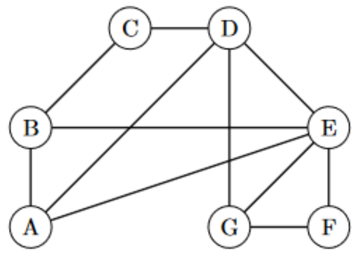
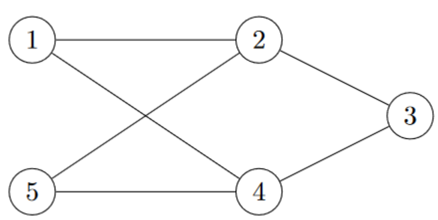
TD - Chapitre 18 - Les graphes.

Exercice 1. On considère le graphe G suivant, dont on note M la matrice d'adjacence :



1. G est-il complet ?
2. G est-il connexe ?
3. Sans construire M, justifier que chaque ligne et chaque colonne de M a au moins deux coefficients non nuls.
4. Sans la calculer, dire si M^2 a au moins un coefficient nul.
5. Donner M.
6. On donne :
$$M^4 = \begin{pmatrix} 24 & 14 & 16 & 18 & 28 & 12 & 21 \\ 14 & 22 & 5 & 27 & 19 & 14 & 14 \\ 16 & 5 & 13 & 7 & 20 & 5 & 13 \\ 18 & 27 & 7 & 35 & 27 & 19 & 18 \\ 28 & 19 & 20 & 27 & 43 & 16 & 26 \\ 12 & 14 & 5 & 19 & 16 & 12 & 12 \\ 21 & 14 & 13 & 18 & 26 & 12 & 21 \end{pmatrix}$$
Quel est le nombre de chaînes de longueur 4 reliant B et C ? Les donner.
7. Ce graphe est-il eulérien ? Semi-eulérien ? Si c'est le cas, donner un cycle eulérien ou une chaîne eulérienne.

Exercice 2. On considère le graphe suivant :



1. Ecrire la matrice d'adjacence M de ce graphe.
2. Montrer que pour tout entier naturel k, $M^{2k+1} = 6^k M$.
3. En déduire le nombre de chemins de longueur 7 entre le sommet 2 et le sommet 3.

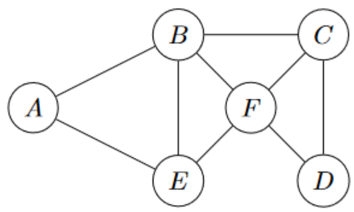
Exercice 3. Soit $n \geq 2$. On considère n personnes qui se serrent toutes la main. Quel est le nombre de poignées de mains serrées ?

Exercice 4. Mon voisin recevait des invités hier soir au dîner. J'ai entendu 28 tintements de verre. En supposant que chacun a trinqué une fois et une seule avec chaque autre personne, combien étaient-ils à table ?

Exercice 5. L'algorithme d'Euler permet, lorsqu'elle existe, de déterminer une chaîne eulérienne. Voici les quatre étapes :

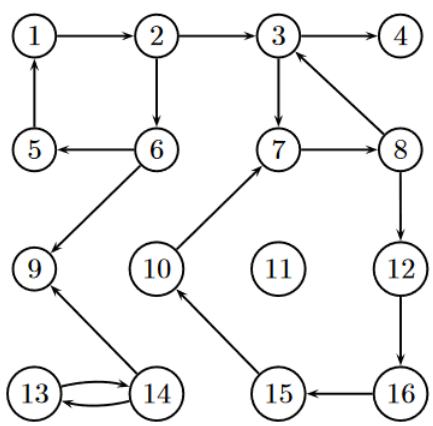
- Créer une chaîne entre deux sommets de degrés impairs.
- Tant que toutes les arêtes du graphe n'ont pas été utilisées, choisir un sommet quelconque de la chaîne précédente et trouver un cycle associé (partant de ce sommet et arrivant à ce sommet) ne contenant aucune des arêtes déjà utilisées.
- Insérer ce cycle en remplacement du sommet choisi à l'étape précédente.
- Recommencer ainsi de suite jusqu'à avoir utilisé toutes les arêtes.

On considère le graphe G suivant :



1. Justifier que G est semi-eulérien et donner les deux seules extrémités possibles d'une chaîne eulérienne.
2. Mettre en place l'algorithme d'Euler en partant du chemin $E-F-D-C$ puis en partant du chemin $E-B-C$.

Exercice 6. On considère le graphe suivant :



1. Dans un premier temps, on ne tient pas compte de l'orientation des arêtes. Combien d'arête(s) faut-il rajouter au minimum pour rendre le graphe connexe ? Et pour le rendre semi-eulérien ? Et eulérien ? Dans chaque cas on donnera le(s) arête(s) à rajouter.
2. On revient au graphe de départ. Rajouter des arêtes pour le rendre (fortement) connexe. Faire de même pour le rendre semi-eulérien puis eulérien.