LA MÉTHODE DES PESÉES CHEZ ARCHIMÈDE

Michèle BATHIER-FAUVET

Découper une surface, un volume, respectivement en lignes et en tranches sans épaisseur qu'il *pèse*, voilà l'idée qu'exploite Archimède dans *La Méthode* – traité qui ne nous est parvenu qu'en 1899 – pour évaluer aires et volumes.

Après une rapide présentation de la vie et de l'œuvre d'Archimède, nous comparerons la démonstration de la proposition 1 de *La Méthode*, relative à la quadrature de la parabole, avec une des 21 démonstrations données par Torricelli du même résultat. En étudiant les propositions 14 à 16 de *La Quadrature de la Parabole*, nous verrons comment Archimède met en rigueur – toujours en utilisant l'idée de pesée – cette démonstration de type infinitésimal. Nous rencontrerons là une très belle utilisation de la méthode d'exhaustion. Enfin, un tableau récapitulatif du contenu de *La Méthode* nous montrera qu'il est permis de penser qu'il y a des travaux d'Archimède qui ne nous sont pas encore parvenus[1].

La vie et l'œuvre d'Archimède

Que sait-on de la vie d'Archimède ? Rien ou presque, mais tout le monde a entendu et parfois colporté de très belles et très édifiantes histoires à son sujet. C'est qu'Archimède, en plus d'être un mathématicien, un physicien, un ingénieur de génie – et peut-être à cause de cela – est aussi devenu une légende.

Il naquit vers 287 av. J.-C., à Syracuse, riche colonie grecque de Sicile. Son père, Phidias, était probablement astronome et c'est tout aussi probablement avec lui qu'il commença à travailler les mathématiques. Car, à l'époque d'Archimède, ce n'est que pendant l'éphébie, c'est-à-dire entre 18 et 21 ans que le jeune homme pouvait commencer, et encore de façon optionnelle, des études de géométrie un peu plus approfondies[2]. Auparavant, dès l'âge de sept ans, il avait – en principe comme ses

---

[1] Je remercie vivement Philippe Brin, de l'IREM Paris 7, pour l'aide qu'il m'a apportée dans la réalisation des figures et des tableaux de cet article. Le lecteur intéressé par le sujet trouvera une étude plus complète de *La Méthode* dans le numéro 14 de *Mnémosyne* ; elle est rédigée pour être accessible à un élève de Terminale.

[2] Que l'on me pardonne les inévitables approximations faites dans la succincte description des études de l'Homme Grec qui va suivre. Ces études ont bien évidemment varié suivant les individus, les cités, les époques et les querelles d'influences. Mon propos est simplement de souligner qu'il a sûrement été important pour Archimède que son père fût astronome. Le lecteur intéressé par ces questions pourra se

sœurs, mais dans des classes séparées – suivi un premier degré d'enseignement[3] pendant lequel il avait appris à lire, écrire et compter (mais pas l'usage des quatre opérations), pratiqué le chant, la danse, l'exercice physique. Il abordait ensuite le second degré. Là, il exerçait son corps le matin et son esprit l'après-midi. Sous la conduite d'un grammairien – cet enseignement était le plus important –, il étudiait les poètes et les écrivains classiques. Un rhéteur et, souvent, un maître de musique qui dispensait aussi une formation scientifique en arithmétique et astronomie complétaient cette éducation. Mais on n'étudiait l'astronomie que dans les vers des poètes. Il était aussi possible que l'on enseignât un peu de géométrie.

C'est pour pallier ces évidentes carences concernant l'enseignement scientifique que Platon demandait – en cela il était novateur – que des rudiments de mathématiques fussent enseignés à tous, et ceci dès le plus jeune âge : « En effet, pour la vie familiale comme pour la vie publique et toutes les activités, aucune branche de l'instruction des enfants ne présente autant d'avantages que la science des nombres : le principal est d'éveiller un esprit naturellement assoupi et sans curiosité et de lui donner ouverture, mémoire, sagacité, le faisant progresser jusqu'à se dépasser lui-même grâce à une méthode divine. »[4] Il précise : « Il reste encore, précisément pour les hommes libres, trois disciplines : les calculs et l'étude des nombres en sont une ; la mesure des longueurs, celles des surfaces et des solides en font ensemble une seconde ; la troisième est l'étude du cours des astres et de leurs relations mutuelles dans cette révolution. De tout cela, une étude minutieuse précise n'est pas affaire du grand nombre, mais seulement de quelques-uns : qui seront-ils, nous le dirons quand nous aurons progressé jusqu'aux approches de la fin ; ce serait, en effet, le moment convenable. Quant à la foule, ignorer, de ces sciences, les éléments qu'on regarde,

---

référer au livre d'Henri-Irénée Marrou : *Histoire de l'éducation dans l'Antiquité, I. Le monde grec*, coll. Points Histoire nº H56, éd. du Seuil, 1948.

[3] Entre trois et six ans, Platon (427-348 av. J.-C.) préconisait une sorte d'école maternelle mixte : « Il faudra réunir dans les temples de chaque bourgade, tous les enfants de cet âge, de trois à six ans, tous ceux de chaque bourgade ensemble » (*Les Lois*, VII, 794 a). « Pour les garçons et les filles au-dessus de six ans, la séparation des sexes s'impose ; [...] ; mais les uns comme les autres devront être tournés vers l'instruction, les garçons apprenant l'équitation, le maniement de l'arc, du javelot, de la fronde ; les filles, pour peu qu'elles s'y prêtent, apprenant au moins la théorie, surtout en ce qui concerne le maniement des armes » (*Ibid.*, 794 c, d). Et il souhaitait que cet enseignement fût obligatoire : « Mais nous n'accepterons pas que celui-là fréquente l'école parce que son père le veut et que cet autre, non contraint, la délaisse : non, c'est, comme on dit, "tout homme et tout garçon" que, dans toute la mesure du possible, parce qu'ils appartiennent à la cité plus qu'à leurs parents, nous contraindrons à se faire instruire. Pour les femmes elles-mêmes, la loi que je veux en dira tout autant que pour les mâles, à savoir que les femmes doivent s'entraîner d'égale façon ; » (*Ibid*., 804 d, e). Une non égalité de traitement garçons-filles étant à ses yeux « d'une extrême folie » car, alors, « chaque ou presque chaque cité, au prix des mêmes dépenses et des mêmes peines, arrive à n'être qu'une demi-cité au lieu d'en valoir deux : faute qu'il serait tout de même étonnant de voir faire à un législateur » (*Ibid.*, 805 a, b). Il ne semble d'ailleurs pas que cette idée fut la norme car l'interlocuteur de l'Athénien-Platon, Clinias, rétorque : « Apparemment ; cependant il y a, dans tout ce que nous sommes en train d'exposer, bien des choses qui vont à l'encontre des institutions existantes » (*Ibid.*).

N.B. On pourra s'étonner, le nombre des femmes étant sensiblement le même que celui des hommes, de ne pas lire : « arrive à n'être qu'une demi-cité au lieu d'en valoir une ». Tout s'explique cependant si l'on sait que Platon recommandait que l'on encourageât chacun à être ambidextre.

[4] *Les lois*, V, 747 b.

avec toute raison, je puis dire, comme indispensables, serait, même pour le grand nombre, une honte, bien qu'y chercher partout la précision ne soit ni facile ni aucunement possible. Mais, ce qui en est nécessaire, on ne peut le rejeter. »[5] On ne peut plus clairement affirmer le rôle formateur et nécessaire de l'apprentissage d'éléments de mathématiques ! Mais quel écho précis avaient eues, un siècle plus tard, à Syracuse, les propositions de Platon ? Il est certain que, malgré tous ses conseils, l'enseignement grec est resté dominé par les études littéraires et rhétoriques, une éducation scientifique sérieuse n'étant donnée qu'à un petit nombre.

L'éphébie, qui venait après le second degré, était à l'origine une sorte de service militaire ; mais le métier de soldat étant ensuite exercé par des mercenaires, l'enseignement dispensé pendant ce cursus, d'ailleurs ramené à deux ans, change complètement. Le jeune homme fait du sport, suit des cours optionnels de rhétorique, de médecine, d'astronomie, de géométrie, il assiste à des conférences… bref, il se prépare à entrer dans le monde. Après l'éphébie, le jeune homme pouvait suivre un enseignement supérieur (certains englobent l'éphébie dans ce degré supérieur). Le Musée d'Alexandrie, par exemple, était un, voire le plus grand centre de formation scientifique supérieure dans l'antiquité. Mais il existait entre ce *nec plus ultra* et rien, tout un ensemble de possibilités adaptées aux compétences, aux goûts et aux ambitions des jeunes gens.

Archimède paracheva-t-il ses études à Alexandrie ? On peut le penser, mais on ne le sait pas. Ce que l'on sait, c'est que plus tard il fit parvenir certains de ses traités à différents scientifiques d'Alexandrie. Comment les a-t-il connus ? On l'ignore. La famille d'Archimède était-elle riche ? On ne le sait pas. Par contre, on sait qu'Archimède était un *parent* de Hiéron qui devint roi de Syracuse en 269 av. J.-C., mais ceci peut tout aussi bien dire qu'il était de sa famille, légitime ou non, que de sa maison, à savoir esclave ou affranchi. Ce qui est sûr, c'est qu'Archimède périt en 212 av. J.-C. lors de la prise de Syracuse, après deux ans de siège, par le Romain Marcellus. Plutarque (vers 50-125), dans *Vies parallèles*, rapporte le fait en chantant les louanges de Marcellus[6] : la valeur du vainqueur étant à mesurer à l'aune du fil que le génial savant lui avait donné à retordre lors de ce siège. En effet, poussé par le roi Hiéron dont le règne fut sans guerres, nous dit Plutarque, Archimède avait mis au point des machines qui « se trouvèrent prêtes pour les Syracusains quand ils en eurent besoin, au moment dont je parle, et avec ces machines l'inventeur lui-même »[7]. Et comme Plutarque savait déjà, même si on ne l'avait pas encore écrit ainsi, « qu'à vaincre sans péril, on triomphe sans gloire », il n'y est probablement pas allé avec le dos de la cuillère dans cette narration. Pourtant, il ne parle pas des miroirs ardents avec lesquels Archimède aurait eu l'idée d'incendier la flotte romaine ;

[5] *Les lois*, VII, 818 a.
[6] PLUTARQUE, *Vies*, t. IV, p. 207-216.
[7] *Ibid.*, 14-15, p. 209.

affaire que Descartes, qui travailla sur l'optique, jugeait impossible et l'on s'accorde aujourd'hui à penser qu'elle l'est en effet ! Mais quelle fut exactement la fin d'Archimède ? Là encore, on ne le sait pas : Plutarque en rapporte trois versions.

Et pourtant, il y eut bien une biographie d'Archimède écrite par un Héraclide (Archimède en connut un, mais est-ce celui-là ?) ; Eutocius d'Ascalon (env. 480-env. 530) qui commenta l'œuvre d'Archimède au VIe siècle l'a lue. Elle s'est ensuite perdue. Anthémius de Thralles, architecte byzantin du VIe siècle qui construisit la basilique Ste Sophie à Constantinople, contribua largement à établir la légende d'Archimède-ingénieur. Alors de quoi pouvons-nous être sûrs ? De tous les traités laissés par Archimède. Mais ils ne concernent pas ses découvertes d'ingénieur grâce auxquelles il entra dans la légende. Est-ce parce qu'il jugeait cela de valeur mineure et indigne d'intérêt, seuls les résultats théoriques ayant une importance à ses yeux ? Dix traités nous sont parvenus[8] ; ce sont, dans leur ordre chronologique probable :

De l'équilibre des figures planes, livre I.
La Quadrature de la parabole.
De l'équilibre des figures planes, livre II.
De la sphère et du cylindre, livres I et II.
Des spirales.
Sur les conoïdes et les sphéroïdes.
Des corps flottants, livres I et II.
De la mesure du cercle.
L'arénaire.
De la méthode.

Archimède s'est intéressé, entre autres, à la numération, à la statique (il a élaboré une théorie de l'aquilibre des leviers), à la quadrature du cercle (il a donné une approximation de π), à des calculs d'aires et de volumes. Mais certains de ses écrits

8 Le lecteur réunionnais pourra trouver les œuvres complètes d'Archimède, dans l'édition des Belles Lettres, à la médiathèque François Mitterrand de Saint-Denis de La Réunion. C'est à cette édition que nous ferons constamment référence. En cours de lecture, le néophyte sera peut-être surpris par une phrase fréquente comme « ΓΑ est à ΑΞ comme ΜΞ est à ΞΟ » ; elle signifie que le rapport de proportionnalité entre les segments ΓΑ et ΑΞ est le même que celui entre les segments ΜΞ et ΞΟ et nous la traduirons, pour plus de commodité, par $\frac{\Gamma A}{A\Xi} = \frac{M\Xi}{\Xi O}$. À ce propos, peut-être avez-vous déjà remarqué, en quatrième de couverture d'un cahier d'écolier d'autrefois, les lignes :

SIGNES ABRÉVIATIFS EMPLOYÉS EN ARITHMÉTIQUE :

Plus + Moins – Multiplié par × Divisé par : Égale = Comme ::

Nous utilisons très couramment les cinq premiers, mais plus du tout le dernier, celui qui permettait de traduire l'égalité de rapports de proportions. Ainsi, on écrivait : 2:3 :: 10:15, ce qui signifie que les nombres 2 et 3 ont le même rapport de proportionnalité que les nombres 10 et 15, et qui se lisait : « 2 est à 3 comme 10 est à 15 » (cf. Euclide, Livre V). Dans *A History of Mathematical Notation*, § 244, Cajori signale qu'en 1631, dans son livre *Clavis mathematicæ*, William Oughtred (1574-1660) utilise la notation a.b :: c.d, pour écrire que le rapport de proportionnalité entre les nombres a et b est le même que celui entre les nombres c et d. C'est en 1651 qu'apparaît chez l'astronome Vincent Wing, dans son *Harmonicon cœleste*, la notation a:b :: c:d.

sont entièrement perdus, dont un livre d'arithmétique, un traité sur les cinq polyèdres réguliers (on en connaît un résumé par Pappus d'Alexandrie) et un traité sur les centres de gravité.

Le traité de *La Méthode*

C'est en 1899 que le paléographe Papadopoulos Kerameus découvre, au monastère du Saint Sépulcre à Jérusalem, un palimpseste présentant des traces d'un traité mathématique grec. Le parchemin, mal effacé avant une réutilisation entre le XIIe et le XIVe siècle, révèle un texte transcrit au Xe siècle. Le savant danois J. L. Heiberg, qui avait déjà publié en 1880 la première édition critique des œuvres d'Archimède connues à l'époque, se chargea de déchiffrer ce texte et de le traduire ; il acheva ce travail en 1906. Trois traités d'Archimède sont ainsi mis au jour : *Le Stomachion*[9], *La Méthode*[10] et *Le Traité des Corps Flottants*. On ne connaissait pas les deux premiers. Ce qui conduira Heiberg à faire, entre 1913 et 1915, une seconde édition critique de l'œuvre d'Archimède !

Il s'avère que *La Méthode* est d'une importance capitale : on peut presque dire que c'est le testament scientifique d'Archimède. La lettre d'introduction à son ami et pair, Eratosthène (vers 276-194 av. J.-C.), que vous trouverez en annexe à cet article, est on ne peut plus significative. On peut avoir là une bonne idée de la structure habituelle des traités d'Archimède, qui ne s'adresse qu'à ses pairs : il commence par une lettre d'introduction à son correspondant ; viennent après les lemmes ou propriétés utiles à la compréhension de ce qui suit et, le plus souvent, établis dans des traités antérieurs ; il passe ensuite à la rédaction proprement dite des propositions et de leurs démonstrations (il y en a quinze dans *La Méthode*). Dans d'autres traités, entre la lettre amicale et les lemmes, il intercale des définitions et des postulats.

Eratosthène, connu de nos jours pour son *crible* qui permet de trouver les nombres premiers dans une liste de nombres, était alors le conservateur en chef de la Grande Bibliothèque d'Alexandrie. Il fut aussi précepteur des enfants royaux. Si on se rappelle qu'à cette époque Alexandrie était aux scientifiques ce qu'Athènes était aux poètes et aux philosophes, et si on sait que cette Bibliothèque était celle du *Mousséion*, institution royale qui était abritée dans de somptueux bâtiments près des palais royaux et qui pensionnait les plus grands savants, on comprendra mieux l'importance du personnage.

---

9 En fait, il ne s'agit que d'un fragment de ce traité considéré d'ailleurs comme une œuvre mineure. Un autre fragment a été découvert dans un manuscrit arabe par l'orientaliste H. Suter qui en a publié une traduction en 1899. L'ensemble de ce qui nous est pour l'instant parvenu du *Stomachion* ne contient que l'équivalent de trois propositions. Archimède y traite d'un problème de pavage de carrés et de rectangles à l'aide de plaquettes ayant, pour la plupart, la forme de triangles, pour quelques-unes celle de polygones, et possédant la propriété remarquable d'être contenues, le plus souvent, un nombre entier de fois dans la figure initiale et, pour certaines, un nombre rationnel de fois. C'est-à-dire que ces plaquettes sont *dans un rapport commensurable* avec la figure initiale.

10 Titre complet : *La Méthode d'Archimède relative aux propositions mécaniques, à Eratosthène*.

Dans cette lettre, Archimède annonce la démonstration de deux résultats déjà soumis à la sagacité d'Eratosthène, que nous noterons respectivement théorèmes 1 et 2, et qu'en langage moderne nous pouvons énoncer :

• **Le volume de l'onglet cylindrique vaut 1/6 de celui du cube** (voir fig. 1) ;

• **Le volume de l'intersection de deux cylindres d'axes orthogonaux et concourants, inscrits dans un cube, est égal aux 2/3 de celui de ce cube** (voir fig. 2).

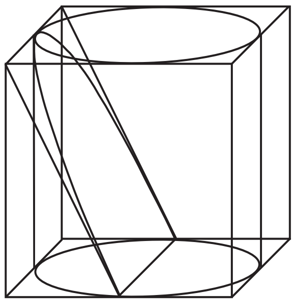


FIG. 1

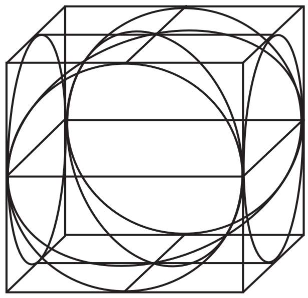


FIG. 2

Ainsi, une figure partiellement curviligne « est trouvée équivalente à une figure solide limitée par des plans »[11]. Voilà sans doute pourquoi Archimède estime que « ces théorèmes diffèrent de ceux qui ont été trouvés antérieurement »[12] ; il y pressentait probablement un pas vers la résolution du problème de la quadrature du cercle[13] : une constructibilité d'un *rectiligne* ou d'un *plat* équivalent à du *rond*.

« J'ai jugé à propos de te décrire, et de développer dans ce même livre, les propriétés caractéristiques d'une méthode qui te permettra d'aborder certaines propositions mathématiques par le biais de la mécanique. Mais je suis persuadé que cet outillage peut servir même pour la démonstration des théorèmes ; certaines propriétés, en effet, qui m'étaient d'abord apparues comme évidentes par la mécanique, ont été démontrées plus tard par la géométrie, parce qu'une étude faite par cette méthode

---

[11] ARCHIMÈDE, *La Méthode*, t. III, p. 83.

[12] *Ibid*, p. 83.

[13] Peut-on construire, en n'utilisant que la règle et le compas, un carré qui ait la même aire qu'un cercle de rayon donné ? C'est ce problème qui s'appelle le problème de la quadrature du cercle. Il a occupé les mathématiciens pendant de nombreux siècles. On sait, depuis 1882, que la réponse est non ; c'est une conséquence des travaux du mathématicien allemand F. von Lindeman (1852-1939) sur le nombre π. Il a établi que π est un nombre transcendant, c'est-à-dire qu'il n'est racine d'aucune équation polynomiale à coefficients rationnels. En conséquence, par application d'un résultat établi en 1837 par le Français M. L. Wantzel (1814-1848), π n'est pas constructible. Wantzel, alors qu'il était élève ingénieur à l'École des Ponts et Chaussées, publie le célèbre article intitulé : « Recherche sur les moyens de reconnaître si un problème de géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas ». Il montre en particulier que tout nombre constructible est algébrique, c'est-à-dire racine d'une équation polynomiale à coefficients rationnels (la réciproque est fausse). Le lecteur intéressé pourra trouver la reproduction de cet article de Wantzel dans le numéro 3 de *Mnémosyne* d'avril 1993.

n'est pas susceptible de démonstrations ; car il est plus aisé d'édifier la démonstration après avoir acquis préalablement quelque connaissance des objets de la recherche au moyen de cette méthode que de chercher sans la moindre connaissance »[14], écrit-il ensuite.

En substance, cette méthode *ne vaut pas*, mais *elle marche* parce qu'elle permet d'avoir l'intuition d'un résultat ; ce qui est particulièrement important car, si la méthode *par la géométrie*[15] est une méthode démonstrative parfaitement convaincante, elle n'a, elle, aucun pouvoir heuristique : il faut connaître le résultat à l'avance pour pouvoir le prouver ainsi. C'est pourquoi Archimède rend hommage à Démocrite (vers 460-370 av. J.-C.), occupé lui aussi de problèmes de calculs de volumes, qui énonça des résultats qu'il n'établit pas, mais qu'Eudoxe (vers 408-355 av. J.-C.) put ensuite démontrer : une pyramide a un volume égal au tiers de celui du prisme de même base et de même hauteur (c'est la proposition XII-7 des *Éléments* d'Euclide), et un cône a un volume égal au tiers de celui du cylindre de même base et de même hauteur (c'est la proposition XII-10 des *Éléments* d'Euclide). Archimède inscrit donc clairement son travail dans le prolongement de celui de mathématiciens qui l'ont précédé. Et il sait à quel point sa découverte est importante : « … je suis convaincu d'apporter une contribution très utile à la recherche mathématique. Je suis persuadé en effet, que des chercheurs, soit de notre époque, soit de l'avenir, trouveront par l'application de la méthode que j'aurai fait connaître, encore d'autres propositions qui ne me sont pas encore venues à l'esprit. »[16]

Archimède, *La Méthode*, proposition 1

De quoi s'agit-il ? Pour commencer à le comprendre, examinons la démonstration[17] de la proposition 1 de *La Méthode* :

« Je dis que le segment ΑΒΓ **est équivalent aux quatre tiers du triangle** ΑΒΓ **»**[18].

---

[14] ARCHIMÈDE, *La Méthode*, t. III, p. 83-84.

[15] Cette méthode sera aussi appelée méthode *d'exhaustion*, méthode *par compression*, *par double réduction à l'absurde*, *apagogique* ; elle sera utilisée jusqu'au XVII^e siècle et Pascal parle de la *méthode des Anciens* lorsqu'il y fait référence. Le nom de *méthode d'exhaustion* est dû à Grégoire de Saint-Vincent (1584-1667) qui l'emploie dans son *Opus geometricum Quadraturæ circuli et sectionum coni* (Traité géométrique de la Quadrature du cercle et des sections coniques) de 1647. Pour avoir plus d'informations concernant cette méthode, le lecteur pourra se référer à l'article de J. P. Le Goff : « De la méthode dite d'exhaustion : Grégoire de Saint-Vincent (1584-1667) », paru dans les actes du colloque Inter-IREM de Besançon des 12 et 13 mai 1989 (p. 196-220). Il pourra aussi consulter le numéro 1 de *Mnémosyne* d'avril 1992.

[16] ARCHIMÈDE, *La Méthode*, t. III, p. 84.

[17] Dans ce qui suit, les démonstrations seront exposées en langage moderne et, tout en suivant l'argumentation d'Archimède, j'insisterai surtout sur l'enchaînement des idées ; les développements et références nécessaires à une compréhension complète seront rejetés en notes. D'autre part, le texte original ne comporte aucune figure dans l'espace ; toutes les figures planes dans le corps de cet article (sauf les figures 5 et 8) reproduisent celles d'*Archimède*, Les Belles Lettres, collection G. Budé, à cette différence près que les minuscules grecques ont été remplacées par des majuscules grecques et que quelques lettres (notées alors entre parenthèses) ont été introduites pour faciliter l'exposé.

[18] ARCHIMÈDE, *La Méthode*, t. III, p. 86.

Archimède affirme que cette proposition a été « la première à [lui] être révélée par la mécanique »[19]. C’est donc sur cet exemple simple qu’il commence l’exposé de sa méthode. Les deux idées actives sont de considérer qu’une aire « est constituée de segments de droites », et d’effectuer des pesées fictives sur de tels segments bien choisis. La rédaction de ce raisonnement, assez longue, reviendra toujours au cours de ce traité ; il n’en fera jamais l’économie. Il conclut : « la proposition n’est, certes, pas démontrée par ce que nous venons de dire, mais elle donne une certaine idée que la conclusion est vraie »[20]. Il renvoie ensuite aux démonstrations déjà faites dans *La Quadrature de la parabole.*

Il s’agit d’établir que l’aire de la portion de plan comprise entre l’arc de parabole et la corde AΓ est égale aux quatre tiers de celle du triangle ABΓ (voir fig. 3). ΓZ est tangente à la parabole en Γ, AZ est parallèle au diamètre[21] ainsi que BΔ, donc BΔ = BE[22], et BΓ coupe AZ en son milieu K.

---

[19] *Ibid.*, p. 84.

[20] *Ibid.*, p. 88.

[21] Actuellement, on appelle *diamètre*, non seulement d’une parabole, mais d’une conique en général, le lieu géométrique des milieux des cordes de direction donnée. Il est porté par une droite. Par exemple, soit la parabole $(\Im)$ d’axe de symétrie D. Soit une corde quelconque [AΓ] de direction (∂). Les milieux de [AΓ] sont tous situés sur une même droite D’ qui, de plus, est parallèle à D. Au sens de la définition précédente, D et D’ sont donc des diamètres de $(\Im)$. Cependant, ce qu’Archimède appelle « diamètre », c’est uniquement l’axe de symétrie de la parabole ; dans les autres cas, il parle de « droite parallèle au diamètre ».

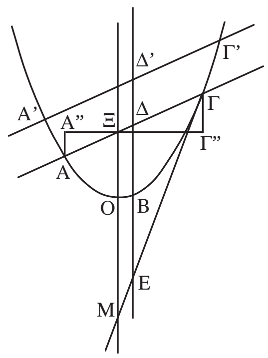


FIG. 3a

Voici une démonstration de ce résultat accessible à un élève de Terminale :

Soit la parabole $(\Im)$ d’équation $y = px^2$. Soient $A(a, pa^2)$ et $\Gamma(b, pb^2)$ deux points quelconques de $(\Im)$, et Δ le milieu de [AΓ]. La droite (AΓ) est dirigée par le vecteur $\vec{v}(1, p(a+b))$. Soient $A'(a', pa'^2)$ et $\Gamma'(b', pb'^2)$, tels que (AΓ) et (A’Γ’) soient parallèles. Le parallélisme des droites (AΓ) et (A’Γ’) se traduit par la colinéarité des vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{v}'$, c’est-à-dire par $p(a+b) = p(a'+b')$. Alors Δ’, milieu de [A’Γ’], a même abscisse que Δ, soit $(a+b)/2$; (ΔΔ’) est donc parallèle à l’axe des ordonnées, axe de symétrie de $(\Im)$. Remarquons enfin que si (ΔΔ’) coupe $(\Im)$ en B, alors la tangente à $(\Im)$ en B est parallèle à (AΓ) ; cette tangente est obtenue comme position limite de la droite (A’Γ’).

Un élève de Math. sup. préférera :

Le théorème des accroissements finis appliqué à $f : x \mapsto px^2$, dérivable sur [a, b], assure l’existence de $c \in]a, b[$ tel que $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$. Or, $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{p(b^2-a^2)}{b-a} = p(b+a) = f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$. La tangente à $(\Im)$ au point B d’abscisse $(a+b)/2$ est donc parallèle à (AΓ) et c’est aussi la tangente à $(\Im)$ parallèle à n’importe quelle corde [A’Γ’] parallèle à (AΓ). Donc $(a+b)/2 = (a'+b')/2$. Ainsi les milieux respectifs de [AΓ] et [A’Γ’], Δ et Δ’, ayant même abscisse, (ΔΔ’) est parallèle à l’axe de $(\Im)$.

[22] Dans la proposition 2 de *La Quadrature de la parabole*, Archimède rappelle sans démonstration que « si on a une parabole ABΓ, une droite BΔ parallèle au diamètre ou elle-même diamètre, une droite AΔΓ parallèle à la tangente à la conique au point B, et une droite EΓ tangente à la conique au point Γ, BΔ et BE seront égaux » (cf. Apollonius I, 35), (ARCHIMÈDE, t. II, p. 166-167).

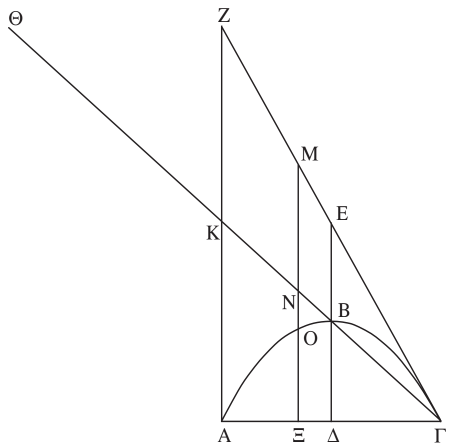


FIG. 3

On construit Θ tel que K soit le milieu de ΘΓ vu comme un levier de point d'appui K[23]. La méthode consiste à montrer que le segment ABΓ déplacé en Θ[24] équilibre, autour de K, le triangle AZΓ restant en place. On en déduira l'égalité

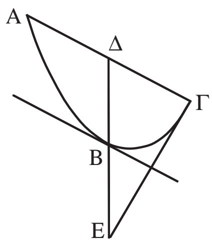


FIG. 3b

Pour un élève de Terminale : reprenons la parabole $(\mathfrak{I})$ définie dans la note précédente. Une équation de la tangente à $(\mathfrak{I})$ en Γ est $y = bp(2x - b)$. La droite (AΓ) a pour pente $p(a+b)$, et le point B en lequel la tangente à $(\mathfrak{I})$ est parallèle à (AΓ) a pour abscisse x tel que $2px = p(a+b)$, soit $x = (a+b)/2$. B a donc même abscisse que Δ, milieu de [AΓ]. Soit E le point d'intersection de (ΔB), qui est donc un diamètre de $(\mathfrak{I})$, et de la tangente à $(\mathfrak{I})$ en Γ. Alors E a pour coordonnées $((a+b)/2,\, abp)$. Or, celles de Δ sont $((a+b)/2,\, p(a^2+b^2)/2)$. Le milieu de [ΔE] a donc pour coordonnées $((a+b)/2,\, p(a+b)^2/4)$. Ce sont les coordonnées de B, qui est ainsi le milieu de [ΔE].

23 Rappelons la loi d'équilibre d'un levier :

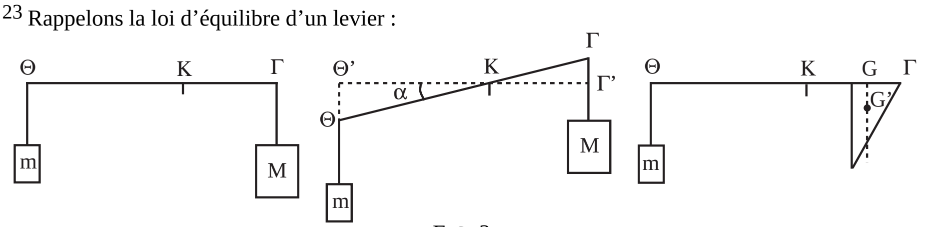


FIG. 3c

Aux extrémités Θ et Γ du levier ΘΓ de point d'appui K, on suspend les masses m et M respectivement. Ce levier sera en équilibre si et seulement si ΘK × m = KΓ × M. Cet équilibre est réalisé, que le levier soit horizontal ou non ; il est donc indifférent. En effet, en situation d'équilibre avec un bras non horizontal, on a m × KΘ' = M × KΓ', donc m × ΘK × cosα = M × KΓ × cosα, d'où ΘK × m = KΓ × M. Un solide S de masse M, accroché sur le bras de levier KΓ (Archimède utilisera des triangles, des trapèzes, etc.), a la même action sur ce levier que cette masse M suspendue au point G de KΓ qui est à l'aplomb de G' centre de gravité de S. Ainsi, pour équilibrer S, il faudra suspendre en Θ une masse m telle que m × KΘ = M × KG.

24 « Le segment ABΓ déplacé en Θ » signifie que ce segment est déplacé de façon que son centre de gravité coïncide avec Θ, ou soit à l'aplomb de Θ.

segment (ΑΒΓ) = 1/3 triangle (ΑΖΓ), d'où le résultat par des considérations élémentaires sur les triangles ΑΒΓ et ΑΖΓ : en effet, l'aire du triangle ΑΖΓ vaut le quadruple de celle du triangle ΑΒΓ.

Soit ΜΞ une sécante parallèle à ΔΕ. On a $\frac{\Gamma\mathrm{A}}{\mathrm{A}\Xi} = \frac{\mathrm{M}\Xi}{\Xi\mathrm{O}}$[25], d'où $\frac{\mathrm{M}\Xi}{\Xi\mathrm{O}} = \frac{\Theta\mathrm{K}}{\mathrm{KN}}$ car $\frac{\Gamma\mathrm{A}}{\mathrm{A}\Xi} = \frac{\Gamma\mathrm{K}}{\mathrm{KN}}$ et ΓΚ = ΚΘ. Le point Ν étant le milieu de ΜΞ, il est le centre de gravité du segment ΜΞ, donc le segment ΟΞ déplacé de façon que Θ soit son milieu, équilibre par rapport à Κ, le segment ΜΞ restant en place[26]. Le même raisonnement s'appliquant à toutes les parallèles ΜΞ à ΕΔ, « ... toutes les parallèles à ΕΔ menées dans le triangle ΖΑΓ feront équilibre, en restant en place, aux segments, découpés d'eux par la parabole et transportés au point Θ de manière que le centre de gravité de la grandeur composée des uns et des autres soit le point Κ. Et du moment que le triangle ΓΖΑ est constitué par les segments de droites menés dans le triangle ΓΖΑ, et le segment ΑΒΓ constitué par les segments de droites pris dans le segment (sc. de parabole) de la même manière que ΞΟ, le triangle ΖΑΓ fera équilibre, en restant en place, au segment de parabole placé autour du centre de gravité Θ, l'équilibre se faisant par rapport au point Κ, de façon que le centre de gravité de la somme des deux grandeurs soit le point Κ »[27]. La position du centre de gravité du triangle ΑΖΓ étant connue[28], on a donc

$$\frac{\text{segment}(\mathrm{AB}\Gamma)}{\text{triangle}(\mathrm{AZ}\Gamma)} = \frac{1}{3}\,\frac{\Gamma\mathrm{K}}{\mathrm{K}\Theta} = \frac{1}{3}.$$

Torricelli, *Opera Geometrica*, livre *De dimensione parabolæ*, proposition 20

Avant de voir comment Archimède, dans *La Quadrature de la parabole,* utilise autrement l'idée des pesées pour fournir une démonstration qu'il pourra considérer

---

[25] Car, d'après la proposition 5 de *La Quadrature de la parabole,* $\frac{\mathrm{O}\Xi}{\mathrm{OM}} = \frac{\mathrm{A}\Xi}{\Xi\Gamma}$, donc $\frac{\Xi\Gamma}{\mathrm{A}\Xi} = \frac{\mathrm{OM}}{\Xi\mathrm{O}}$, et on en déduit que $\frac{(\mathrm{A}\Xi + \Xi\Gamma)}{\mathrm{A}\Xi} = \frac{(\Xi\mathrm{O} + \mathrm{OM})}{\Xi\mathrm{O}}$, soit $\frac{\mathrm{A}\Gamma}{\mathrm{A}\Xi} = \frac{\mathrm{M}\Xi}{\Xi\mathrm{O}}$.

Pour un élève de Terminale : montrons que $\frac{\mathrm{O}\Xi}{\mathrm{OM}} = \frac{\mathrm{A}\Xi}{\Xi\Gamma}$; pour cela, reprenons la parabole ($\Im$) de la note 21 et les mêmes points Α et Γ. Soit Ξ le point de la corde [ΑΓ] d'abscisse α, Ο le point de ($\Im$) d'abscisse α et Μ le point d'intersection de la droite (ΞΟ) et de la tangente à ($\Im$) en Γ. On a : $\Xi(\alpha,\ p(a+b)\alpha - abp)$, $\mathrm{O}(\alpha,\ p\alpha^2)$, $\mathrm{M}(\alpha,\ bp(2\alpha - b))$. Si Α" et Γ" ont même abscisse que Α et Γ respectivement, et même ordonnée que Ξ, on peut écrire $\frac{\mathrm{A}\Xi}{\Xi\Gamma} = \frac{\mathrm{A}''\Xi}{\Xi\Gamma''} = \frac{\alpha - a}{b - \alpha}$. Or, $\frac{\mathrm{O}\Xi}{\mathrm{OM}} = \frac{p(a+b)\alpha - abp - p\alpha^2}{p\alpha^2 - 2pb\alpha + b^2 p} = \frac{(a-\alpha)(\alpha - b)}{(b-\alpha)^2} = \frac{\alpha - a}{b - \alpha}$, d'où le résultat.

[26] D'après ARCHIMÈDE, *De l'Equilibre des Figures Planes I,* t. II, propositions 6 et 7 (dans lesquelles on reconnaît ce que nous avons expliqué en note 23).

[27] ARCHIMÈDE, t. III, p. 87-88.

[28] *Équilibre des Figures Planes I,* proposition 14 et *La Quadrature de la parabole*, proposition 6.

comme satisfaisante (propositions 14 à 17), étudions une des 21 démonstrations données par Torricelli dans ses *Opera Geometrica*, livre *De dimensione parabolæ*. Par ce texte, il veut convaincre le lecteur que la méthode des indivisibles est la plus élégante et il établit la proposition 20 : **« Une parabole est grande comme les 4/3 du triangle construit sur la même base et ayant la même hauteur. »**[29]

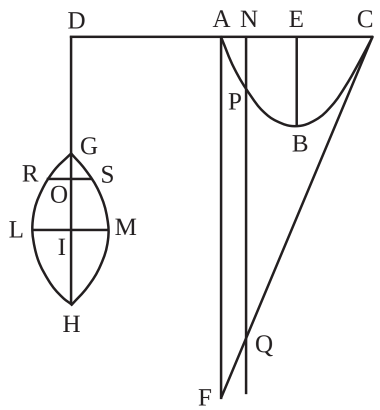


FIG. 4

Torricelli précise : « Soit la parabole ABC, et supposons que son diamètre BE soit perpendiculaire à l'horizon... »[30]. « Prolongeons CA jusqu'en D, de manière que CA égale AD ; et que DC soit une balance dont le point d'appui est en A »[31], écrit-il ensuite.

Il suspend sur DH, parallèle à EB, deux segments de parabole, GLH et GMH tels que LM = EB, IM = LI, GH = AC et IG = IH. Le *ballon* GLHM ainsi obtenu a même aire que le segment ABC[32]. On prend IO = NE, donc NP = RS, d'où

$$\frac{QN}{RS}\left(=\frac{QN}{NP}=\frac{AC}{AN}\right)=\frac{DA}{AN}.$$

« Donc les droites QN et RS se font équilibre, et cela dans tous les cas. Donc toutes les lignes du triangle AFC prises ensemble (c'est-à-dire ce triangle lui-même) font équilibre à toutes les lignes de la figure GLHM prises ensemble (c'est-à-dire à cette figure GLHM elle-même). »[33] D'où la conclusion puisque l'on connaît la position du centre de gravité du triangle AFC.

La méthode est exactement dans le même esprit que celle d'Archimède ; si le levier est différent, on a quand même effectué une pesée fictive de segments ; et si le « poids » qui équilibre le triangle AFC n'est plus le segment de parabole ABC, c'est une figure qui a la même aire ; la propriété de la parabole qui permet de conclure est la même que celle utilisée par Archimède ; Torricelli, comme Archimède, était encombré de deux inconnues dans ce problème : l'aire du segment de parabole et son centre de gravité. L'un et l'autre se débarrassent de la seconde : Archimède en choisissant un levier moins simple, mais sans toucher à la parabole, Torricelli en décou-

29 Cité par F. De Gandt, *L'œuvre de Torricelli, science galiléenne et Nouvelle géométrie*, p. 156.
30 *Ibid.*, p. 156.
31 *Ibid.*, p. 156.
32 Torricelli l'a établi dans un lemme précédent.
33 F. De Gandt, *ibid.*, p. 157.

pant la parabole en une surface équivalente, ayant l'avantage de présenter un axe de symétrie sur lequel est situé son centre de gravité, qui se trouve ainsi heureusement à l'aplomb d'une des extrémités du levier. Enfin Torricelli, comme Archimède, considère que « toutes les lignes du triangle AFC prises ensemble », c'est la même chose que le triangle AFC lui-même.

Ces raisonnements particulièrement élégants vous ont sans doute convaincus. Ils ne sont pourtant pas sans danger : que pensez-vous de la démonstration suivante ?

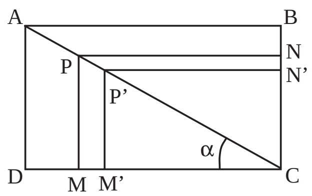


FIG. 5

Dans le rectangle ABCD de diagonale AC (voir fig. 5), considérons les segments PM et PN. Quelle que soit la position de P sur le segment AC, PM < PN. Or les segments PM constituent le triangle ADC et les segments PN, le triangle ABC, d'où triangle (ADC) < triangle (ABC). Ce qui est faux, bien sûr.

C'est parce que PM et PN n'ont pas la même inclinaison sur AC que le raisonnement est faux. Du fait de cette différence d'inclinaison, les trapèzes infinitésimaux PM et PN n'ont pas la même hauteur et donc leurs aires ne sont pas dans le même rapport de proportionnalité que leur bases (les deux bases du trapèze PN sont *presque égales* – son épaisseur étant infinitésimale – tout comme celles de PM). D'une part, NN' = PP' $\times$ sinα et MM' = PP' $\times$ cosα. D'autre part, PN = PC $\times$ cosα et P'N' = P'C $\times$ cosα. Enfin, PM = PC $\times$ sinα et P'M' = P'C $\times$ sinα. On a donc

$$(PN + P'N') \times NN' = \cos\alpha \times (PC + P'C) \times PP' \times \sin\alpha = (PM + P'M') \times MM'.$$

Les trapèzes PNN'P' et PMM'P' ont ainsi la même aire, aussi petites que soient leurs hauteurs.

Archimède, *La Quadrature de la parabole*, propositions 14 à 17 : une démonstration « rigoureuse » utilisant la mécanique

Dans *La Quadrature de la parabole*, Archimède résout le problème de deux façons. Après avoir établi dans les propositions 1 à 5 des résultats sur la parabole et, dans les propositions 6 à 13, différentes propriétés d'équilibre de triangles et de trapèzes, il passe, dans les propositions 14 à 17, à la démonstration proprement dite du théorème. La fin du traité est consacrée à établir le résultat *par la géométrie*.

Propositions 14 et 15 : on établit un encadrement

Archimède encadre le triangle BΔΓ par le triple d'aires de polygones, d'une part inscrits dans le segment de parabole, d'autre part le contenant, que BΓ soit perpendiculaire au diamètre de la parabole (proposition 14) ou non (proposition 15). Il utilise pour cela une méthode de pesées fictives de trapèzes et de triangles (voir fig. 6). BΓ est divisé « en autant de segments partiels égaux qu'on voudra, soit BE, EZ, ZH, HI, ΙΓ »[34]. Il s'agit d'établir (la notation [KE] désigne le trapèze de diagonale KE) les inégalités suivantes :

$$\text{triangle}\,(\mathrm{B\Delta\Gamma}) < 3([\mathrm{KE}] + [\mathrm{\Lambda Z}] + [\mathrm{MH}] + [\mathrm{NI}] + \text{triangle}\,(\mathrm{I\Xi\Gamma}))\ ;$$

$$3([\mathrm{Z\Phi}] + [\mathrm{H\Theta}] + [\mathrm{I\Pi}] + \text{triangle}\,(\mathrm{IO\Gamma})) < \text{triangle}\,(\mathrm{B\Delta\Gamma}).$$

Archimède considère pour cela ΑΓ comme un levier de point d'appui son milieu B ; il y suspend le triangle ΒΔΓ d'un côté et, en A, les aires P, X, Ψ, Ω et Δc équilibrant respectivement [ΔE], [ZΣ], [TH], [YI] et le triangle ΞΙΓ. La somme $\mathrm{P} + \mathrm{X} + \Psi + \Omega + \Delta c$ équilibre donc le triangle ΒΔΓ et, compte tenu de la loi d'équilibre d'un levier et de la position du centre de gravité d'un triangle, $\mathrm{aire}(\mathrm{B\Delta\Gamma}) = 3(\mathrm{P} + \mathrm{X} + \Psi + \Omega + \Delta c)$.

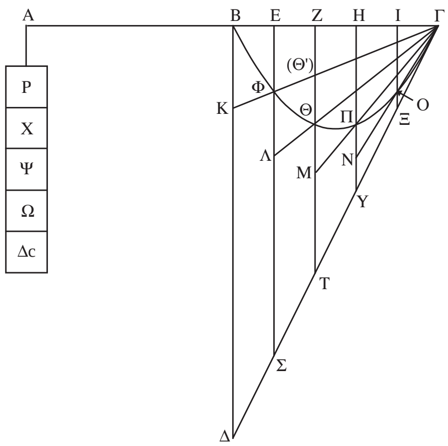


FIG. 6

Sachant que[35] $\frac{\mathrm{B\Gamma}}{\mathrm{BE}} = \frac{\mathrm{E\Sigma}}{\mathrm{E\Phi}} = \frac{\mathrm{BA}}{\mathrm{BE}}$, on peut écrire[36] : $\frac{\mathrm{BA}}{\mathrm{BE}} = \frac{[\mathrm{\Delta E}]}{[\mathrm{KE}]}$. Or P équilibre [ΔE], donc[37] P < [KE]. De même, $\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BZ}} = \frac{[\mathrm{\Sigma Z}]}{[\mathrm{\Lambda Z}]}$, et aussi[38] $\frac{[\mathrm{Z\Sigma}]}{[\mathrm{Z\Phi}]} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BE}}$. Or X équi-

34 ARCHIMÈDE, *La Quadrature de la parabole*, t. III, p. 178.

35 Voir la note 25.

36 En effet, $\frac{[\mathrm{\Delta E}]}{[\mathrm{KE}]} = \frac{\mathrm{E\Sigma} + \mathrm{B\Delta}}{\mathrm{E\Phi} + \mathrm{BK}}$ (car ces trapèzes ont la même hauteur). On a déjà $\frac{\mathrm{E\Sigma}}{\mathrm{E\Phi}} = \frac{\mathrm{BA}}{\mathrm{BE}}$. D'autre part, $\frac{\mathrm{E\Phi}}{\mathrm{BK}} = \left(\frac{\mathrm{E\Gamma}}{\mathrm{B\Gamma}} =\right)\frac{\mathrm{E\Sigma}}{\mathrm{B\Delta}}$, d'où $\frac{\mathrm{B\Delta}}{\mathrm{BK}} = \frac{\mathrm{E\Sigma}}{\mathrm{E\Phi}} = \frac{\mathrm{BA}}{\mathrm{BE}}$. Finalement, $\frac{[\mathrm{\Delta E}]}{[\mathrm{KE}]} = \frac{\mathrm{BA}}{\mathrm{BE}}$.

37 Ce résultat est établi explicitement dans la proposition 10 de *La Quadrature de la parabole*. On peut établir très simplement cette propriété en s'inspirant de la justification moderne du résultat un peu plus complexe étudié en note 39.

38 Car $\frac{[\mathrm{Z\Sigma}]}{[\mathrm{Z\Phi}]} = \frac{\mathrm{ZT} + \mathrm{E\Sigma}}{\mathrm{Z\Theta'} + \mathrm{E\Phi}}$. On a déjà $\frac{\mathrm{E\Sigma}}{\mathrm{E\Phi}} = \frac{\mathrm{BA}}{\mathrm{BE}}$; on a aussi $\frac{\mathrm{Z\Theta'}}{\mathrm{E\Phi}} = \left(\frac{\mathrm{Z\Gamma}}{\mathrm{E\Gamma}} =\right)\frac{\mathrm{ZT}}{\mathrm{E\Sigma}}$, d'où le résultat car $\frac{\mathrm{ZT}}{\mathrm{Z\Theta'}}$ est, lui aussi, égal à $\frac{\mathrm{E\Sigma}}{\mathrm{E\Phi}}$. (Ce raisonnement est le même que celui fait en note 36.)

libre [ZΣ], donc[39] [ZΦ] < X < [ΛZ]. De même, [ΘH] < Ψ < [MH], [ΠI] < Ω < [NI] et triangle (ΓIO) < Δc < triangle (ΞIΓ). Par addition de ces inégalités, il vient [ZΦ] + [ΘH] + [ΠI] + triangle (ΓIO) < P + X + Ψ + Ω + Δc < [KE] + [ΛZ] + [MH] + [NI] + triangle (IΞΓ). Or, P + X + Ψ + Ω + Δc = 1/3 triangle (BΔΓ), d'où le résultat.

Pour la proposition 15, Archimède ne fait pas la démonstration complète. Il se contente d'indiquer comment on peut se ramener à un raisonnement analogue.

Application à la résolution du problème posé : proposition 16

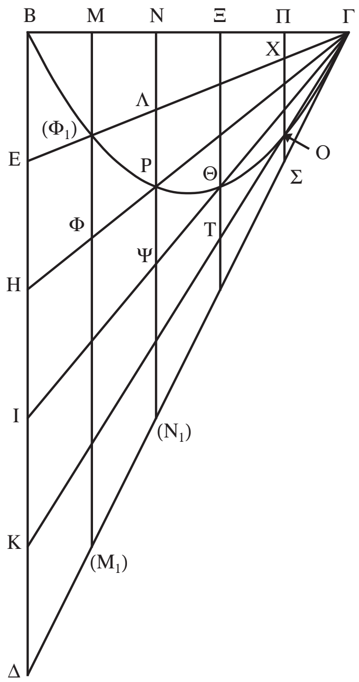


FIG. 7

Dans la proposition 16, Archimède établit alors très classiquement, par la méthode apagogique, que segment (BΓΘ) = 1/3 triangle (BΓΔ). Pour cela, soit Z une aire égale au tiers du triangle (BΓΔ).

• **Si segment (BΘΓ) > Z**, soit *n* un entier tel que

(segment (BΘΓ) – Z) × *n* > triangle (BΓΔ)[40].

Il est possible de choisir un triangle BΓE, rectangle en B, plus petit que la différence segment (BΘΓ) – Z, et qui soit contenu un nombre entier *k* de fois[41] dans le triangle BΔΓ. Alors BE sera, lui, contenu *k* fois dans BΔ. Divisons alors BΔ en *k* segments égaux à BE, par exemple BE, EH, HI, IK et KΔ[42]. Par construction, segment (BΘΓ) – Z > triangle (BΓE), donc triangle (BΓE) + Z < segment (BΘΓ). Or, [ME] + [ΦΛ] + [ΘP] + [ΘO] + triangle (ΓOΣ) = triangle (BΓE), car [MΛ] = [ΦΛ] (E étant le milieu de BH, ces trapèzes ont des bases égales et même hauteur) ; de même, [ΛΞ] = [ΘP], [XΞ] = [OΘ] et triangle (ΓOΣ) = triangle (ΓXΠ).

---

39 Ce résultat a été établi explicitement dans la proposition 12 de *La Quadrature de la parabole*. On peut cependant en donner une justification moderne. Comme $\frac{[Z\Sigma]}{[Z\Phi]} = \frac{AB}{BE}$ et $\frac{[Z\Sigma]}{[\Lambda Z]} = \frac{AB}{BZ}$, il vient BE × [ZΣ] = AB × [ZΦ] et BZ × [ZΣ] = AB × [ΛZ]. Or, X équilibre [ZΣ] ; il existe donc L entre E et Z tel que BL × [ZΣ] = AB × X. Comme BE < BL < BZ, on a BE × [ZΣ] < BL × [ZΣ] < BZ × [ZΣ]. Donc AB × [ZΦ] < AB × X < AB × [ΛZ], d'où le résultat par simplification par AB.

40 La proposition X-1 des Éléments d'Euclide établit : « Deux grandeurs inégales étant proposées, si l'on retranche de la plus grande une partie plus grande que sa moitié, si l'on retranche du reste une partie plus grande que sa moitié, et si l'on fait toujours la même chose, il restera une certaine grandeur qui sera plus petite que la plus petite des grandeurs proposées » (EUCLIDE, p. 258). En fin de démonstration, il est d'ailleurs précisé : « La démonstration serait la même, si les parties retranchées étaient des moitiés. » Explicitons cela en langage moderne, si *a* et *b* sont ces grandeurs avec *a* > *b*,

D'où Z < segment (ΒΘΓ) − [ΜΕ] − [ΦΛ] − [ΘΡ] − [ΟΘ] − triangle (ΓΟΣ). *A fortiori*, Z < [ΜΛ] + [ΞΡ] + [ΘΠ] + triangle (ΠΟΓ), d'où, par définition de Z,

$$\text{triangle}\,(\mathrm{B\Gamma\Delta}) < 3 \times ([\mathrm{M\Lambda}] + [\Xi\mathrm{P}] + [\Theta\Pi] + \text{triangle}\,(\Pi\mathrm{O}\Gamma)).$$

Or, comme BM = MN = NΞ = ΞΠ = ΠΓ, il découle de la proposition 14 que

$$3 \times ([\mathrm{M\Lambda}] + [\Xi\mathrm{P}] + [\Theta\Pi] + \text{triangle}\,(\Pi\mathrm{O}\Gamma)\,) < \text{triangle}\,(\mathrm{B\Gamma\Delta}),$$

c'est-à-dire une contradiction.

• **Si segment (**ΒΘΓ**) < Z**, de la même façon, il est possible de trouver un triangle ΒΓΕ, tenant un nombre entier de fois, *k* par exemple, dans le triangle ΒΓΔ et tel que triangle (ΒΓΕ) < Z − segment (ΒΘΓ) (< triangle (ΒΓΔ)). On refait les constructions déjà faites dans la première partie de cette démonstration, d'où il vient triangle (ΒΓΕ) + segment (ΒΘΓ) < Z = 1/3 triangle (ΒΔΓ) < [ΕΜ] + [ΦΝ] + [ΨΞ] + [ΠΤ] + triangle (ΓΠΣ)[43]. Ainsi,

$$\text{triangle}\,(\mathrm{B\Gamma E}) < [\mathrm{EM}] + [\Phi\mathrm{N}] + [\Psi\Xi] + [\Pi\mathrm{T}] + \text{triangle}\,(\Gamma\Pi\Sigma) - \text{segment}\,(\mathrm{B}\Theta\Gamma)$$
$$< [\mathrm{EM}] + [\Phi\Lambda] + [\mathrm{P}\Theta] + [\mathrm{O}\Theta] + \text{triangle}\,(\Gamma\mathrm{O}\Sigma) = \text{triangle}\,(\mathrm{B\Gamma E}),$$

d'où une contradiction.

Nous constatons que la méthode des pesées a été employée là pour établir une double inégalité qui sert ensuite à faire aboutir la méthode d'exhaustion.

La Méthode d'Archimède : différentes utilisations de l'idée de pesée

Les tableaux ci-dessous répertorient les propositions établies et, pour chacune d'elles, mentionnent leur parution dans les traités d'Archimède que nous connaissons ainsi que les principales idées utilisées pour les démontrer. Ils mettent clairement en évidence qu'il y a des traités d'Archimède qui ne nous sont pas (encore) parvenus.

---

dans le cas où de *a*, puis de chaque reste, on retranche sa moitié. Les restes successifs seront $a/2, a/2^2, a/2^3, \ldots, a/2^q, \ldots$ Il existera donc un entier q tel que $a/2^q < b$. En appliquant ceci à a = triangle (ΒΓΔ) et b = segment (ΒΘΓ) − Z, il suffit de choisir $n = 2^q$ pour réaliser l'inégalité souhaitée.

41 Voir note précédente : $k = n = 2^q$ convient.

42 Le lecteur qui se référera aux textes des Belles Lettres remarquera que la figure 7 ci-dessus et la figure donnée p. 183 de *La Quadrature de la parabole*, ne sont pas les mêmes. Dans cette dernière, c'est ΒΓ qui est divisé en segments égaux, pas ΒΔ, alors que la suite de la démonstration utilise l'équidécoupage de ΒΔ… et aussi celui de ΒΓ. C'est que les deux sont vrais et équivalents. En effet, d'après la proposition 5 de *La Quadrature de la parabole*, $\frac{\mathrm{BM}}{\mathrm{B\Gamma}} = \frac{\mathrm{M\Phi_1}}{\mathrm{MM_1}}$; or, $\frac{\mathrm{M\Phi_1}}{\mathrm{MM_1}} = \frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{B\Delta}}$ et, de même, $\frac{\mathrm{BN}}{\mathrm{B\Gamma}} = \frac{\mathrm{NP}}{\mathrm{NN_1}} = \frac{\mathrm{BH}}{\mathrm{B\Delta}} = 2\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{B\Delta}}$, donc BN = 2BM. Remarquons qu'on obtient ainsi une technique de construction point par point d'une parabole.

43 Par application directe de la proposition 14.

Mise à part la proposition 1 qui concerne une figure plane et que nous avons déjà étudiée, les autres s'appliquent à des figures de révolution définies à partir de coniques[44]. Un des grands principes est d'établir sur une figure plane contenant l'axe de révolution AΓ une relation du type

$$\frac{A\Theta}{A\Sigma} = \frac{\text{somme de carrés de segments}}{\text{somme de carrés de segments}},$$

où AΘ = AΓ et où les segments dont on prend le carré s'appuient orthogonalement sur AΓ, ceux figurant au numérateur coupant AΓ en Σ. Par exemple :

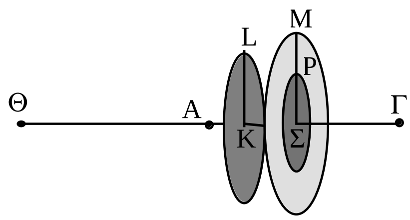


FIG. 8

Les segments orthogonaux à AΓ sont ici KL, ΣP et ΣM. Ils vérifient

$$\frac{A\Theta}{A\Sigma} = \frac{\Sigma P^2 + \Sigma M^2}{KL^2}.$$

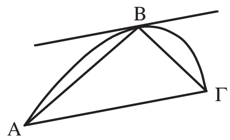
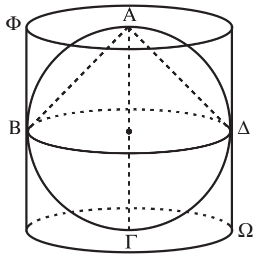
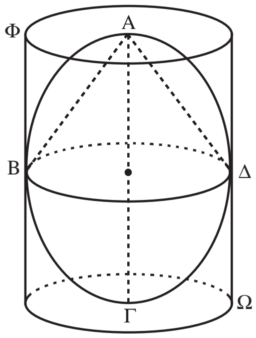
Par rotation autour de AΓ, ces segments engendrent des disques (Archimède dit « des cercles ») ; l'aire d'un disque étant proportionnelle au carré de son rayon, on peut ensuite en déduire l'équilibre, autour de A, de disques déplacés en Θ (ceux dont le rayon figure au dénominateur), et de disques qui restent centrés en Σ (ceux dont le rayon est au numérateur). Dans l'exemple de la figure ci-dessus, nous pourrons donc dire que le disque de diamètre KL, déplacé en Θ, équilibre autour de A les disques de diamètres ΣP et ΣM restant en place.

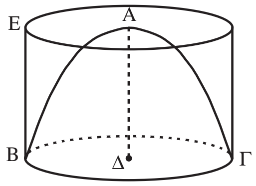
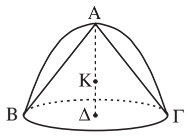
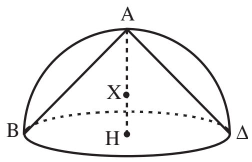
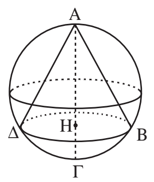
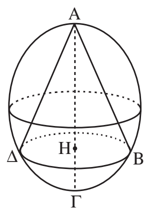
Les solides considérés dans les différentes propositions étudiées étant « remplis par les cercles » ainsi pris, Archimède en déduit des équilibres de solides autour de A ; d'où les résultats par application de lemmes et de propriétés établis antérieurement.

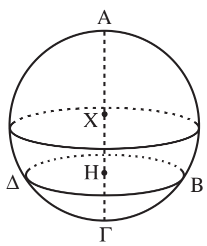
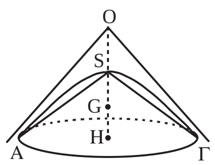
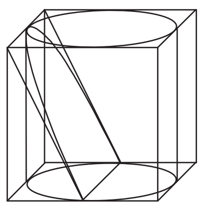
L'examen des méthodes d'investigation montre que, souvent, un problème à deux inconnues – volume et centre de gravité – se ramène, par déplacement de la bonne figure en Θ, extrémité d'un bras de levier, à un problème à une seule inconnue. Mais il y a parfois plus d'inconnues et le problème se complique. Les propositions 6 et 12-13 sont particulièrement intéressantes pour voir comment

[44] La réunion de deux droites parallèles ou sécantes étant un cas de dégénérescence de coniques, on peut donc inclure sous ce vocabulaire toutes les situations étudiées.

Archimède gère alors la difficulté. Dans la proposition 6, l'introduction de masses fictives réunies, équilibrant respectivement l'hémisphère et le cône restant en place, ramène le problème à la résolution d'un problème linéaire à une seule inconnue AX, X étant le centre de gravité de l'hémisphère ; dans les propositions 12 et 13, un astucieux changement de poids permet de se tirer d'affaire.

Nº	Résultat établi	Parution antérieure	Méthode et idées principales
1	**Quadrature de la parabole**  segment ABΓ = 4/3 triangle ABΓ	*La quadrature de la parabole*	• Méthode des pesées fictives segment à segment.
2	**Volume de la sphère**  sphère = 4 cône ABΔ cylindre ΦΩ = 3/2 sphère	*De la sphère et du cylindre* Prop. I. 34 Corollaire Prop. I. 34	• Pesées fictives de disques dans trois surfaces de révolution d'axe AΓ. • On connaît tous les centres de gravité ; on peut comparer les volumes.
3	**Volume de l'ellipsoïde de révolution**  cylindre ΦΩ = 3/2 ellipsoïde 1/2 ellipsoïde = 2 cône ABΔ	*Sur les conoïdes et les sphéroïdes* Prop. 27	• Comme dans la proposition 2.

4	**Volume d'un segment de paraboloïde de révolution**  segment ABΓ = 3/2 cône ABΓ	*Sur les conoïdes et les sphéroïdes* Prop. 21 (cas de révolution) Prop. 22 (cas général)	• AΘ = AΔ. • Pesées fictives de disques • On en déduit l'équilibre autour de A du cylindre EΓ et du paraboloïde (dont on ne connaît ni le volume, ni le centre de gravité) déplacé en Θ. • On supprime ainsi une inconnue : le centre de gravité du paraboloïde.
5	**Centre de gravité d'un segment de paraboloïde de révolution**  K, tel que KA = 2 KΔ		• AΘ = AΔ. • Le cône inscrit déplacé en Θ équilibre par rapport à A le paraboloïde restant en place. • Tout est connu sauf le centre de gravité du paraboloïde.
6	**Centre de gravité d'un hémisphère**  X, tel que $\frac{AX}{XH} = \frac{5}{3}$		• AΘ = AH. • Le cône ABΔ déplacé en Θ équilibre par rapport à A l'hémisphère et le cône restant en place. • Introduction de masses fictives réunies équilibrant l'hémisphère et le cône restant en place. • On se ramène à la résolution d'un problème linéaire à une seule inconnue : AX.
7	**Volume segment de sphère / volume cône**  $\frac{\text{segment AB}\Delta}{\text{cône AB}\Delta} = \frac{\frac{1}{2}A\Gamma + H\Gamma}{H\Gamma}$	*De la sphère et du cylindre* Prop. II.2	• AΘ = AΓ. • Un cylindre connu restant en place équilibre autour de A le segment et un cône connu déplacés en Θ. • De deux inconnues, volume et centre de gravité du segment, on se ramène à une seule, le volume du segment en le déplaçant en Θ.
8	**Volume segment ellipsoïde / volume cône**  $\frac{\text{segment AB}\Delta}{\text{cône AB}\Delta} = \frac{\frac{1}{2}A\Gamma + H\Gamma}{H\Gamma}$	*Sur les conoïdes et les sphéroïdes* Prop. 29 et 31 Prop. 30 et 32 montrent que le résultat reste vrai lorsque les axes sont inclinés.	• Démonstration non faite : « De la même manière... »

9	**Centre de gravité d'un segment de sphère**  X, tel que $\frac{AX}{XH}=\frac{AH+4H\Gamma}{AH+2H\Gamma}$		• $A\Theta = A\Gamma$. • On équilibre autour de A le cône ABΔ déplacé en Θ par le segment et le même cône restant en place. • On a donc une équation linéaire du 1er degré à une inconnue : le centre de gravité du segment.
10	**Même chose pour un segment d'ellipsoïde**		• Démonstration non faite.
11	**Volume hyperboloïde de révolution / volume cône**  $\frac{\text{segment AS}\Gamma}{\text{cône AS}\Gamma}=\frac{SH+3OS}{SH+2OS}$ **Centre de gravité d'un segment d'hyperboloïde** G, tel que $\frac{SG}{GH}=\frac{3SH+8OS}{SH+4OS}$	*Sur les conoïdes et les sphéroïdes* Prop. 25	• Démonstration non faite.
12 13 14 15	**Démonstration du théorème 1 : volume de l'onglet cylindrique**  onglet = 1/6 cube		• Méthode de pesées fictives. • Dans 12 et 13, un astucieux changement de poids permet de remplacer une équation à deux inconnues par une équation à une seule inconnue. • Méthode des indivisibles (sans pesées). • Dans 12-13-14, Archimède « fait voir » ; dans 15, il démontre « par la géométrie ».

Les blancs de la troisième colonne montrent qu'il y a bien des traités d'Archimède qui ne nous sont pas parvenus. En effet, s'il n'avait pas, ailleurs, établi ces résultats par une méthode *convaincante*, en tous cas irréfutable à ses yeux, il n'aurait sans doute pas manqué de le signaler ici ; car Archimède, ne l'oublions pas, n'est pas homme à « avoir proféré de vaines paroles »[45].

[45] ARCHIMÈDE, t. III, p. 84.

Conclusion

Nous avons là une pensée qui paraît étrangement moderne et une magnifique illustration de la variété du génie archimédien. Soulignons la double innovation, qui est aussi une double rupture avec la façon de penser de ses contemporains (ce qui explique peut-être en partie la rédaction tardive de *La Méthode*) :

• oser dire qu'une surface peut être considérée comme une totalité de lignes qui la composent, ce qui interroge sur la nature du continu ;

• appliquer à un domaine qui appartient au monde des idées – la géométrie – une méthode concrète, issue de l'expérimentation mécanique.

BIBLIOGRAPHIE

ARCHIMÈDE, t. II, *La Quadrature de la parabole*, t. III, *La Méthode*, texte établi par C. Mugler, Les Belles Lettres, coll. G. Budé, Paris, 1971.

Archimède, *Les Cahiers de Science & Vie*, coll. Les Pères Fondateurs de la Science, hors série n° 18 (1993).

CAJORI (F.), *A History of Mathematical Notations*, The Open Court Publishing Company, La Salle (Illinois), 1928-29 ; rééd. Dover, New York, 1993.

CARREGA (J.-C.), *Théorie des corps. La règle et le compas*, Herman, coll. Formation des enseignants et formation continue, Paris, 1981.

COLLETTE (J.-P.), *Histoire des Mathématiques*, t. I, Vuibert, Paris et Éd. du Renouveau Pédagogique, Ottawa, 1973.

EUCLIDE, *Les Œuvres d'Euclide*, trad. de F. Peyrard, Blanchard, Paris, 1993.

GANDT (F. de), *L'œuvre de Torricelli, science galiléenne et Nouvelle Géométrie*, Publication de la Faculté des Lettres et Sciences Humaines de Nice, 1989.

GROUPE M.:A.T.H., d'après un travail de Marie-Françoise JOZEAU, De la méthode par exhaustion, *Mnémosyne*, n° 1, (avril 1992).

GROUPE M.:A.T.H., rubrique Bonnes vieilles pages, *Mnémosyne*, n° 3 (avril 1993).

Le GOFF (J.-P.), De la méthode dite d'exhaustion : Grégoire de Saint-Vincent (1584-1667), in *La démonstration mathématique dans l'histoire*, Actes du 7e colloque inter-IREM Épistémologie et histoire des mathématiques (12-13 mai 1989), IREM de Besançon et IREM de Lyon, 1989, p. 196-220.

MARROU (H.-I.), *Histoire de l'éducation dans l'Antiquité, I. Le monde grec*, coll. Points-Histoire H56, Seuil, Paris, 1948.

PLUTARQUE, t. IV, *Vies*, Pelopidas-Marcellus, texte établi et traduit par Robert Flacelière et Émile Chambry, Les Belles Lettres, Paris, 1966.

ANNEXE

Extrait de ARCHIMÈDE, *La Méthode*, texte établi par C. Mugler, Les Belles Lettres, collection G. Budé, Paris, 1971.

Archimède à Ératosthène, prospérité !

Je t'ai envoyé antérieurement certains théorèmes que j'avais découverts, en me bornant à en rédiger les énoncés et en t'invitant à trouver les démonstrations que je n'avais pas encore indiquées ; les énoncés des théorèmes envoyés étaient les suivants ; premièrement : si on inscrit dans un prisme droit, ayant pour base un parallélogramme[1], un cylindre ayant ses bases situées dans les parallélogrammes[1] opposés et (sc. certaines de) ses génératrices dans les plans restants du prisme[2], et si on mène un plan par le centre du cercle de base du cylindre et par un des côtés du carré situé dans le plan opposé, le plan ainsi mené découpera du cylindre un segment compris entre deux plans et la surface du cylindre, l'un des plans étant le plan mené, l'autre celui qui contient la base du cylindre, et la surface (sc. cylindrique) étant comprise entre les plans indiqués, et le segment découpé du cylindre est équivalent à la sixième partie du prisme entier. L'énoncé du second théorème était le suivant : si on inscrit dans un cube un cylindre ayant ses bases situées dans des parallélogrammes[1] opposés, et sa surface tangente aux quatre plans restants, et si on inscrit dans le même cube un autre cylindre, ayant ses bases dans deux autres parallélogrammes et sa surface tangente aux quatre plans restants, la figure comprise entre les surfaces des cylindres et située à l'intérieur des deux cylindres est équivalente aux deux tiers du cube entier. Mais ces théorèmes diffèrent de ceux qui ont été trouvés antérieurement ; car dans ceux-là nous avons comparé les volumes de figures, comme les paraboloïdes, les hyperboloïdes et les ellipsoïdes de révolution, et les segments de ces figures, à des volumes de cônes et de cylindres, mais aucune de ces figures n'a été trouvée équivalente à une figure solide limitée par des plans, alors que chacune de ces figures, comprises entre deux plans et des surfaces cylindriques, est trouvée équivalente à une figure solide limitée par des plans.

Ce sont donc les démonstrations de ces théorèmes que je t'envoie, rédigées dans ce livre.

M'apercevant, comme je l'ai déjà dit, que tu es studieux, que tu domines d'une manière remarquable les questions de philosophie et que tu sais apprécier à sa valeur l'enquête mathématique sur des problèmes nouveaux qui se présentent, j'ai jugé à propos de te décrire, et de développer dans ce même livre, les propriétés caractéristiques d'une méthode qui te permettra d'aborder certaines propositions mathématiques par le biais de la mécanique. Mais je suis persuadé que cet outillage peut servir même pour la démonstration des théorèmes ; certaines propriétés, en effet, qui m'étaient d'abord apparues comme évidentes par la mécanique, ont été démontrées plus tard par la géométrie, parce qu'une étude faite par cette méthode n'est pas susceptible de démonstrations ; car il est plus aisé d'édifier la démonstration après avoir acquis préalablement quelque connaissance des objets de la recherche au moyen

[1] Le contexte montre qu'il s'agit d'un carré.
[2] Le cylindre est donc tangent aux quatre faces du prisme.

de cette méthode que de chercher sans la moindre connaissance. Pour cette raison, de ces propositions sur le cône et la pyramide, dont Eudoxe fut le premier à trouver la démonstration, en particulier des théorèmes affirmant que le cône est la troisième partie du cylindre, et la pyramide la troisième partie du prisme, qui ont même base et même hauteur, on doit attribuer une part notable à Démocrite, qui le premier a formulé l'énoncé au sujet de la figure indiquée sans en donner une démonstration. Or il m'arrive que, aussi pour les propositions que je vais exposer maintenant, la découverte m'est venue de la même manière que pour les propositions précédentes ; aussi ai-je voulu rédiger et publier cette méthode, à la fois parce que j'en ai parlé antérieurement[3] et que j'ai voulu éviter de paraître à certains avoir proféré de vaines paroles, et parce que je suis convaincu d'apporter une contribution très utile à la recherche mathématique. Je suis persuadé, en effet, que des chercheurs, soit de notre époque, soit de l'avenir, trouveront, par l'application de la méthode que j'aurai fait connaître, encore d'autres propositions qui ne me sont pas encore venues à l'esprit.

Je rédige donc en premier lieu la proposition qui fut aussi la première à m'être révélée par la mécanique, à savoir que tout segment de parabole est équivalent aux quatre tiers du triangle ayant même base et même hauteur, ensuite une à une les propositions qui ont été examinées de la même manière. La fin du livre sera consacrée aux démonstrations géométriques des théorèmes dont je t'avais envoyé les énoncés antérieurement.

[3] Cf. *Quadr. Parab.*, fin de la lettre à Dosithée.