

C30211

Ecole Normale Supérieure de Cachan
61 avenue du président Wilson
94230 CACHAN

Concours d'admission en **3^{ème} année**
Informatique

Session 2010

INFORMATIQUE 1

Durée : **5 heures**

« Aucun document n'est autorisé »

« Aucun dictionnaire n'est autorisé »

« L'usage de toute calculatrice est interdit »

INFORMATIQUE I

Ce sujet étudie des jeux à deux joueurs : ces derniers jouent à tour de rôle en déplaçant un jeton sur un graphe. Une partie est alors un chemin dans le graphe, et le vainqueur est déterminé par une propriété de ce chemin. Etant donné un jeu, on souhaite décider qui possède une stratégie gagnante depuis le sommet de départ. Ce sujet étudie ce problème pour plusieurs classes de jeux.

La notation tiendra compte de la rigueur des raisonnements et de la clarté des explications. Chaque question pourra être traitée en admettant les résultats des questions précédentes.

PARTIE 1. PRÉLIMINAIRES

On commence par quelques définitions et notations qui seront valables pour l'intégralité du sujet. On donne ensuite quelques exemples et propriétés de base utiles dans la suite.

Dans ce qui suit, pour un ensemble fini Σ , on notera par Σ^* l'ensemble des suites finies (ou mots finis selon le contexte) sur Σ , et Σ^ω l'ensemble des suites infinies indicées par \mathbb{N} (ou mots infinis selon le contexte) sur Σ . Enfin, on notera ε le mot vide.

Un **graphe** est un couple $G = (S, A)$ où S est un ensemble fini de sommets et $A \subseteq S \times S$ est un ensemble d'arcs. Dans ce sujet, sauf mention explicite, tous les graphes considérés seront **sans cul-de-sac**, c'est-à-dire que pour tout sommet $s \in S$ il existe un sommet $s' \in S$ tel que $(s, s') \in A$.

La Figure 1 donne la représentation graphique du graphe $G = (S, A)$ où :

- $S = \{1, 2, 3\}$.
- $A = \{(1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 2)\}$.

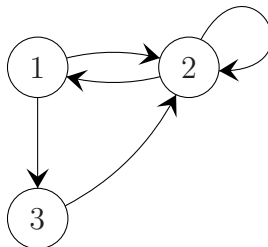


FIGURE 1 – Représentation graphique d'un graphe

Les deux joueurs seront appelés **Eve** et **Adam** .

On se fixe un graphe $G = (S, A)$ et l'on considère une partition des sommets $S = S_E \cup S_A$ (avec $S_E \cap S_A = \emptyset$) entre les deux joueurs : les sommets dans S_E sont ceux d'Eve tandis que les sommets dans S_A appartiennent à Adam.

Un triplet $\mathcal{G} = (G, S_E, S_A)$ est appelé une **arène**. La représentation graphique d'une arène est la même que celle du graphe sous-jacent, à la différence près que les sommets d'Eve sont représentés par des cercles et ceux d'Adam par des carrés. La Figure 2 donne la représentation d'une arène $\mathcal{G} = (G, S_E, S_A)$ où $S_E = \{2, 4, 7, 5, 8\}$ et $S_A = \{1, 3, 6\}$.

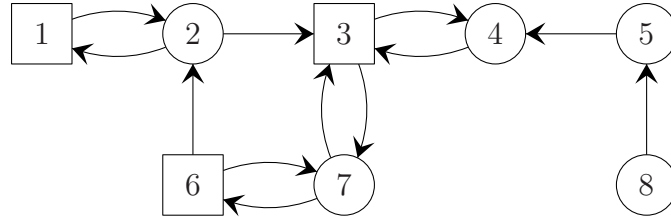


FIGURE 2 – Exemple d'arène

Soient un graphe $G = (S, A)$ et une arène $\mathcal{G} = (G, S_E, S_A)$. Une **condition de gain** sur \mathcal{G} est un sous-ensemble Ω de S^ω (on rappelle que S^ω est l'ensemble des suites d'éléments de S indicées par \mathbb{N}).

Enfin, un **jeu à deux joueurs** sur une arène \mathcal{G} est un couple $\mathbb{G} = (\mathcal{G}, \Omega)$, où \mathcal{G} est une arène et Ω une condition de gain sur \mathcal{G} .

Une **partie** dans un jeu $\mathbb{G} = (\mathcal{G}, \Omega)$ débutant en s_0 est définie comme suit. Le joueur qui contrôle le sommet initial s_0 (Eve si $s_0 \in S_E$, Adam sinon) choisit un sommet s_1 tel que $(s_0, s_1) \in A$. Ensuite, le joueur qui contrôle s_1 choisit un sommet s_2 tel que $(s_1, s_2) \in A$, et ainsi de suite. Une partie est donc un chemin infini $\lambda = s_0 s_1 s_2 \dots \in S^\omega$, dans G .

Eve **remporte** une partie λ si et seulement si λ appartient à Ω , sinon c'est Adam qui gagne. On dira également que la partie est **gagnante** pour Eve (ou pour Adam le cas échéant).

Une **stratégie** est une fonction partielle $\varphi : S^* \rightarrow S$ qui à toute suite finie de sommets $s_0 s_1 \dots s_n$ associe un sommet s_{n+1} tel que $(s_n, s_{n+1}) \in A$. On dira qu'Eve **respecte** une stratégie φ lors d'une partie $\lambda = s_0 s_1 s_2 \dots \in S^\omega$ si, pour tout $i \geq 0$, $s_i \in S_E \Rightarrow s_{i+1} = \varphi(s_0 \dots s_i)$: autrement dit, à chaque fois que c'est à Eve de jouer, cette dernière joue le coup donné par φ . Une stratégie φ est **gagnante** pour Eve depuis un sommet s_0 si toute partie débutant en s_0 où Eve respecte φ est gagnante pour cette dernière. Enfin, un sommet s_0 est gagnant pour Eve s'il existe une stratégie gagnante pour Eve depuis s_0 . Les notions de stratégies, de stratégies gagnantes et de sommets gagnants pour Adam sont définies de façon symétrique.

Question 1. Montrer qu'il n'existe pas de jeu dans lequel un sommet est à la fois gagnant pour Eve et pour Adam.

On considère l'arène donnée dans la Figure 2. On appelle cette dernière \mathcal{G} , et on note $G = (S, A)$ le graphe sous-jacent.

Question 2. On définit la stratégie φ suivante pour Eve.

$$\varphi(s_0 s_1 \cdots s_k) = \begin{cases} 3 & \text{si } s_k = 4 \\ 3 & \text{si } s_k = 2 \\ 4 & \text{si } s_k = 5 \\ 6 & \text{si } s_k = 7 \\ 5 & \text{si } s_k = 8 \end{cases}$$

On considère la condition de gain

$$\Omega_1 = (S \setminus \{1\})^\omega = \{\lambda \in S^\omega \mid \lambda \text{ ne visite pas le sommet } 1\}$$

Depuis quels sommets la stratégie φ est-elle gagnante pour Eve dans le jeu (\mathcal{G}, Ω_1) ?

Question 3. On considère maintenant la condition de gain

$$\Omega_2 = \{\lambda \in S^\omega \mid \lambda \text{ visite infiniment souvent le sommet } 6\}$$

Montrer qu'il n'existe pas de sommet gagnant pour Eve dans le jeu (\mathcal{G}, Ω_2) .

Montrer que tout sommet est gagnant pour Adam dans le jeu (\mathcal{G}, Ω_2) .

PARTIE 2. JEUX D'ACCESSIBILITÉ

On considère une première famille de jeux : les jeux d'accessibilité. Dans ces derniers, Eve veut atteindre un ensemble de sommets finaux. On montre que l'on possède un algorithme pour calculer l'ensemble des sommets gagnants ainsi que des stratégies associées.

Soit une arène \mathcal{G} , et soit $G = (S, A)$ le graphe sous-jacent. Une condition de gain Ω sur \mathcal{G} est qualifiée de **condition d'accessibilité** si elle est de la forme

$$\Omega = \{\lambda \mid \lambda \text{ visite un sommet de } F\}$$

pour un sous-ensemble $F \subseteq S$ de sommets **finaux**.

Question 4. On considère une arène $\mathcal{G} = (G, S_E, S_A)$ telle que $S_A = \emptyset$. En d'autres termes, tous les sommets sont contrôlés par Eve. Donner un algorithme qui, pour une telle arène et pour une condition d'accessibilité Ω , calcule l'ensemble des sommets gagnants pour Eve dans le jeu (\mathcal{G}, Ω) . Quelle est la complexité de votre algorithme (on précisera les structures de données utilisées pour représenter les différentes entrées du problème) ?

Une stratégie $\varphi : S^* \rightarrow S$ est qualifiée de **positionnelle** si pour tout $\lambda, \lambda' \in S^*$, on a $\varphi(\lambda \cdot s) = \varphi(\lambda' \cdot s)$. En d'autres termes, le coup donné par une stratégie positionnelle ne dépend que du sommet courant, et l'on pourra donc représenter une stratégie comme une fonction de S dans S .

Question 5. On considère à nouveau une arène $\mathcal{G} = (G, S_E, S_A)$ telle que $S_A = \emptyset$. Montrer que, pour un jeu d'accessibilité sur \mathcal{G} , Eve possède, pour tout sommet gagnant, une stratégie gagnante positionnelle. Donner un algorithme qui construit une telle stratégie et préciser sa complexité.

On fixe désormais une arène $\mathcal{G} = (G, S_E, S_A)$ et on note $G = (S, A)$ le graphe sous-jacent. On se donne un ensemble $F \subseteq S$ de sommets finaux, on appelle Ω la condition d'accessibilité associée à F et on note $\mathbb{G} = (\mathcal{G}, \Omega)$ le jeu associé. On définit la suite suivante de sommets.

$$\begin{cases} X_0 = & F \\ X_{i+1} = & X_i \cup \{s \in S_E \mid \exists s' \in X_i \text{ t.q. } (s, s') \in A\} \\ & \cup \{s \in S_A \mid \forall s' \in S, (s, s') \in A \Rightarrow s' \in X_i\} \end{cases}$$

Question 6. Prouver que la suite $(X_i)_{i \geq 0}$ converge. Plus précisément, montrer qu'il existe un indice $n \geq 0$ tel que pour tout $i, j \geq n$, $X_i = X_j$; on notera X cette valeur ($X_i = X$ pour tout $i \geq n$) que l'on qualifiera de **limite** de la suite $(X_i)_{i \geq 0}$.

On définit la fonction $rg : S \rightarrow \mathbb{N}$ par $rg(s) = \min\{i \mid s \in X_i\}$ (avec la convention que $\min \emptyset = \infty$).

Question 7. Prouver que pour tout $s \in X$, on est dans l'un des trois cas suivants :

- $s \in F$;
- $s \in S_E$ et s possède un successeur s' dans X tel que $rg(s') < rg(s)$;
- $s \in S_A$ et pour tout successeur s' de s , s' est dans X et $rg(s') < rg(s)$.

Question 8. Donner une stratégie positionnelle gagnante pour Eve depuis tout sommet de X .

Question 9. Donner une stratégie positionnelle gagnante pour Adam depuis tout sommet de $S \setminus X$.

Question 10. Dédurre des questions précédentes que l'on peut, dans un jeu muni d'une condition d'accessibilité, calculer l'ensemble des sommets gagnants pour Eve et Adam, ainsi que des stratégies positionnelles associées. Préciser la complexité des algorithmes associés.

On dispose d'une tablette de chocolat formée de n lignes et de k colonnes. Le carré supérieur gauche est empoisonné. Eve et Adam, jouent à tour de rôle et Eve commence. Un coup consiste à choisir un carré de chocolat et à le manger ainsi que tous les carrés qui sont à sa droite et en dessous de lui. Le joueur qui mange le carré empoisonné perd la partie (et meurt dans d'atroces souffrances). On souhaite déterminer si Eve possède une stratégie gagnante dans ce jeu.

Question 11. Montrer qu'Eve possède une stratégie gagnante si la tablette est composée d'une seule ligne d'au moins deux carrés.

Question 12. Montrer qu'Eve possède une stratégie gagnante si la tablette contient n lignes de n colonnes pour $n > 1$.

Question 13. Proposer une modélisation du jeu dans le cadre précédemment développé.

Question 14. Estimer la taille du graphe de jeu obtenu. L'algorithme précédemment développé fonctionnera-t-il pour des tablettes de grandes tailles (on estimera la taille critique à partir de laquelle l'algorithme sera trop long à exécuter)?

PARTIE 3. JEUX COMBINATOIRES

On considère des jeux d'accessibilité sur des arènes dont la taille est trop grosse pour utiliser les techniques de la partie précédente, et on développe des solutions ad hoc.

Le jeu de Nim se joue à deux joueurs. On considère m vases, le i -ème vase contenant x_i fruits. Les joueurs, Eve et Adam, jouent alternativement et Eve commence. Un tour de jeu consiste à retirer autant de fruits que l'on désire (mais au moins un) dans un **même** vase. Le joueur qui gagne est celui qui enlève le dernier fruit.

Question 15. On considère la fonction suivante G appelée **fonction de Grundy** qui prend en argument les nombres de fruits dans chaque vase et retourne un entier $G(x_1, x_2, \dots, x_m) = a$ défini de la façon suivante : si l'on note $a[i]$ le i -ème bit de la décomposition en base 2 de a , c'est-à-dire que $a = \sum_{i=0}^n 2^i a[i]$, alors $a[i]$ est défini par $a[i] = \left(\sum_{l=1}^m x_l[i] \right) \bmod 2$, où $x_l[i]$ désigne le i -ème bit de la décomposition en base 2 de x_l .

Ainsi, pour calculer $G(6, 9, 1, 10)$, on écrit tout d'abord 6, 9, 1, 10 en base 2 et on fait la somme par colonne modulo 2, ce qui donne la représentation en base 2 de a . On n'a alors plus qu'à convertir a en base 10 :

$$\begin{array}{rcccc}
 6 & = & 0 & 1 & 1 & 0 \\
 9 & = & 1 & 0 & 0 & 1 \\
 1 & = & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 10 & = & 1 & 0 & 1 & 0 \\
 \hline
 a & = & 0 & 1 & 0 & 0
 \end{array}$$

Ainsi on a $G(6, 9, 1, 10) = a = 4$.

Question 16. Calculer $G(10, 5, 2, 4)$.

Question 17. On va maintenant prouver le résultat suivant :

Soit la configuration de jeu où les vases contiennent respectivement x_1, x_2, \dots, x_m fruits. Alors le joueur dont c'est le tour a une stratégie gagnante si et seulement si $G(x_1, \dots, x_m) \neq 0$.

Comme ce résultat est une équivalence, on aura aussi que lorsque $G(x_1, \dots, x_m) = 0$, le joueur qui doit jouer va perdre si son adversaire joue correctement. On coupe en deux l'ensemble des configurations de jeu en Y_0 et Y_1 , celles de Y_0 correspondant aux cas où la fonction de Grundy est nulle.

- (a) Prouver que, pour toute configuration dans Y_0 , et quel que soit le coup joué, la configuration suivante est dans Y_1 .
- (b) Réciproquement, prouver que, pour toute configuration dans Y_1 , il existe un coup tel que la configuration suivante soit dans Y_0 .
- (c) Conclure et déduire de la preuve une stratégie gagnante associée.

Question 18. Décrire, sans entrer dans les détails techniques, la structure générale d'un programme qui étant donnée une configuration du jeu (c'est-à-dire un m -uplet d'entiers décrivant le nombre de fruits par vase) donne un coup (c'est-à-dire un couple vase, nombre de fruits à en retirer) optimal à jouer.

On considère maintenant la variante du jeu de Nim, dite **Nim misère**. Cette fois, le joueur qui enlève le dernier fruit perd la partie.

Question 19. Qui gagne dans le cas où les vases contiennent tous un seul fruit (c'est-à-dire que $x_i = 1$ pour tout i) ?

Question 20. Qui gagne dans le cas où exactement un vase contient strictement plus qu'un fruit (c'est-à-dire qu'il existe j tel que $x_j > 1$ et pour tout $i \neq j$, $0 \leq x_i \leq 1$) ?

Question 21. Montrer que dans tous les autres cas (c'est-à-dire dès qu'il existe $i \neq j$ tels que $x_i > 1$ et $x_j > 1$), le joueur à qui c'est le tour de jouer gagne dans le Nim misère si et seulement s'il gagne dans le Nim classique.

PARTIE 4. JEUX RÉGULIERS

On considère à nouveaux des jeux sur des arènes mais cette fois-ci la condition de gain est donnée par un automate fini. On montre comment se ramener au cas des jeux d'accessibilité.

Un **automate déterministe complet** est un quintuplet $\mathcal{A} = (Q, A, q_{in}, F, \delta)$ où Q est un ensemble fini d'états de contrôle, A est un alphabet fini, $q_{in} \in Q$ est l'état initial, $F \subseteq Q$ est l'ensemble des états finaux et $\delta : Q \times A \rightarrow Q$ est une fonction (totale) de transition.

Étant donné un automate $\mathcal{A} = (Q, A, q_{in}, F, \delta)$ et un mot $u = a_1 a_2 \cdots a_n$, l'unique **calcul** de \mathcal{A} sur u est la suite d'états de longueur $n + 1$, $c = q_0 q_1 q_2 \cdots q_n$ telle que $q_0 = q_{in}$ et $q_j = \delta(q_{j-1}, a_j)$ pour tout $1 \leq j \leq n$.

Un mot $u \in A^*$ est **accepté** par l'automate \mathcal{A} si et seulement si le calcul de \mathcal{A} sur u se termine par un état final. L'ensemble $L(\mathcal{A})$ des mots acceptés par \mathcal{A} est appelé **langage accepté** par \mathcal{A} . Un **langage régulier** sur un alphabet A est un ensemble de mots $K \subseteq A^*$ tel qu'il existe un automate \mathcal{A} avec $K = L(\mathcal{A})$.

Étant donné un mot infini $\lambda = a_0 a_1 a_2 \cdots$ et un mot fini $u = b_0 b_1 \cdots b_n$ sur un même alphabet A , on dira que u est **préfixe** de λ si et seulement si $a_i = b_i$ pour tout $0 \leq i \leq n$.

On fixe pour toute cette partie une arène $\mathcal{G} = (G, S_E, S_A)$ et on note $G = (S, A)$ le graphe sous-jacent. On se donne également un langage régulier L sur l'alphabet S . Enfin, on définit la condition de gain Ω_L suivante :

$$\Omega_L = \{\lambda \mid \exists u \in L \text{ t.q. } u \text{ est préfixe de } \lambda\}$$

et on note $\mathbb{G} = (\mathcal{G}, \Omega_L)$ le jeu associé.

Question 22. Donner un exemple simple d'arène \mathcal{G} et un langage régulier L tel que :

- Eve possède une stratégie gagnante depuis un sommet à définir dans le jeu (\mathcal{G}, Ω_L) ;
- Eve ne possède pas de stratégie positionnelle depuis ce même sommet.

Question 23. On se replace à nouveau dans le cas général et on considère un automate déterministe complet $\mathcal{A} = (Q, A, q_{in}, F, \delta)$ acceptant le langage L . Expliquer comment construire un nouveau jeu $\mathbb{G}' = (\mathcal{G}', \Omega')$ qui vérifie les propriétés suivantes :

- le jeu \mathbb{G}' est muni d'une condition d'accessibilité ;
- les sommets de \mathcal{G}' sont $S \times Q$;
- pour tout $s \in S$, Eve possède une stratégie gagnante dans \mathbb{G} depuis s si et seulement si elle possède une stratégie gagnante depuis $(s, \delta(q_{in}, s))$ dans \mathbb{G}' ;
- pour tout $s \in S$, Adam possède une stratégie gagnante dans \mathbb{G} depuis s si et seulement s'il possède une stratégie gagnante depuis $(s, \delta(q_{in}, s))$ dans \mathbb{G}' .

Question 24. Dédurre de la question précédente que l'on peut calculer les sommets gagnants pour chacun des joueurs dans le jeu \mathbb{G} . Quelle est la complexité de l'algorithme associé ?

Question 25. Expliquer comment calculer les stratégies gagnantes pour chacun des joueurs dans le jeu \mathbb{G} .

PARTIE 5. JEUX DE BÜCHI

Dans cette dernière partie, on considère des jeux dans lesquels Eve veut visiter infiniment souvent un ensemble de sommets finaux. On reprend et adapte les techniques de la deuxième partie pour calculer les sommets gagnants ainsi que des stratégies positionnelles associées.

Soit une arène \mathcal{G} , et soit $G = (S, A)$ le graphe sous-jacent. Une condition de gain Ω sur \mathcal{G} est qualifiée de **condition de Büchi** si elle est de la forme

$$\Omega = \{\lambda \mid \lambda \text{ visite infiniment souvent un sommet de } F\}$$

pour un sous-ensemble $F \subseteq S$ de sommets finaux. Autrement dit, si l'on note $\lambda = s_0s_1s_2 \dots$, on a $\lambda \in \Omega$ si et seulement si $|\{i \mid s_i \in F\}| = \infty$.

Question 26. On considère une arène $\mathcal{G} = (G, S_E, S_A)$ telle que $S_A = \emptyset$. En d'autres termes, tous les sommets sont contrôlés par Eve. Donner un algorithme qui, pour une telle arène et pour une condition de Büchi Ω , calcule l'ensemble des sommets gagnants pour Eve dans le jeu (\mathcal{G}, Ω) . Quelle est la complexité de votre algorithme (on précisera les structures de données utilisées pour représenter les différentes entrées du problème) ?

Question 27. On considère à nouveau une arène $\mathcal{G} = (G, S_E, S_A)$ telle que $S_A = \emptyset$. Montrer que, pour un jeu de Büchi sur \mathcal{G} , Eve possède, pour tout sommet gagnant, une stratégie positionnelle gagnante. Donner un algorithme qui construit une telle stratégie et préciser sa complexité.

On fixe désormais une arène $\mathcal{G} = (G, S_E, S_A)$ et on note $G = (S, A)$ le graphe sous-jacent. On se donne un sous-ensemble $F \subseteq S$ de sommets finaux, on appelle Ω la condition de Büchi associée à F et on note $\mathbb{G} = (\mathcal{G}, \Omega)$ le jeu associé. On définit, pour tout sous-ensemble $K \subseteq S$ de sommets, la suite suivante :

$$\begin{cases} X_0^+(K) = & \{s \in S_E \mid \exists s' \in K \text{ t.q. } (s, s') \in A\} \cup \{s \in S_A \mid (s, s') \in A \Rightarrow s' \in K\} \\ X_{i+1}^+(K) = & X_i^+(K) \cup \{s \in S_E \mid \exists s' \in X_i^+(K) \cup K \text{ t.q. } (s, s') \in A\} \\ & \cup \{s \in S_A \mid \forall s', (s, s') \in A \Rightarrow s' \in X_i^+(K) \cup K\} \end{cases}$$

Question 28. Prouver que la suite $(X_i^+(K))_{i \geq 0}$ converge.

On note $X^+(K)$ la limite de la suite $(X_i^+(K))_{i \geq 0}$.

Question 29. Montrer qu'un sommet s est dans $X^+(K)$ si et seulement si Eve a une stratégie positionnelle pour atteindre en **au moins un coup** K depuis s .

Question 30. On définit maintenant la suite suivante :

$$Z_i = \begin{cases} F & \text{si } i = 1 \\ X^+(Z_{i-1}) \cap F & \text{si } i > 1 \end{cases}$$

Question 31. Pourquoi la suite $(Z_i)_{i \geq 0}$ converge-t-elle ?

On note Z_∞ la limite de la suite $(Z_i)_{i \geq 0}$. En particulier, on a $Z_\infty = X^+(Z_\infty) \cap F$ et $Z_\infty \subseteq F$. On déduit de l'égalité $Z_\infty = X^+(Z_\infty) \cap F$ qu'Eve possède une stratégie positionnelle depuis Z_∞ pour revenir dans Z_∞ en au moins un coup. On note φ_1 cette stratégie. Ainsi pour toute partie, débutant dans un sommet de Z_∞ , où Eve respecte sa stratégie φ_1 , il existe un entier $k > 0$ tel qu'après k coups le sommet atteint est à nouveau un élément de Z_∞ .

L'idée derrière cette construction est que Z_i est le sous-ensemble des états finaux pour lesquels Eve peut forcer au moins i visites dans F . Enfin, Z_∞ est le sous-ensemble de F dans lequel Eve peut forcer une infinité de passages dans F . L'idée naturelle est alors de considérer l'ensemble $Access(Z_\infty)$ des sommets depuis lesquels Eve peut forcer d'arriver dans Z_∞ , c'est-à-dire les sommets depuis lesquels Eve gagne le jeu d'accessibilité où son but est d'atteindre l'ensemble Z_∞ .

On appelle φ_0 une stratégie positionnelle pour Eve depuis les sommets $Access(Z_\infty)$ pour le jeu d'accessibilité vers Z_∞ (une telle stratégie existe d'après les résultats de la deuxième partie). On définit enfin la stratégie positionnelle φ suivante pour Eve.

$$\varphi(v) = \begin{cases} \varphi_0(v) & \text{si } v \in (Access(Z_\infty)) \setminus Z_\infty \cap S_E \\ \varphi_1(v) & \text{si } v \in Z_\infty \cap S_E \end{cases}$$

Question 32. Montrer que la stratégie φ est une stratégie gagnante pour Eve depuis $Access(Z_\infty)$ dans le jeu de Büchi \mathbb{G} .

Question 33. Montrer qu'Adam possède une stratégie gagnante positionnelle depuis tout sommet de $S \setminus Access(Z_\infty)$.