# Chapitre 18 - Théorie des graphes

**Introduction**.

## I) Vocabulaire introductif et premiers résultats

### A) Graphes orientés ou non

**Définition 1.** Un *graphe non orienté* est un couple $(V, E)$, où $V$ et $E$ sont deux ensembles finis :
- $V = \{v_1, ..., v_n\}$ est l'ensemble des *sommets* (*vertices*) ;
- $E = \{e_1, ..., e_m\}$ est l'ensemble des *arêtes* (*edges*).

. Une arête est un ensemble d'un ou deux sommets :

$$E \subset \{\{x, y\}, (x, y) \in V^2\}.$$

On dit que deux sommets (différents) $x$ et $y$ sont *adjacents* si $\{x, y\} \in E$.
On appelle enfin *ordre* du graphe le nombre de sommets.

**Remarque 1.** Pour représenter un graphe, on place les sommets sur un plan, et on relie ceux qui sont adjacents, par un segment ou une courbe selon la situation.

**Exemple 1.**

**Définition 2.** Un *graphe orienté* est un couple $(V, E)$, où $V$ et $E$ sont deux ensembles finis :
- $V = \{v_1, ..., v_n\}$ est l'ensemble des *sommets* (*vertices*) ;
- $E = \{e_1, ..., e_m\}$ est l'ensemble des *arêtes* (*edges*).

. Une arête est un couple de deux sommets (éventuellement identiques) :

$$E \subset V^2.$$

On dit que deux sommets (différents) $x$ et $y$ sont *adjacents* si $(x, y) \in E$.
On appelle enfin *ordre* du graphe le nombre de sommets.

**Exemple 2.**

**Définition 3.** On appelle *graphe complet* un graphe dont tous les sommets sont adjacents.

**Exemple 3.**

✎ **Exercice 1.** Donner le nombre d'arêtes d'un graphe complet non orienté d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$.

**Définition 4.** Dans un graphe, on appelle *degré* d'un sommet le nombre d'arêtes reliant ce sommet.

**Remarque 2.** Dans un graphe, une boucle à un sommet compte "double".

**Théorème 1.** *Formule d'Euler (ou des poignées de mains).*
On considère un graphe $G = (V, E)$, on note $a$ le nombre d'arêtes et $d(v)$ le degré d'un sommet $v$. Alors on a :

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2a.$$

✎ **Exercice 2.** En utilisant cette formule, retrouver le nombre d'arêtes d'un graphe complet non orienté d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$.

## B) Matrice d'adjacence d'un graphe

**Définition 5.** On considère un graphe $G = (V, E)$ non orienté d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$, et on note $V = \{v_1, ..., v_n\}$. On appelle matrice d'adjacence de $G$ la matrice $M$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!],\ m_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } \{v_i, v_j\} \in E \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

**Exemple 4.**

**Propriété 1.** La matrice d'adjacence d'un graphe non orienté est symétrique.

**Définition 6.** On considère un graphe $G = (V, E)$ orienté d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$, et on note $V = \{v_1, ..., v_n\}$. On appelle matrice d'adjacence de $G$ la matrice $M$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!],\ m_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } (v_i, v_j) \in E \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

**Exemple 5.**

## II) Chemins dans un graphe

**Définition 7.** Soient $a$ et $b$ deux sommets d'un graphe et soit $k \in \mathbb{N}^*$. On appelle *chaîne* (ou *chemin*) de longueur $k$ reliant $a$ et $b$ toute suite finie de $k+1$ sommets $a = x_0$, $x_1, \dots x_{k-1}$, $x_k = b$, telle que pour tout $i \in [\![0, k-1]\!]$, il existe une arête reliant $x_i$ et $x_{i+1}$.

**Remarque 3.**

**Exemple 6.**

**Définition 8.** Une *chaîne eulérienne* (ou *parcours eulérien*) est une chaîne passant par toutes les arêtes, une seule fois. Si dans une telle chaîne le sommet initial coïncide avec le sommet final, on parle de *cycle eulérien.* Un graphe contenant au moins un circuit eulérien est dit *eulérien.* Un graphe qui admet une chaîne eulérienne mais pas de cycle eulérien est dit *semi-eulérien.*

**Exemple 7.**

**Propriété 2.** Soient $M$ la matrice d'adjacence d'un graphe $G$ d'ordre $n$, dont les sommets sont notés $V = (v_1, ..., v_n)$. Soient de plus $d \in \mathbb{N}^*$ et $i, j \in [\![1, n]\!]$.
Le coefficient de $M^d$ situé à la $i-$ème ligne et $j-$ème colonne est le nombre de chemins de longueur $d$ reliant le sommet $v_i$ au sommet $v_j$.

**Définition 9.** Un graphe est dit *connexe* si tout sommet est relié par une chaîne à n'importe quel autre sommet.

✎ **Exercice 3.** Montrer qu'un graphe connexe d'ordre n possède au moins $n-1$ arêtes.

**Exemple 8.**

**Théorème 2. Admis**.
Soit $G$ un graphe connexe.

- $G$ possède une chaîne eulérienne entre deux sommets distincts si et seulement si ces deux sommets sont les seuls du graphe à avoir un degré impair.
- $G$ possède un cycle eulérien si et seulement si tous les sommets sont de degrés pair.

**Exemples 9, 10 et 11**.
.

**Théorème 3. Admis.**
Soit $G$ un graphe orienté d'ordre $n$, et on note $M$ sa matrice d'adjacence. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $G$ est connexe.

(ii) Les coefficients de la matrices $I_n + M + ... + M^{n-1}$ sont tous strictement positifs.

**Exemple 12.**

## III) Analyse des réseaux sociaux

*Les notions de cette partie sont mentionnées à titre d'exemple et ne sont pas exigibles.*

**Exemples 13 et 14.** Modélisation des réseaux sociaux selon le type de relation.

**Définition 10.** On considère un graphe $G = (V, E)$ d'ordre $n \geq 2$, non orienté et sans boucle. Pour $v \in V$, on appelle *degré de centralité* de $v$ le réel $\dfrac{d(v)}{n-1}$, où $d(v)$ est le degré du sommet $v$.

**Définition 11.** On considère un graphe $G = (V, E)$ et soit $v \in V$. Le *degré d'intermédiarité* de $v$ est défini par la quantité :

$$\sum_{\substack{s \in V, \\ s \neq v}} \sum_{\substack{t \in V, \\ t \neq v}} \frac{\sigma_{s,t}(v)}{\sigma_{s,t}},$$

où $\sigma_{s,t}$ désigne le nombre de plus courts chemins de $s$ à $t$ et $\sigma_{s,t}(v)$ le nombre de tels chemins passant par $v$.

**Remarques 4 et 5.** Interprétation.

**Exemple 15.** Différences entre ces indicateurs.