Informatique I

Les algorithmes demandés ne seront pas écrits dans un langage de programmation particulier, mais dans un pseudo-langage impératif (genre Pascal ou C) pouvant comporter des expressions et instructions informelles, notamment en ce qui concerne les types de données classiques (par exemple: `n := le plus petit élément de la liste`*, ou* `pour tout sommet s du graphe...`*)*

Tout algorithme proposé devra être justifié (terminaison, correction et, si la question l'exige, complexité).

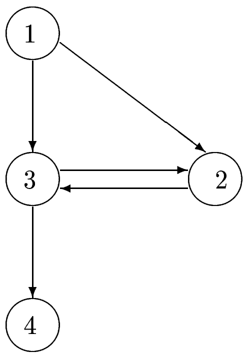
La partie 1 est indépendante des suivantes.
La partie 3 peut être traitée en admettant les résultats de la partie 2.

Dans tout le problème, on considère deux joueurs J_1 et J_2 qui jouent à déplacer un pion (le même pour les deux joueurs) le long des arcs d'un graphe orienté fini $\mathcal{G}$, à partir d'un sommet initial donné (J_1 jouant le premier coup); le jeu ne s'arrête que si le pion est bloqué sur un sommet sans successeur. Une partie est donc un chemin maximal (fini ou infini) du graphe $\mathcal{G}$.

Donner une règle du jeu, c'est caractériser les parties gagnées par J_1 (les autres étant gagnées par J_2: il n'y a pas de partie nulle).

On dira qu'un joueur **a une stratégie gagnante** depuis un sommet s de $\mathcal{G}$ si, le pion étant initialement posé en s, ce joueur peut gagner la partie quels que soient les coups joués par son adversaire (la stratégie étant un moyen de déterminer le coup à jouer suivant l'état de la partie, donc une fonction partiellement définie de l'ensemble des chemins dans l'ensemble des sommets).

Exemple:



On décide que les parties gagnées par J_1 sont celles qui aboutissent en 4.

Depuis le sommet 1, J_1 a une stratégie gagnante (il joue en 2: J_2 doit jouer en 3, et J_1 joue en 4).

Depuis le sommet 2, c'est J_2 qui a une stratégie gagnante (J_1 doit jouer en 3, et J_2 revient à la position initiale 2: ainsi, J_2 évitera indéfiniment le sommet 4).

1 Jeux finis

Jeu dans un arbre

On suppose que $\mathcal{G}$ est un arbre; une règle du jeu est une partition de l'ensemble des feuilles de l'arbre en deux sous-ensembles F_1 et F_2, les parties aboutissant en F_1 (respectivement: F_2) étant gagnées par J_1 (respectivement: J_2).

Question 1

Écrire un algorithme permettant de déterminer lequel des joueurs a une stratégie gagnante depuis la racine de l'arbre, et donnant cette stratégie.

Jeu à jetons dans un graphe orienté sans circuit

On suppose que $\mathcal{G}$ est un graphe sans circuit, dont tout sommet s contient un certain nombre $n(s)$ de jetons. Le joueur qui déplace le pion vers un sommet ramasse les jetons de ce sommet; J_1 gagne si, à la fin de la partie, il a ramassé strictement plus de jetons que J_2. (Noter que, pour ce jeu, le nombre de jetons du sommet initial n'a aucune importance.)

Question 2

Écrire un algorithme, de complexité linéaire en la taille du graphe, permettant de déterminer depuis quels sommets du graphe J_1 a une stratégie gagnante.

Suggestion: depuis tout sommet, chaque joueur a une stratégie permettant soit de gagner, soit de minimiser ses pertes.

2 Jeux dans un graphe biparti

Dans toute cette partie, on suppose le graphe $\mathcal{G}$ biparti: on note S_1 (resp. S_2) l'ensemble des sommets depuis lesquels c'est à J_1 (resp. J_2) de jouer (la partie débute en un sommet de S_1).

A tout ensemble X de sommets de $\mathcal{G}$ on associe

- l'ensemble $p(X)$ des sommets de $\mathcal{G}$ qui ont un successeur dans X;
- l'ensemble $q(X)$ des sommets de $\mathcal{G}$ qui ont au moins un successeur, et dont tout successeur est dans X.

Jeu à positions gagnantes terminales

On se donne un ensemble F de sommets de $\mathcal{G}$, et on considère que les parties gagnées par J_1 sont celles qui passent par un sommet de F. On pose $F_1 = F \cap S_1$ et $F_2 = F \cap S_2$, et on note $\varphi(F)$ l'ensemble des sommets depuis lesquels J_1 a une stratégie gagnante.

Question 3

Montrer que $\varphi(F)$ est le plus petit point fixe de la fonction f qui à un ensemble X de sommets de $\mathcal{G}$ associe

$$f(X) = F_1 \cup p(F_2 \cup q(X))$$

Suggestion: on montrera que $\varphi(F)$ est un point fixe de f, et que, si X est un point fixe de f, J_2 a une stratégie gagnante depuis tout sommet du complémentaire de X dans S_1.

En déduire qu'il existe un algorithme quadratique en la taille de $\mathcal{G}$ pour calculer $\varphi(F)$.

Question 4

Donner un algorithme linéaire pour calculer $\varphi(F)$.

Suggestion: à tout sommet s de S_2, associer un compteur qu'on initialise au nombre de ses successeurs, marquer récursivement les sommets depuis lesquels J_1 est certain de gagner:

- *on marque les sommets de F;*
- *quand on marque un sommet de S_2, on marque tous ses prédécesseurs;*
- *quand on marque un sommet de S_1, on décrémente le compteur de tous ses prédécesseurs; si un compteur passe à zéro, on marque le sommet correspondant.*

Jeu à positions gagnantes répétées

On se donne un ensemble F de sommets de $\mathcal{G}$, et on considère que les parties gagnées par J_1 sont les parties qui passent infiniment souvent par un sommet de F.

Question 5

Montrer que l'ensemble des sommets depuis lesquels J_1 a une stratégie gagnante est le plus grand point fixe de la fonction g définie par

$$g(X) = \varphi((F_1 \cap X) \cup (F_2 \cap q(X))$$

où F_1, F_2, φ sont définis comme dans le jeu à positions gagnantes terminales.

En déduire un algorithme pour calculer cet ensemble; indiquer sa complexité.

3 Jeux infinis

Jeu des mots à compléter

On se donne un langage rationnel L sur un alphabet fini A. Chaque joueur à son tour dit une lettre de A; si la suite de ces lettres forme un mot de L, la partie s'arrête et J_1 gagne; si la partie est infinie, c'est J_2 qui gagne.

Question 6

Indiquer un algorithme pour déterminer si J_1 a une stratégie gagnante.

Suggestion: se ramener au cas d'un jeu à positions gagnantes terminales, dans un graphe biparti approprié.

Jeu à jetons dans un graphe fini quelconque

Comme dans la première partie (question 2), on suppose que tout sommet s de $\mathcal{G}$ contient un certain nombre $n(s)$ de jetons. Le joueur qui déplace le pion vers un sommet ramasse les jetons de ce sommet; J_1 gagne si, à la fin de la partie, il a ramassé strictement plus de jetons que J_2.

Question 7

Donner un algorithme pour déterminer si, depuis un sommet donné s_0, le joueur J_1 a une stratégie gagnante.

Suggestion: considérer le graphe des configurations possibles du jeu (une configuration étant la donnée de la position du pion, des sommets traversés pour la première fois par J_1, et des sommets traversés pour la première fois par J_2), et se ramener au cas d'un jeu à positions gagnantes répétées.