

UN PEU DE LOGIQUE ...

par IATALESE Michaël

SAUT JE SUIS LA VERSION DE TON PROF DE MATHS EN PLUS GENTIL!

20/20 POUR TOUT LE MONDE!
HANA! LA BLAGUE!
TROP DRÔLE MOI
LOL!

LE TITRE

COMME TU AS PU LE LIRE, ON VA PARLER UN PEU DE LOGIQUE! C'EST IMPORTANT EN MATHS, LA LOGIQUE! TOUT COMME IL EST IMPORTANT DE SAVOIR DE QUOI ON PARLE! IL FAUT SE FAMILIARISER AVEC LE VOCABULAIRE QUI VA SUIVRE!

Je confirme, c'est important la logique!
01001001

Nous allons donner des définitions qu'il faudra bien comprendre puisqu'elles seront utiles dès que l'on manipule des objets mathématiques!

C'est l'objet de cette B.D!
Oui!

Qu'est-ce que **PROPOSITION MATHÉMATIQUE**?

TOUT SIMPLEMENT UN ÉNONCÉ QUI EST SOIT **VRAI** ou **FAUX**

EXEMPLES.

- (P1) "1025 est un nombre impair" est une proposition **VRAIE**.
- (P2) "275 est divisible par 3" est une proposition **FAUSSE**.
- (P3) " $x^2 \leq 16$ " est vraie pour certaines valeurs du nombre réel x et fausse pour d'autres valeurs.
- (P4) "Mon prof de maths aime le coulant au chocolat" est une proposition (non mathématique) mais **VRAIE!**

Ah ok! C'est binaire quoi!
0 ou 1

Il existe des propositions mathématiques admises comme vraies. C'est tellement logique qu'on ne peut pas affirmer que le contraire est vrai!

Oui, cela s'appelle un **AXIOME**.

Une "acc-homme" ?? C'est comme un nouveau déodorant?

NON! VOILÀ DES EXEMPLES D'AXIOMES:

- (A1) "ON PEUT TRACER UN SEGMENT DE DROITE JOIGNANT DEUX POINTS QUELCONQUES."
- (A2) "ON PEUT PROLONGER INDÉFINIMENT UN SEGMENT DE DROITE EN UNE LIGNE DROITE."
- (A3) "TOUS LES ANGLES DROITS SONT ÉGAUX."

DANS L'ANTIQUITÉ GRECQUE, ON PEUT LIRE LES AXIOMES POSÉS PAR EUCLIDE (DANS LA GÉOMÉTRIE) DANS "LES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE". C'EST DANS SES LIVRES QU'ON PEUT Y LIRE 22 MOTS DE BASE DE LA GÉOMÉTRIE.

EXEMPLES:

- Un point est ce dont la partie est nulle.
- Une ligne est une longueur sans largeur.

EUCLIDE 360 av JC - 230 av JC.

Les axiomes sont comme "des briques" qui permettent de faire des déductions qui seront vraies qui deviendront elles-mêmes des briques supplémentaires! À la fin, on a construit, ce qu'on appelle un **THÉORÈME**.

Comme ce théorème sera vrai, il sera une grosse brique qui pourra servir à en construire une autre... etc.

THÉORÈME

AXIOME

1 LES CONNECTEURS LOGIQUES "ET", "OU"

La conjonction de deux propositions P et Q est la proposition notée $P \text{ ET } Q$ qui est vraie uniquement lorsque les propositions P et Q sont toutes les deux vraies.

DONNONS DES EXEMPLES, ÇA AIDE SOUVENT!

① $a \in \mathbb{R}$ (a désigne un nombre réel ça veut dire!)
 $\underbrace{a^2 \geq 0}_P \text{ ET } \underbrace{|a| \geq 0}_Q$ EST VRAIE

② $\underbrace{5 < 2}_P \text{ ET } \underbrace{2 < 7}_Q$ EST FAUSSE! EN EFFET, LA PROPOSITION Q EST FAUSSE! (BIEN QUE P SOIT VRAIE)

EN FAIT LE MOT "ET" EN MATHS SIGNIFIE "À LA FOIS" ("SIMULTANÉMENT", "EN MÊME TEMPS" Quoi!)

P : "3, 5, 7 SONT DES ENTIERS PREMIERS"
 ET MOI:
 Q : "JE SUIS UN ENTIER INFÉRIEUR À 10"

...alors la proposition: $P \text{ ET } Q$: "3, 5, 7 sont des entiers premiers (et) inférieurs à 10 est VRAIE!
 Mais la proposition: "3, 5, 7, 9 sont des entiers premiers (et) inférieurs à 10 est FAUSSE!
 À CAUSE DE MOI, C'EST FAUX! HIHI

"3, 5, 7, 9 sont des entiers premiers OU inférieurs à 10."

QUE PENSER DE CETTE PROPOSITION?

VOUS AVEZ UNE HEURE!
 HAHA, JE BLAGUE!
 JE SUIS GENTIL, RAPPELEZ-VOUS!
 ...OU PAS!

C'est ce qu'on appelle une disjonction!
 $P \text{ OU } Q$ est une proposition qui est:

- vraie lorsque l'une au moins des propositions entre P et Q est vraie!
- fausse lorsque les propositions P avec Q sont toutes les deux fausses!

EXEMPLES:

① "65 est divisible par 2 (ou) 262 est divisible par 2" est VRAIE. En effet, Q est vraie.

② "25 est premier (ou) 49 est premier" est FAUSSE car chacune des propositions P , Q est fausse.

③ C'EST VRAI!

OU LALALA!
 LOL

EN FAIT, LE MOT "OU" EN MATHS SIGNIFIE "SOIT L'UN, SOIT L'AUTRE SOIT LES DEUX À LA FOIS."

DONC, SI ON ME PROPOSE AU RESTAURANT DU "FROMAGE (OU) DU DESSERT".... THÉORIQUEMENT, JE PEUX CHOISIR L'UN OU L'AUTRE OU BIEN.... LES DEUX!

Oui, Ton "OU" EST INCLUSIF DANS CE CAS!

MIAM!

JE PROTESTE! MON OU ÉTAIT EXCLUSIF!

M'EN FICHE! C'EST SERVI ET J'AI LA DAU!

LA NÉGATION « NON ».

Que de négativité dans un titre ! C'est bien triste !

C'EST POURTANT PRATIQUE DE SAVOIR NIER DES PROPOSITIONS MATHÉMATIQUES

ON LE VERRA NOTAMMENT QUAND ON FERA DU DÉNOMBREMENT EN PROBABILITÉS.

La négation d'une proposition P est la proposition notée $(\text{non } P)$.

- $(\text{non } P)$ est vraie lorsque P est fausse.
- $(\text{non } P)$ est fausse lorsque P est vraie.

ON NE SERA JAMAIS D'ACCORD !

NAN, PUISQUE T'ES MON CONTRAIRE !

EXEMPLES.

1 Soit a un nombre réel.
 P : " $a < 5$ "
 $(\text{non } P)$: " $a \geq 5$ "

2 Soit x un nombre réel.
 P : " $x \neq 13$ "
 $(\text{non } P)$: " $x = 13$ "

UN AUTRE EXEMPLE DE NÉGATION

LA PROPOSITION: "JE SUIS PLUS GRAND QUE TOI." EST VRAIE: $\sqrt{2} > 1$

LA NÉGATION DE " $\sqrt{2} > 1$ " EST " $\sqrt{2} \leq 1$ "

CE QUI SIGNE, QUE C'EST MOI, QUI SUIS PLUS GRAND QU'ETOI... BIEN SÛR, C'EST FAUX !

DEVINEZ QUELLE EST LA NÉGATION DE « P et Q » ?

ET CELLE DE : « P ou Q » ?

REPONSES DONNÉES À LA CASE SUIVANTE...

MMS RÉPONSES TROUVER

$\text{non}(P \text{ et } Q)$ est: $(\text{non } P)$ ou $(\text{non } Q)$

EXEMPLE:

Je suis rectangle et isocèle en A

Je ne suis pas isocèle en A

Je ne suis pas rectangle en A

Je ne suis ni l'un, ni l'autre

$\text{non}(P \text{ ou } Q)$ est: $(\text{non } P)$ et $(\text{non } Q)$

EXEMPLE:

La négation de " $x < -3$ ou $x > 2$ " EST " $x \geq -3$ et $x < 2$ "

ON PEUT NOTER LA NÉGATION DE P AVEC UNE BARRE. $(\text{non } P)$, c'est la même chose que \bar{P}

DANS MES BRAS, ON EST PAREILS MAINTENANT !

SE LIT « \bar{P} BARRE »



Une implication est une proposition de la forme "Si P, alors Q" où P est une proposition appelée hypothèse et Q une proposition appelée conclusion. On suppose que la proposition P est vraie, deux cas:

- ✓ Si Q est vraie, l'implication "Si P, alors Q" est vraie.
- ✓ Si Q est fautive, l'implication "Si P alors Q" est fautive.

EXEMPLE :

Alors JE SUIS EN FRANCE

L'implication : "Si je suis à Paris, alors je suis en France" est donc VRAIE!

Maintenant, que pouvez vous de : "Si je suis à Paris alors je suis en Italie" ?

CETTE IMPLICATION EST FAUSSE PUISQUE LA CONCLUSION "JE SUIS EN ITALIE" EST FAUSSE!

MISA BOTTE À ZOT

$P \Rightarrow Q$
(SE LIT: "P implique Q")

PEUT-ON LIRE LA PHRASE DANS L'AUTRE SENS? AUTREMENT DIT:

« Si JE SUIS EN FRANCE ALORS JE SUIS À PARIS »

ET BIEN, "JE SUIS EN FRANCE" EST VRAIE ...

... MAIS JE BRONZE À NICE EN CE MOMENT LES GARS! "JE SUIS À PARIS" EST DONC FAUSSE!

"Si JE SUIS EN FRANCE ALORS JE SUIS À PARIS" EST DONC FAUSSE!

ON DIRA QUE LA RÉCIPROQUE DE "SI JE SUIS À PARIS ALORS JE SUIS EN FRANCE" EST FAUSSE!

Définition: La réciproque de l'implication "Si P, alors Q" est "Si Q, alors P".

NiceForever

ALLER, UN DERNIER EXEMPLE: Soit $x \in \mathbb{R}$ (x DÉSIGNE UN NOMBRE RÉEL). QUELLE EST LA RÉCIPROQUE DE L'IMPLICATION: « Si $x=3$ ALORS $x^2=9$ » ?

C'est: " Si $x^2=9$ alors $x=3$ "

EST-ELLE VRAIE ?

Non, la réciproque est fautive. On n'a pas nécessairement " $x=3$ " si " $x^2=9$ ". La réciproque est fautive pour " $x=-3$ ". En effet: $(-3)^2=9$ et $-3 \neq 3$

OK, TU AS COMPRIS, JE RETOURNE BRONZER

L'IMPLICATION « Si... ALORS... » (la suite).

DISCUTONS DE LA VÉRITÉ DES DEUX IMPLICATIONS SUIVANTES:

1 Si mon véhicule fait moins de 3m de hauteur alors Je peux passer sous le tunnel **C'EST VRAI!**

2 Si je ne peux pas passer sous le tunnel alors mon véhicule fait plus de 3 mètres de hauteur **C'EST ENCORE VRAI!**

On vient d'illustrer la définition de la contraposée de l'implication "Si P, alors Q"

Def: La contraposée de " $P \Rightarrow Q$ " est: $(\text{non } Q) \Rightarrow (\text{non } P)$

- Une implication et sa contraposée sont soit toutes les deux vraies, soit toutes les deux fausses

C'EST PARFOIS PRATIQUE D'UTILISER LA CONTRAPOSÉE D'UNE IMPLICATION. ON LE VERRA CETTE ANNÉE, LORSQU'ON VOUDRA DÉMONTRER: SOIT π UN ENTIER POSITIF, "Si π^2 EST PAIR ALORS π EST PAIR"

QUELLE EST LA CONTRAPOSÉE DE "Si JE SUIS À PARIS ALORS JE SUIS EN FRANCE?"

C'est: "Si je me suis pas en France, alors je me suis pas à Paris"

EST-CE VRAI?

Oui, puisque on a vu que "Si je suis à Paris alors je suis en France" est vraie!

OUI, UNE IMPLICATION ET SA CONTRAPOSÉE ONT LA MÊME VALEUR DE VÉRITÉ

Oui, j'ai dit juste dans la vignette précédente!!

VOUS CONNAISSEZ BIEN CETTE IMPLICATION:

Si le triangle ABC est rectangle en A alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$

OUI, C'EST L'IMPLICATION DE MON THÉORÈME!

PYTHAGORE 580 av JC 495 av JC

LES COLLÈGES L'UTILISENT SOUVENT POUR CALCULER UNE LONGUEUR D'UN CÔTÉ D'UN TRIANGLE RECTANGLE DONNÉ MAIS AUSSI...

POUR MONTRER QU'UN TRIANGLE N'EST PAS RECTANGLE EN UTILISANT SA CONTRAPOSÉE!

CONTRAPOSÉE

Si $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$ (non P) alors le triangle ABC n'est pas rectangle en A. (non Q)

EN FAIT, VOUS AVIEZ UTILISÉ UNE CONTRAPOSÉE SANS LE SAVOIR, AU COLLÈGE!

NOM DE ZEUS!

L'ÉQUIVALENCE "SI ET SEULEMENT SI"

Si ABC est un triangle rectangle en A alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$



C'est vrai depuis des millénaires monsieur Pythagore... et la réciproque ?

La réciproque est : Si $BC^2 = AB^2 + AC^2$ alors : le triangle ABC est rectangle en A !

et c'est aussi vrai depuis des millénaires !



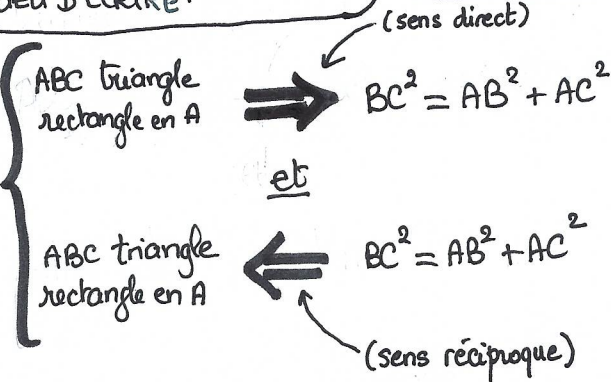
MY GOD! Quand on lit la phrase dans l'autre sens, c'est toujours vrai!



OUI! ON APPELE CELA UNE EQUIVALENCE! AU LIEU D'ÉCRIRE:

ON PEUT ÉCRIRE :

LE THÉORÈME DE PYTHAGORE S'ÉCRIT COMME ÇA AU LYCÉE!



ABC triangle rectangle en A \iff $BC^2 = AB^2 + AC^2$



Ah oui! C'est plus simple!

Quels paresseux ces mathématiciens!

Ce symbole veut dire "équivalent à" ou "si et seulement si" (s.s.i. en abrégé)

ON VA DONNER UNE DÉFINITION PLUS RIGoureuse! LES MATHÉMATIENS AIMENT LA PRÉCISION!



Oh non!

Si!

re-bou!



BON! ON N'A PLUS BESOIN DE MOI? JE VAIS ALLER ME FAIRE VOIR CHEZ LES GRECS ALORS!

Définition: Une équivalence est la conjonction de deux implications réciproques: "Si P, alors Q" et "Si Q, alors P". On la note "P si et seulement si Q" (ssi en abrégé)

EXEMPLE ABCD est un quadrilatère non croisé.

ABCD est un parallélogramme, si, et seulement si, ses diagonales se coupent en leur milieu.



REPRENONS L'IMPLICATION

Si mon véhicule fait moins de 3m de hauteur alors je peux passer sous le tunnel : VRAIE.



La réciproque est-elle vraie?

Si je peux passer sous le tunnel alors mon véhicule fait moins de 3m de hauteur : Réciproque VRAIE.

C'est donc une équivalence, on pourrait écrire: "Je peux passer sous le tunnel S.S.I. mon véhicule fait moins de 3m de hauteur."



OUI! SAUF QUE DANS LE LANGAGE COURANT, ON NE FAIT PAS LA DISTINCTION ALORS QU'EN MATHS, ON Y FERA ATTENTION! TOUJOURS FAIRE ATTENTION AVANT D'UTILISER LE SYMBOLE \iff