Loi binomiale

I/ Définitions

1) Variable aléatoire binomiale

Une variable aléatoire binomiale est le nombre de succès dans la répétition indépendante d'une épreuve à deux issues, autrement dit

- on répète une même expérience
- les répétitions sont indépendantes entre elles
- chaque répétition a deux issues : succès et échec (*fail* chez Bayes).

Le nombre de succès est une variable aléatoire à valeurs entières. Cette variable aléatoire est binomiale.

Ces conditions sont présentes lors d'un tirage avec remise. Si la taille de l'échantillon est petite par rapport à celle de l'urne, la loi du nombre de succès est bien approchée par une loi binomiale.

2) Paramètres

La loi d'une variable aléatoire binomiale dépend de deux paramètres :

- le nombre n de répétitions de l'expérience,
- la probabilité p de succès à chaque répétition.

3) Loi binomiale

C'est Jakob Bernoulli qui a trouvé la formule donnant la loi binomiale. Elle porte son nom du fait que les coefficients binomiaux (ceux du triangle de Pascal) interviennent dans la formule donnée par Bernoulli. Ces coefficients s'appellent *binomiaux* parce qu'on les trouve en développant le *binôme de Newton* $(a+b)^n$. Voici la preuve de cette formule par Bayes[1] :

a) Rappel

Si des événements sont indépendants, la probabilité qu'ils arrivent tous est le produit des probabilités de ces événements :

P R O P. 6.

The probability that ſeveral independent events ſhall all happen is a ratio compounded of the probabilities of each.

1 En 1763 donc plusieurs décennies après Bernoulli

b) Répétition d'épreuve à deux issues

Si on note p la probabilité de succès et q la probabilité d'échec, alors la probabilité d'une séquence de succès et échecs est $p^k \times q^{n-k}$ où k est le nombre de succès dans la séquence :

> Cor. 1. If there be ſeveral independent events, the probability that the 1ſt happens the 2d fails, the 3d fails and the 4th happens, &c. is a ratio compounded of the probability of the 1ſt, and the probability of the failure of the 2d, and the probability of the failure of the 3d, and the probability of the 4th, &c. For the failure of an event may always be conſidered as the happening of its contrary.

> Cor. 2. If there be ſeveral independent events, and the probability of each one be *a*, and that of its failing be *b*, the probability that the 1ſt happens and the 2d fails, and the 3d fails and the 4th happens, &c. will be *abba*, &c. For, according to the algebraic way of notation, if *a* denote any ratio and *b* another, *abba* denotes the ratio compounded of the ratios *a*, *b*, *b*, *a*. This corollary therefore is only a particular caſe of the foregoing.

Bayes note a et b au lieu de p et q.

c) Loi binomiale

Mais le nombre de séquences ayant k succès est le nombre de manières de choisir k éléments parmi n : le coefficient binomial (Bayes note a pour p, b pour q, p pour k et q pour n-k) :

> P R O P. 7.
>
> If the probability of an event be *a*, and that of its failure be *b* in each ſingle trial, the probability of its happening *p* times, and failing *q* times in $p+q$ trials is E $a^p b^q$ if E be the coefficient of the term in which occurs $a^p b^q$ when the binomial $\overline{a+b}|^{p+q}$ is expanded.

II/ Calcul de probabilités

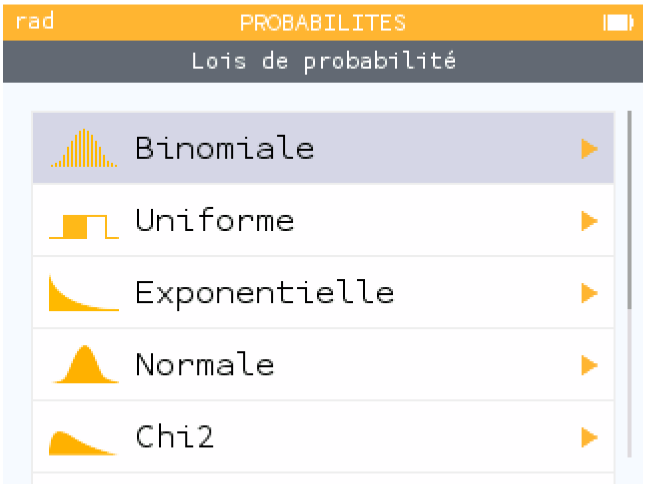
On suppose que lorsqu'une graine de haricot frottée pour qu'un côté soit clair tombe, elle a une probabilité égale à 0,4 que le côté foncé soit en haut. Au jeu de Darion, il y a 6 graines à jeter. Le nombre de graines tombées le côté foncé en haut suit une loi binomiale de paramètres 6 et 0,4.

1) Calcul de la loi

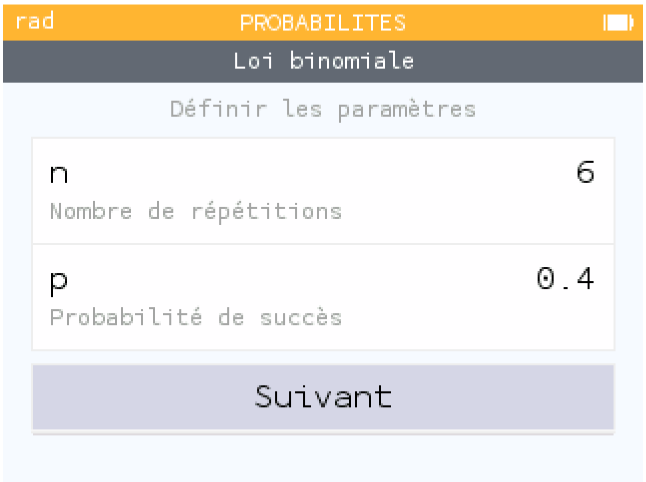
On voudrait connaître la probabilité que toutes les graines soient tombées du côté clair en haut.

Autrement dit, que X=0.

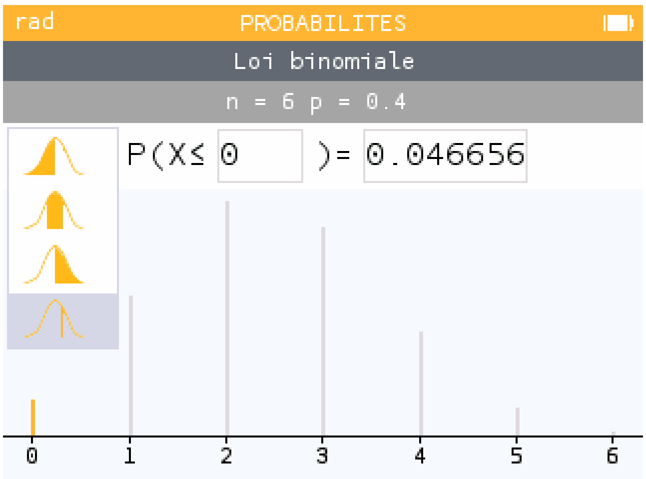
Sur Numworks, on va dans l'application de probabilités, et on choisit comme loi, la loi binomiale :



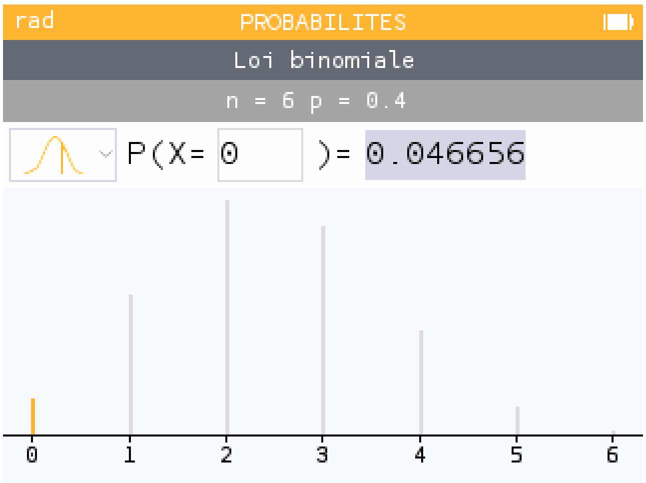
Puis on entre les paramètres :



On appuie sur OK et on choisit la loi (probabilité que X soit égal à une valeur) :



On entre la valeur à laquelle X doit être égal (ici, 0) :



La probabilité cherchée est donc environ 7/150 : on a 7 chances sur 150 que les graines tombent toutes du côté clair (donc qu'aucune ne tombe du côté foncé).

Sur Ti, on cherche `binomFdP` pour faire ce calcul.

2) Calcul de la fonction de répartition

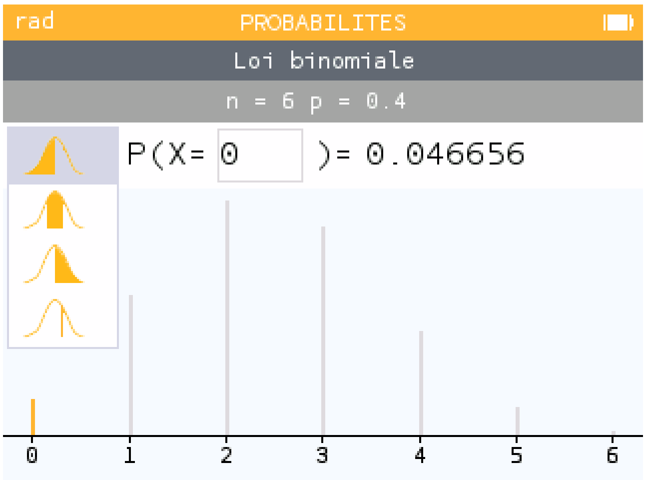
On voudrait la probabilité qu'au maximum 5 graines tombent du côté clair.

a) Avec la loi

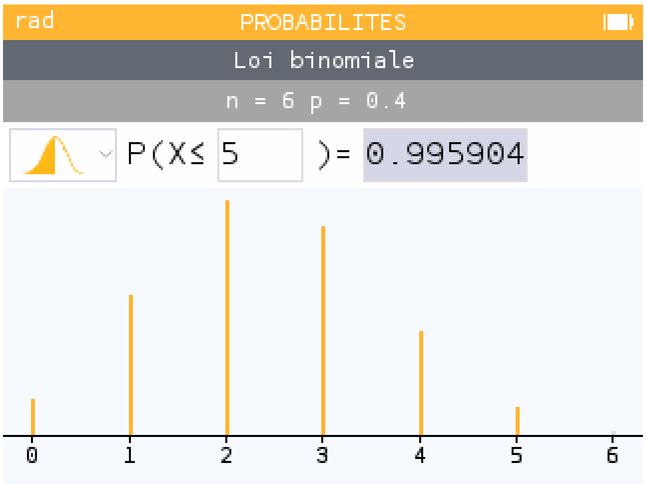
L'événement X≤5 étant le contraire de l'événement X=6, on peut faire comme précédemment (avec X=6) puis soustraire le résultat à 1.

b) Avec la fonction de répartition

Mais on peut aussi choisir la fonction de répartition au lieu de la loi :



et entrer la valeur 5 :



La probabilité qu'il y ait moins de 6 graines côté foncé est environ 0,996 soit 249 chances sur 250.

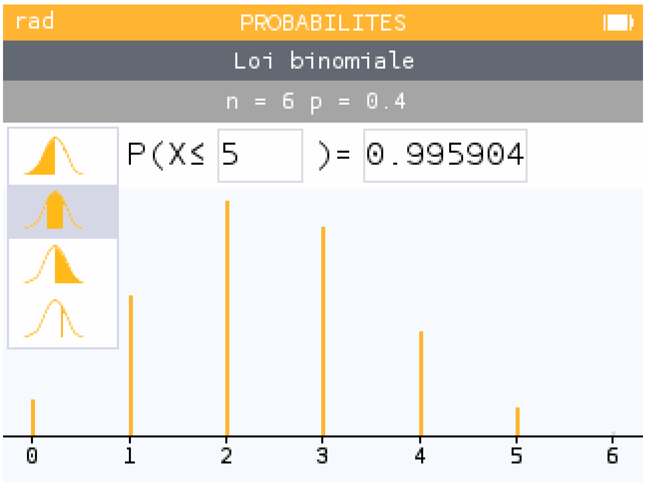
Sur Ti on choisit `binomFRep` et on entre 5.

3) Calcul de la probabilité d'appartenance à un intervalle

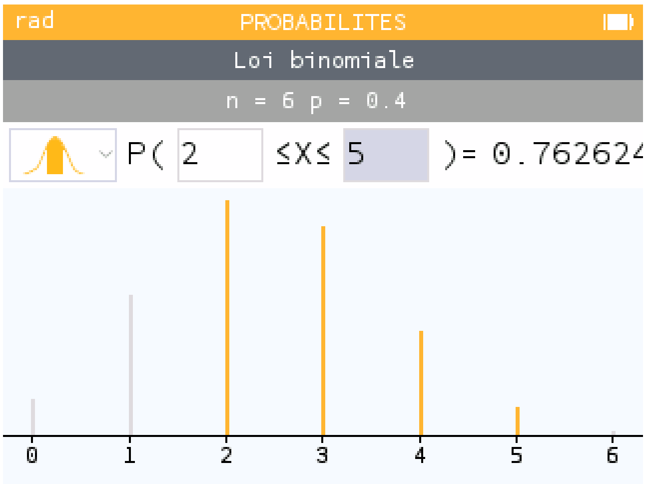
On voudrait savoir quelle est la probabilité qu'il y ait entre 2 et 5 graines du côté foncé.

Sur Ti on doit utiliser le fait que P(2≤X≤5)=P(X≤5)-P(X<2)=P(X≤5)-P(X≤1). On utilise donc deux fois `binomFRep` avec les valeurs 5 et 1.

Sur Numworks on peut choisir l'option « intervalle » :



En entrant les bornes 2 et 5 de l'intervalle on a la probabilité :



III/ Espérance et variance

1) Calcul de l'espérance

Si X suit une loi binomiale de paramètres n et p alors

- l'espérance de X est $n\times p$
- la variance de X est $n\times p\times q=n\times p\times(1-p)$
- donc l'écart-type de X est la racine carrée de $n\times p\times q$.

2) Approximation par une loi de Poisson

Comme l'espérance d'une loi de Poisson de paramètre λ est λ , la variable aléatoire de Poisson qui approche le mieux X a la même espérance que X et donc pour paramètre $\lambda=n\times p$.

3) Approximation par une loi normale

Comme les paramètres d'une loi normale sont son espérance et son écart-type, la variable aléatoire normale qui approche le mieux X a pour espérance $n\times p$ et pour écart-type, la racine carrée de $n\times p\times q$. Elle a donc ces valeurs pour paramètres.