppose qu'on connaît une fonction g, solution de l'équation différentielle $y' - ay = f \quad (E)$;
on dit que g est une solution particulière.
Les solutions de l'équation différentielle $y' - ay = f$ sont les fonctions h qui sont la somme d'une solution particulière g de (E) et des solutions de l'équation différentielle sans second ordre $y' - ay = 0$. Ainsi

$$h(x) = \underbrace{C\mathrm{e}^{ax}}_{\text{sol. de } (E_0)} + \underbrace{g(x)}_{\text{sol. part. de } (E)} \quad \text{où } C \text{ est un nombre constant.}$$

Démonstration

- g étant solution de l'équation différentielle $y' = ay + f$, on a :

$$g' = ag + f\,.$$

- Soit h une solution de l'équation différentielle $y' = ay + f$. On a :

$$h' = ah + f\,.$$

- Comme $(h-g)' = h' - g'$,

$$(h-g)' = ah + f - (ag + f) = ah + f - ag - f = ah - ag = a(h-g)\,.$$

$h-g$ est par conséquent une solution de l'équation différentielle $y' = ay$: il existe un réel C tel que $h(x)-g(x) = Ce^{ax}$, ce qui donne : $h(x) = Ce^{ax} + g(x)$.

Méthode ▶ Principe de la résolution des équations $y' = ay + f$

- On détermine une solution particulière g (le plus souvent, elle sera proposée, ou en expliquera comment la trouver).
- On résout l'équation différentielle $y' = ay$ (sans second membre) : ce sont les fonctions d'expression Ce^{ax}, où C est une constante.
- Toutes les solutions de $y' = ay + f$ s'écrivent sous la forme $g(x) + Ce^{ax}$.

A titre d'exemple

Exercice 23 : On souhaite résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y' - 2y = -10x^2 + 10x + 6$.

1. Montrer que la fonction g d'expression $g(x) = 5x^2 - 3$ est une solution particulière.
2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y' = 2y - 10x^2 + 10x + 6$.

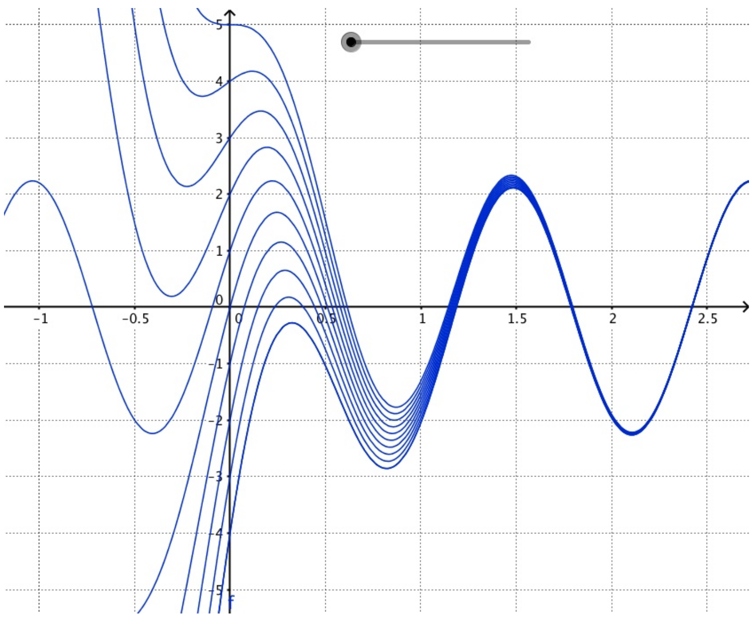
---

1. Pour tout réel x, $g'(x) = 10x$;
   d'autre part, $2g(x) - 10x^2 + 10x + 6 = 10x^2 - 6 - 10x^2 + 10x + 6 = 10x = g'(x)$: g est bien une solution particulière.
2. - Les solutions de $y' = 2y$ ont pour expression Ce^{2x}, où C est une constante.
   - g est une solution particulière de l'équation $y' = 2y - 10x^2 + 10x + 6$.

   Toutes les solutions de $y' = 2y - 10x^2 + 10x + 6$ ont donc pour expression :

$$Ce^{2x} + 5x^2 - 3 \text{ , où } C \text{ est une constante.}$$

Exercice 24
Parmi les courbes intégrales des solutions de (E) : $2y'(x) + 5y(x) = 25\cos(5x)$ repasser la courbe de la fonction g solution de (E) et vérifiant $g(0) = 1$.



Approfondissements

Loi de refroidissement de Newton

Refroidissement d'un café

On souhaite étudier le refroidissement du café servi par une machine initialement à une température de 70° C. On suppose que la température ambiante de la pièce dans laquelle se trouve le café est constante et égale à θ_0° C. La température (en ° C) du café à l'instant t (en min) vaut $f(t)$, où f est une fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$.
On modélise le problème par la loi de refroidissement, énoncée par Isaac Newton : « la vitesse de refroidissement d'un corps est proportionnelle à la différence de température entre ce corps et le milieu ambiant », soit :

$$\theta' = k\,(\theta - \theta_0) \circledast$$

où θ est la température du corps étudié, θ' la vitesse de refroidissement, θ_0 la température ambiante et k une constante négative propre au corps étudié.
Dans ce problème, on estime que la fonction f vérifie alors l'équation :

$$(E): \quad y' + 0,2y = 4 \circledast\circledast$$

où y est une fonction de la variable réelle t et y' sa dérivée première.

On note f' la fonction dérivée de f. Elle correspond à la vitesse de refroidissement du café servi, en degrés par minute.

A - Détermination des constantes

1. En mettant en relation $\circledast$ et $\circledast\circledast$ identifier k et donner sa valeur.
2. Déterminer alors θ_0.

B - Résolution d'une équation différentielle

1. Résoudre sur $[0\ ;\ +\infty[$ l'équation différentielle
$$(E_0): \quad y'(t) + 0,2y(t) = 0.$$
2. Démontrer que $g(t) = 20$ est une solution particulière de (E).
3. Donner la solution générale de (E) sur $[0\ ;\ +\infty[$.
4. Déterminer la fonction f solution de (E) sachant que la température initiale du café est de 70° C.

C - Étude de fonction

On admet que la fonction f est définie pour tout $t \in [0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(t) = 20 + 50\mathrm{e}^{-0,2t}.$$

5. Représenter dans un repère approprié la courbe représentative de la fonction f. Vous pourrez utiliser une table de valeurs pour construire précisément la courbe.

6. Démontrer la décroissance de la fonction f sur $[0\ ;\ +\infty[$ et l'interpréter dans le contexte proposé.
7. Déterminer le comportement de $f(t)$ quand t tend vers $+\infty$.
8. Étudier la convexité de la fonction f sur $[0\ ;\ +\infty[$.
9. Résoudre l'équation $f(t) = 42$ (arrondir à la seconde près).
10. Calculer $f'(0)$.

D - Un vrai faux

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

Les réponses doivent être justifiées.

11. La température du café finit par atteindre 19° C.
12. La vitesse de refroidissement du café à $t = 0$ est de 10 degrés par minutes.
13. La vitesse de refroidissement augmente en fonction du temps.
14. Monsieur Lemcho n'apprécie son café que si sa température est supérieure à 42° C. Il dispose alors de moins de 3 minutes pour déguster son café.

Modèle de croissance logistique (Malthus et Verhulst)

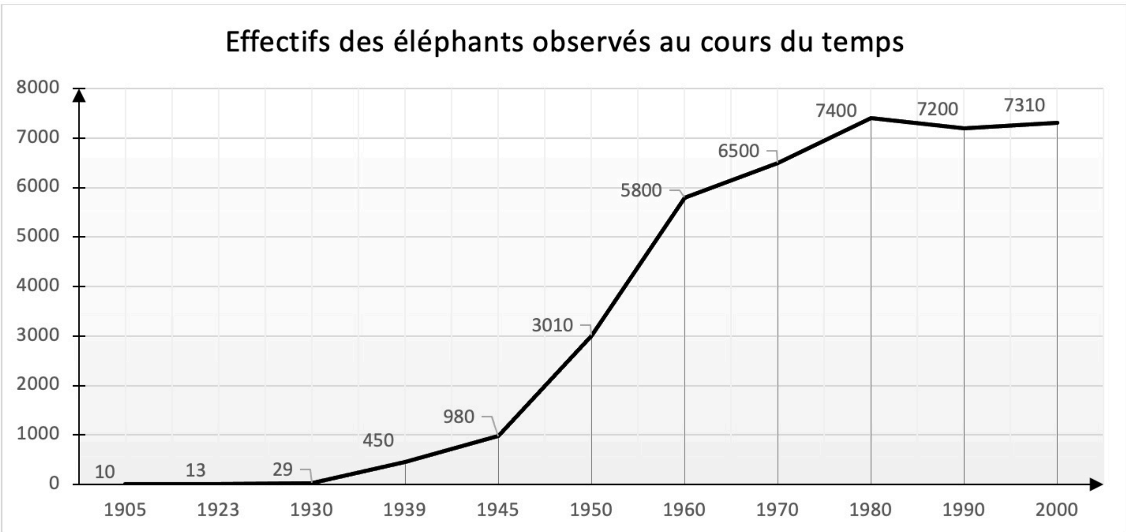
Croissance d'une population d'éléphants

Le saviez-vous ?

L'éléphant africain de la savane (loxodonta africana) se comptait par millions dans la savane africaine avant qu'il ne soit décimé, durant des siècles, par des chasseurs, notamment pour exploiter l'ivoire de ses défenses et prendre possession de ses territoires à des fins agricoles. A la fin du 19e siècle, cette population étant pratiquement arrivée à extinction en Afrique du sud, il fut décidé la création d'un parc naturel, le parc Kruger à la frontière entre l'Afrique du Sud et le Mozambique. Le premier responsable du parc en 1903 ne trouva aucun éléphant à son arrivée mais un petit groupe de 10 furent repérés en 1905, vraisemblablement venu du Mozambique. Des mesures de protections strictes, à la fois des animaux et de leur habitat furent décidées dans ce parc et maintenues tout au long du 20e siècle. Elles permirent une croissance naturelle de cette population, qui fut d'abord lente jusque dans les années 30, puis très rapide jusque dans les années 60. C'est alors qu'on observa à la fois un ralentissement du taux de croissance et, en même temps, un début de dégradation par les éléphants d'autres espèces de l'écosystème comme les baobabs par exemple.

Le relevé des effectifs des éléphants observés $N^{obs}(t)$ en fonction des années ont permis d'obtenir le tableau et le graphe qui suivent :

t	1905	1923	1930	1939	1945	1950	1960	1970	1980	1990	2000
$N^{obs}(t)$	10	13	29	450	980	3010	5800	6500	7400	7200	7310



Le relevé a aussi permis de déterminer la valeur d'une taille limite de la population appelée capacité biotique et qui vaut K=7500 ; la capacité biotique représente la taille de la population en deça de laquelle il convient de rester si l'on veut préserver la cohabitation harmonieuse de la population avec son écosystème. Pour décider de l'attitude à adopter pour gérer au mieux les populations de ce parc, les responsables eurent recours à un modèle mathématique appelé modèle logistique qui a été introduit par Verhulst en 1836. Après plusieurs modélisations, il a été établi que dans le cas de la croissance de population d'éléphants, le taux de croissance de la population vaut r=0,15. Mais avant d'aborder le modèle de Verhulst, faisons comme si la population d'éléphants pouvait croître indéfiniment, sans rencontrer aucune limitation de ressource ou d'espace ; l'effectif aurait alors une croissance exponentielle et serait solution de l'équation différentielle suivante :

$$N'(t) = rN(t) \qquad (Ed_1)$$

Cette équation différentielle est appelée modèle de Malthus. La variable t désigne le nombre d'années écoulées après 1905. On conserve pour r la valeur 0,15. Ainsi pour l'année 1905, $t = 0$ et $N(0) = 10$.

Partie I : Modèle de Malthus

1. Démontrer que la solution de l'équation différentielle (Ed_1) s'écrit :

$$N(t) = 10\mathrm{e}^{0,15t}$$

2. Vérifier votre résultat en calculant la dérivée $N'(t)$ et en la comparant à $rN(t)$.

3. Recopier et compléter le tableau ci-dessous. Que pensez-vous de la modélisation de Malthus ?

Année	1905	1923	1930	1939	1945	1950	1960	1970	1980	1990	2000
t	0	18	25	34	40	45	55	65	75	85	95
$N^{obs}(t)$	10	13	29	450	980	3010	5800	6500	7400	7200	7310
$N(t)$ Mathus											

Mais le modèle de Malthus ne répond pas aux contraintes de l'écosystème. En effet pour l'équation (Ed_1), le taux de croissance $\frac{N'(t)}{N(t)}$ reste constant (égal à $r = 0,15$) au cours du temps et ceci ne tient pas compte des limitations environnementales qui, de fait, ralentissent la croissance lorsqu'on s'approche de la capacité biotique $K = 7500$. D'où l'idée de remplacer ce taux constant r par un taux variable $r\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)$ qui dépend de la taille de la population. On voit en effet que le coefficient $1 - \frac{N}{K}$ reste proche de 1 lorsque la taille de la population est très petite, ce qui explique le début de croissance exponentielle, puis il diminue jusqu'à tendre vers 0 lorsque la taille de la population augmente et tend vers la capacité biotique K.
La courbe qui représente la fonction solution de l'équation différentielle

$$N'(t) = rN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)$$

est appelée courbe logistique.
On note (Ed_2) l'équation différentielle : $y' = ry\left(1 - \frac{y}{K}\right)$

Partie II : Modèle de Verhulst

1. Vérifier l'équivalence suivante :

$$y' = ry\left(1 - \frac{y}{K}\right) \iff \left(\frac{1}{y}\right)' = -r\left(\frac{1}{y}\right) + \frac{r}{K}$$

2. En déduire que N est solution de (Ed_2) si, et seulement si $\frac{1}{N}$ est solution d'une équation différentielle (Ed_3) que l'on précisera.

3. Résoudre l'équation (Ed_3) puis vérifier que $N(t) = \dfrac{N(0)K}{N(0) + e^{-rt}(K - N(0))}$.

   On sait que $K = 7500$, $r = 0,15$ et $N(0) = 10$.

4. Recopier et compléter le tableau ci-dessous.

Année	1905	1923	1930	1939	1945	1950	1960	1970	1980	1990	2000
t	0	18	25	34	40	45	55	65	75	85	95
$N^{obs}(t)$	10	13	29	450	980	3010	5800	6500	7400	7200	7310
$N(t)$ Verhulst											

5. Justifier que $N'' = rN'\left(1 - \frac{2N}{K}\right)$. En déduire que la courbe de N admet un point d'inflexion que l'on précisera. Interpréter ce résultat pour décrire la croissance de la population dans ce modèle.

6. En utilisant un grapheur, comme par exemple Geogebra, représenter la courbe logistique théorique représentative du modèle théorique N, et sur le même graphique le nuage de points correspondant au relevé des effectifs des éléphants observés pour $t \in [0; 95]$.
   Que pensez-vous de la modélisation de Verhulst ?

Problème : Décharge de condensateur

Les unités de mesure utilisées sont les unités S.I.

Un condensateur de capacité C est chargé sous une tension initiale de 20 volts. Il se décharge ensuite dans un résistor de résistance R ; on note $a = RC$. La tension aux bornes du condensateur est une fonction V du temps t définie sur $[0, +\infty[$.

On admet que V est une fonction dérivable solution de l'équation différentielle :

$$V'(t) + \frac{1}{a}V(t) = 0. \quad (E)$$

1. a) Déterminer toutes les fonctions solutions de l'équation différentielle (E).
   b) On rappelle que pour $t = 0$ on a $V(0) = 20$. Déterminer l'expression de V.

2. Dans cette question, on suppose que $R = 1000$ et $C = 10^{-4}$.
   a) Montrer que l'on a alors $V(t) = 20e^{-10t}$.
   b) Étudier les variations de la fonction V.
   c) Déterminer les valeurs de t pour lesquelles $V(t) \geq 0,02$.
   d) L'intensité traversant le circuit est une fonction I du temps ; on a $I(t) = CV'(t)$. Déterminer $I(t)$.

e) Calculer l'énergie W dissipée dans le résistor entre les instants $t = 0$ et $t = 0,69$ sachant que

$$W = \int_0^{0.69} RI^2(t)\mathrm{d}t.$$

....
....
....
....

3. Dans cette question, la tension aux bornes étant définie par $V(t) = 20e^{-\frac{t}{a}}$, on note C_a la courbe représentative de V dans un repère orthogonal avec les unités graphiques 5 cm sur l'axe des abscisses pour 0,l seconde et 0,5 cm sur l'axe des ordonnées pour représenter 1 volt.

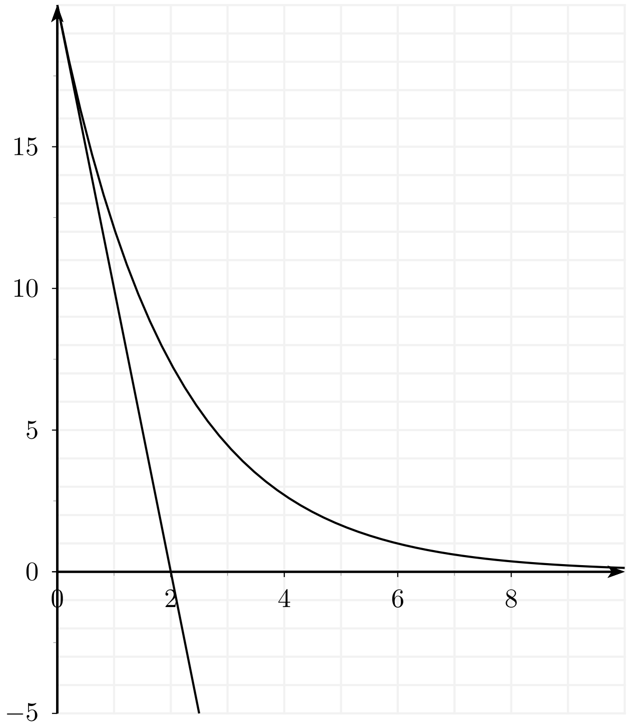
   a) Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe C_a au point d'abscisse 0.

   b) Soit M le point d'intersection de T avec l'axe des abscisses. Déterminer l'abscisse de M.

   c) Pour un certain dipôle on a tracé la courbe représentative $\mathcal{C}$, ainsi que sa tangente au point d'abscisse 0 sur le graphique ci-dessous. Déduire de ce graphique la valeur correspondante de a.

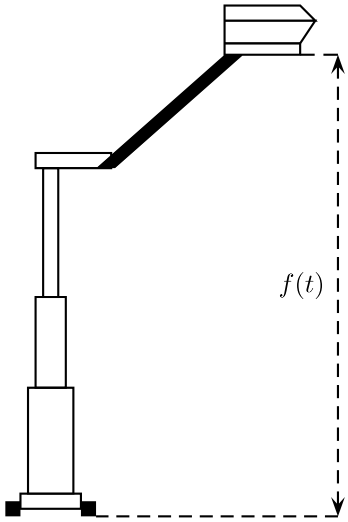
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

. . . .
. . . .
. . . .


15
10
5
0
−5
0
2
4
6
8

Pour s'entraîner au CCF

Une société utilise, dans le cadre de son activité de nettoyage de vitres, une nacelle élévatrice à mât télescopique vertical. On souhaite étudier la durée nécessaire pour que la nacelle atteigne sa hauteur opérationnelle.
On note $f(t)$ la hauteur, en mètre de la nacelle à l'instant t, en seconde. On suppose que f une fonction de la variable t définie et dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$.



Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante

A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) :

$$y' + 0,3y = 3,6$$

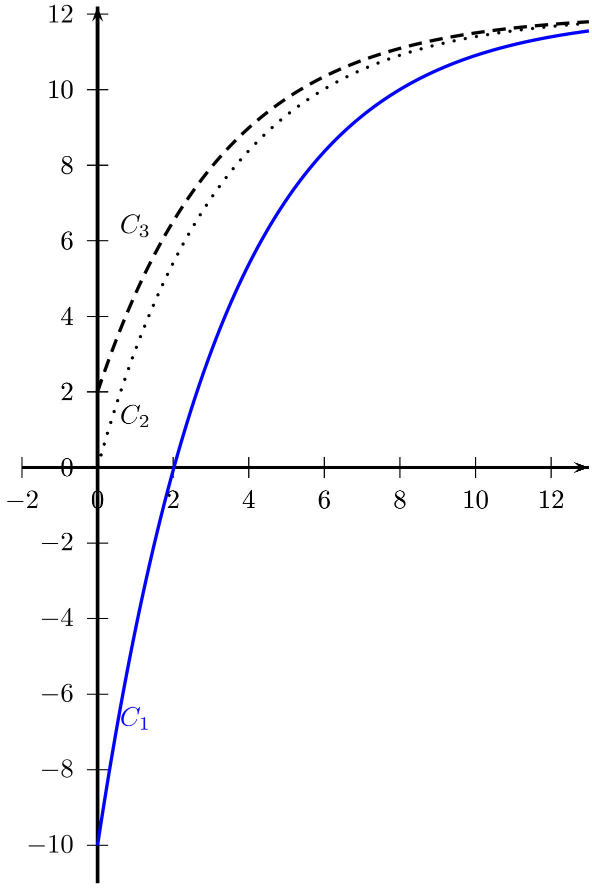
où y est une fonction inconnue de la variable réelle t, définie et dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ et y' la fonction dérivée de y.

1. Résoudre l'équation différentielle (E_0) :

$$y' + 0,3y = 0.$$

2. Vérifier que la fonction g, définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(t) = 12$, est une solution de l'équation différentielle (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4. *Cette question est une question à choix multiples. Une seule réponse est exacte.*
   Recopier sur la copie la réponse qui vous paraît exacte. On ne demande aucune justification.

   On a représenté ci-dessous à l'aide d'un logiciel, certaines solutions de l'équation différentielle (E).



La courbe représentative de la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale $f(0) = 2$ est :

la courbe C_1	la courbe C_2	la courbe C_3

B. Étude de fonction et application

Soit f la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(t) = -10\mathrm{e}^{-0,3t} + 12.$$

On rappelle que $f(t)$ désigne la hauteur de la nacelle, exprimée en mètre, à l'instant t, exprimé en seconde.
On désigne par C la courbe représentative de f dans un repère $(O; \overrightarrow{\imath}; \overrightarrow{\jmath})$.

1. Déterminer la hauteur de la nacelle à l'instant $t = 0$.
2. Un logiciel de calcul formel fournit les résultats suivants que l'on admet et qui pourront être exploités dans les questions suivantes.

Calcul formel	
1	$f(t) := -10 * \exp(-0,3t) + 12$ $\rightarrow \quad f(t) := -10\mathrm{e}^{-\frac{3}{10}t} + 12$
2	Limite $[f(t), +\infty]$ $\rightarrow 12$
3	$f(t)$ Dérivée : $3\mathrm{e}^{-\frac{3}{10}t}$

   a) Justifier que la courbe C admet une asymptote dont on donnera une équation.

   b) Déterminer le signe de $f'(t)$ sur $[0\ ;\ +\infty[$ puis on déduire le sens de variation de la fonction f sur cet intervalle,

c) La vitesse de la nacelle, en mètre par seconde, à l'instant t, exprimé en seconde, est modélisée par $f'(t)$. Calculer la vitesse de la nacelle à l'instant $t = 0$.

C. Algorithmique et application

On considère que la nacelle est stabilisée dès lors que sa hauteur $f(t)$ à l'instant t vérifie l'encadrement :

$$11,9 \leqslant f(t) \leqslant 12.$$

On rappelle que la fonction f est définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(t) = -10\mathrm{e}^{-0,3t} + 12.$$

L'objectif de cette partie est de déterminer à partir de quel instant la nacelle peut être considérée comme stabilisée.

1. On considère l'algorithme suivant :

Variable :	t est un nombre réel
Initialisation :	t prend la valeur 0
Traitement :	Tant que $f(t) < 11,9$
	t prend la valeur $t + 1$
	Fin de Tant que
Affichage :	Afficher t

Faire tourner cet algorithme « à la main » en complétant le tableau ci-dessous que l'on recopiera sur la copie.

Étapes	Valeur de t	Valeur de $f(t)$	Condition $f(t) < 11,9$	Affichage
Étape 1	0	$f(0) = 2$	VRAIE	aucun
Étape 2	1	$f(1) \approx 4,59$	VRAIE	aucun
...	...	...	...	...
Étape 14	13	$f(13) \approx 11,80$		
Étape 15				
Étape 16				
Étape 17				

2. À partir de quel instant t_0, arrondi à la seconde, peut-on considérer que la nacelle est stabilisée ?
3. Proposer une modification de l'algorithme précédent afin qu'il permette d'obtenir une valeur approchée de t_0 arrondie au dixième.