Brevet de technicien supérieur Polynésie
12 mai 2016 - Services informatiques aux organisations

Épreuve obligatoire

Exercice 1 — 8 points

Un administrateur réseau met en place une stratégie logique de maintenance en cinq étapes : A, B, C, D et E. Il a noté dans un tableau la dépendance immédiate des étapes les unes par rapport aux autres, en fonction de la logique d'enchainement des étapes.
Par exemple, selon lui, il est logique d'enchainer immédiatement l'étape B après l'étape A, ou de répéter l'étape A si nécessaire, mais il n'est pas logique d'effectuer immédiatement les étapes C, D et E après l'étape A.

Étapes	A	B	C	D	E
Étapes qui peuvent suivre immédiatement	A, B	B, C	D	C	A, D, E

1. Dessiner le graphe orienté G de sommets A, B, C, D, E, dont les arêtes orientées sont données par le tableau des successeurs ci-dessus.

2. Donner la matrice d'adjacence M associée au graphe orienté G.

3. Combien y a-t-il de chemins de longueur 2 d'origine E dans le graphe orienté G ? Justifier.

4. Combien y a-t-il de chemins de longueur 2 d'extrémité finale C dans le graphe orienté G ?
Justifier.

On donne les matrices suivantes :

$$M^3 = \begin{pmatrix} 1&3&2&1&0\\ 0&1&2&1&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&1&0&0\\ 3&3&2&2&1 \end{pmatrix} \quad M^4 = \begin{pmatrix} 1&4&4&2&0\\ 0&1&2&2&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 4&6&5&3&1 \end{pmatrix} \quad \text{et } M^5 = \begin{pmatrix} 1&5&6&4&0\\ 0&1&3&2&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&1&0&0\\ 5&10&9&6&1 \end{pmatrix}.$$

5. Combien y a-t-il de circuits de longueur 4 dans le graphe ? Justifier.

6. On désigne par $\widehat{M}$ la matrice d'adjacence de la fermeture transitive du graphe orienté G.

a. Déterminer $\widehat{M}$.

b. Dans la matrice $\widehat{M}$, interpréter la valeur du coefficient de la ligne 1 et colonne 4, et celui de la ligne 1 et colonne 5.

Exercice 2 — 5 points

Un administrateur réseau gère le parc d'une petite entreprise qui comprend 9 ordinateurs. Chaque ordinateur possède une adresse de carte réseau, dite adresse MAC (Media Access Control) unique.
Cette adresse est composée de 6 nombres entiers compris entre 0 et 255 séparés par des « : ».
Chacun des 6 nombres est codé en hexadécimal.

Partie A

1. Pourquoi un nombre de 0 à 255 est-il codé en binaire sur un octet ?
2. En hexadécimal, avec combien de chiffres au maximum peut-on coder un entier de 0 à 255 ?
   Justifier.
3. Un ordinateur a l'adresse MAC suivante : 00 : FF : B4 : A9 : 96 : 11.
   Traduire en binaire et en décimal le nombre d'écriture hexadécimale $(\text{B4})_{16}$.

Partie B

L'administrateur a assigné une adresse IP (Internet Protocol) à chaque ordinateur à l'aide d'un logiciel installé sur le serveur. Il obtient le tableau suivant :

Adresse MAC	N° de l'ordinateur	Adresse IP
00 : FF : B4 : A9 : 96 : 11	1	172.16.0.21
00 : FF : B4 : B0 : 45 : 1A	2	172.16.0.22
00 : FF : B4 : 00 : C5 : DE	3	172.16.0.23
00 : EE : B5 : 01 : 32 : C4	4	172.16.0.24
00 : EE : B5 : 01 : 32 : C5	5	172.16.0.25
00 : EE : B5 : 01 : 32 : C6	6	172.16.0.26
00 : FF : B4 : 00 : C5 : DF	7	172.16.0.27
00 : FF : B4 : 00 : 02 : 98	8	172.16.0.28
00 : EE : B5 : 01 : 34 : CA	9	172.16.0.29

On considère l'application f qui, à un numéro d'ordinateur, associe la dernière partie de l'adresse IP.
Cette dernière partie est un entier variant de 2 à 255.

$$f : \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9\} \longmapsto \{2 ; 3 ; \ldots ; 255\}.$$

Par exemple, $f(1) = 21$.

1. Justifier le fait que cette application est injective.
2. Cette application est-elle surjective ? Justifier.
3. À la suite d'une opération informatique, le poste dont l'adresse MAC est 00 : FF : B4 : 00 : C5 : DF obtient l'adresse IP suivante : 172.16.0.23. Les autres postes gardent leur adresse IP précédente.
   On a alors une nouvelle application

   $$g : \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9\} \longmapsto \{2 ; 3 ; \ldots ; 255\}.$$

   L'application g est-elle injective ? Justifier.

Exercice 3 — 7 points

Le jeu du Juniper Green ou jeu des diviseurs et multiples a été créé par Richard Porteous, enseignant à l'école de Juniper Green. Il se joue à deux. Une fois qu'on a fixé un entier $N > 1$, les deux joueurs choisissent alternativement un entier entre 1 et N compris selon les règles suivantes :

- le joueur 1 choisit un entier n_1 compris entre 1 et N ;
- le joueur 2 choisit un entier n_2 compris entre 1 et N, multiple ou diviseur de n_1 qui n'a pas encore été joué ;
- le joueur 1 choisit un entier n_3 compris entre 1 et N, multiple ou diviseur de n_2, qui n'a pas encore été joué ;
- etc.

Chaque entier entre 1 et N ne peut apparaître au plus qu'une fois. Le perdant est celui qui ne peut plus jouer.
Exemple avec $N = 20$:

Joueur 1	6		9		2		4		1		perdu
Joueur 2		3		18		8		16		17	

- le joueur 1 choisit 6 ;
- le joueur 2 choisit 3 qui divise 6. ;
- le joueur 1 choisit 9 qui est bien un multiple de 3 ;
- etc.

À partir d'une partie, on crée un identifiant. L'identifiant est la suite d'entiers joués alternativement par les deux joueurs. Par exemple avec $N = 20$ et à partir de 6, l'identifiant créé peut être (6, 3, 9, 18, 2, 8, 4, 16, 1, 17).

1. **a.** On choisit $N = 14$. Reproduire et compléter le tableau suivant avec une solution possible.

Joueur 1	1		6		…		perdu
Joueur 2		2		12		…	

b. Donner l'identifiant qui correspond à cette solution.

2. Pour gagner la partie, les joueurs ont besoin de connaître les diviseurs et les multiples des différents nombres. Ils utilisent pour cela les décompositions en facteurs premiers.

a. Donner la décomposition en produit de facteurs premiers de 2 262 en faisant apparaître la démarche.

b. En déduire tous les diviseurs de 2 262.

3. Lorsqu'un nombre premier apparaît dans la liste des nombres composant l'identifiant, quelles sont les possibilités pour le nombre suivant ?

4. On suppose que $N = 14$. Montrer que si la liste commence par 11, alors il est possible que cette liste ne contienne que trois nombres.

5. Pour que la partie dure plus longtemps, il faut éviter que l'identifiant soit trop court. On impose alors que le premier entier q de la liste vérifie :

- q n'est pas un nombre premier ou
- q vérifie $q \leqslant \sqrt{N}$.

Sous ces conditions et pour $N = 14$, donner les valeurs possibles du premier entier q de la liste.