DÉMONSTRATION GRECQUE ET DÉMONSTRATION CHINOISE : UNE OPPOSITION ENTRE LE DISCURSIF ET LE VISUEL[1]

Évelyne BARBIN

« Dire c'est bien, voir c'est mieux, toucher c'est parfait »
Proverbe chinois

Pour les enseignants qui, depuis leur plus jeune âge, sont « habitués » au discours démonstratif, les démonstrations chinoises ont la vertu de dépayser, de faire penser que « cela ne va pas de soi ». Ce qui est toujours tout bénéfice pour la façon d'aborder l'enseignement. La comparaison de démonstrations grecques et de démonstrations chinoises permet d'examiner plusieurs façons d'appréhender la démonstration, et de saisir la manière dont le mathématicien peut user du discours et du regard.

Dans les démonstrations géométriques, il s'agit de dire et de voir une figure. Ainsi, dans la démonstration géométrique chinoise « sans parole », le jeu des couleurs a pour fonction de suggérer un cheminement de pensée qui spécule sur le mouvement de la figure, alors que dans la démonstration géométrique grecque, le discours a pour fonction de décrire une figure immobile et de baliser le chemin de la « vérité dite ». Cette première comparaison cerne la pulsation du géomètre entre le mouvement et la fixité du discours et de la figure. C'est de ce point de vue que nous examinerons des démonstrations géométriques d'Euclide et de Liu Hui.

Avant d'examiner comment s'exprime le discours démonstratif, il faut se demander ce qui s'exprime dans ce discours, et donc cerner le travail du géomètre sur les figures. Nous poserons ensuite la question de savoir pourquoi ça s'exprime.

Le discours démonstratif : qu'est-ce qui s'exprime ?

Cette question vise à bien distinguer, d'une part, ce qui relève de la vue d'une figure, ce qui est sensation, ce qui est un simple événement, et d'autre part, ce qui relève de la vision ou du regard d'une figure, ce qui est perception, ce qui est un acte porteur d'une intention. Autrement dit, il s'agit d'opposer ici le sensible à l'entendement.

[1] Ce texte reprend en partie l'article « La démonstration : pulsation entre le visuel et le discursif » à paraître dans *Produire et lire des textes de démonstrations*, IRM, Université de Rennes.

Par exemple, considérons des figures de triangles (fig. 1). L'événement est constitué d'une multitude d'ob-jets, c'est-à-dire de choses jetées devant nos yeux. La sensation ou la vue de ces ob-jets n'impose aucun énoncé géométrique.

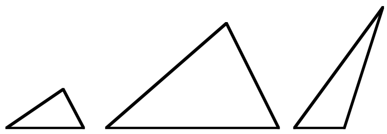


FIG. 1

Considérons ensuite trois figures d'un même triangle qui ont été disposées par un acte particulier (fig. 2). Cette fois, l'agencement attire notre regard vers la perception des trois angles du triangle, ce qui nous amène à concevoir que la somme géométrique de ces trois angles est un angle plat. Ceci parce que les trois triangles de cet agencement sont, à la fois, le même triangle, et des triangles différents, puisque leurs positions sur la feuille sont différentes. L'énoncé sur la somme des angles du triangle s'impose par une nécessité de l'entendement, alors que la multitude de triangles ob-jets ne nous imposait rien. Bien au contraire, la vue de triangles petits, gros, ventrus ou fins, inciterait plutôt à croire que la somme de leurs angles n'a aucune raison d'être invariante. Comme le remarque Wittgenstein, l'agencement fonctionne comme une preuve de ce qui peut me surprendre[2].

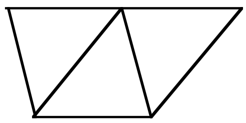


FIG. 2

L'énoncé sur la somme des angles ne concerne pas « ce » triangle posé devant nos yeux, mais « le » triangle, n'importe quel triangle. Merlau-Ponty, dans sa *Phénoménologie de la perception*, exprime bien comment la perception amène à la nécessité de l'énoncé par l'entendement en écrivant : « Il nous faut donc maintenant considérer l'entendement. Je pense le triangle et j'aperçois que ce sommet et ces lignes forment une somme d'angles égale à la somme des angles du triangle, et égale d'autre part à deux droits. Cela veut dire que ma construction graphique n'est pas un assemblage de lignes nées fortuitement de ma main. D'un bout à l'autre de l'opération, c'est du triangle qu'il s'agit. La genèse de la construction n'est pas seulement une genèse réelle, c'est une genèse intelligible [...]. J'ai conscience de démontrer parce que j'aperçois un lien nécessaire entre l'ensemble des données qui constituent l'hypothèse et la conclusion que j'en tire. C'est cette nécessité qui m'assure de pouvoir réitérer l'opération sur un nombre indéfini de figures empiriques, et elle vient

[2] WITTGENSTEIN, *Remarques sur les fondements des mathématiques*, p. 59.

elle-même de ce que, à chaque pas de ma démonstration et chaque fois que j'introduisais de nouveaux rapports, je demeurais conscient du triangle comme d'une structure stable qu'ils déterminent et n'effacent pas »[3].

La construction de la figure demande une mobilité du corps. Nous pouvons penser cette mobilité comme celles de trois copies du triangle qui viennent se coller en un agencement, et comme celle de notre main qui dispose les trois copies (fig. 3). Ce n'est ni la définition du triangle, figure délimitée par trois droites, ni l'appréhension du triangle comme figure idéale, qui conduisent à la construction : « La construction explicite les possibilités du triangle considéré, non pas selon sa définition et comme idée, mais selon sa configuration et comme pôle de mes mouvements »[4]. Ce n'est pas non plus la définition du triangle qui nécessite l'énoncé, mais une autre mobilité, celle du regard. La mobilité de l'œil permet de voir à la fois les trois angles comme ceux du triangle et comme ceux constituant un angle plat : « La démonstration consiste à faire entrer la somme d'angles construite dans deux constellations différentes, et à la voir tour à tour comme égale à la somme des angles d'un triangle et égale à deux droits [...] nous n'avons pas seulement deux configurations qui se succèdent et se changent l'une l'autre ; la première subsiste pour moi pendant que la seconde s'établit »[5]. Chaque angle est regardé deux fois, il est lui aussi à la fois le même et différent par le changement de sa position. On peut parler comme Wittgenstein d'une preuve synoptique, où « la causalité ne joue aucun rôle »[6].

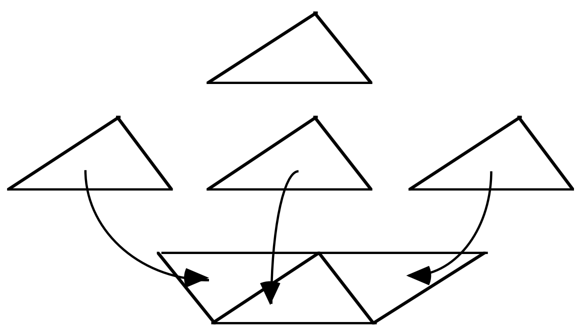


FIG. 3

Le passage de l'ob-jet triangle, en tant qu'affect de la vue, à l'objet triangle, en tant qu'affect de l'entendement s'effectue par une mobilité du corps, par des « copier-coller », et par une mobilité de l'œil, par des « même et change ». C'est à travers ce passage que l'entendement énonce la nécessité de l'énoncé géométrique : la somme des angles d'un triangle est égale à deux angles droits.

[3] MERLEAU-PONTY, *Phénoménologie de la perception*, p. 440.
[4] *Op. cit.*, p. 442.
[5] *Op. cit.*, p. 440.
[6] WITTGENSTEIN, *op. cit.*, p. 211.

Le discours démonstratif : comment ça s'exprime ?

Examinons comment s'exprime cette nécessité en lisant la démonstration de la proposition 32 du livre I des *Éléments* d'Euclide[7]. Rappelons que l'ouvrage d'Euclide est constitué en un système axiomatico-déductif : chaque livre commence par une suite de définitions et d'axiomes, puis chaque démonstration est déduite des axiomes et des propositions précédentes. Nous reviendrons plus loin sur le discours axiomatique et déductif du système euclidien, pour nous intéresser d'abord à la figure de la proposition 32 et au discours qui accompagne strictement la figure. La figure sur laquelle repose le discours est une figure immobile, et elle tronque une partie de la figure précédente (fig. 4). Ici ne subsistent que les éléments suffisants qui permettront de déduire le résultat. Il n'y a plus trois triangles, mais un triangle et deux droites, la première prolonge une droite qui limite le triangle, et la seconde est parallèle à une droite qui limite le triangle[8]. Alors que la figure composée d'emblée des trois triangles rendait l'énoncé nécessaire, ici les droites sont rajoutées et elles sont nécessaires au discours.

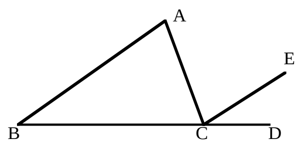


FIG. 4

Nous allons relever respectivement par les signes Ⓒ et Ⓞ les éléments du discours qui sont mis en place des mouvements du corps et de l'œil que nous avons mis en évidence plus haut.

Soit le triangle ABC, et qu'un des côtés BC, soit prolongé au-delà jusqu'en D.	Ⓒ
Je dis que l'angle extérieur, celui sous ACD, est égal aux deux angles	
intérieurs et opposés, ceux sous CAB, ABC, et que les trois angles intérieurs	
du triangles, ceux sous ABC, BCA, CAB, sont égaux à deux droits.	
En effet, que par le point C, soit menée CE parallèle à la droite AB (prop. 31).	Ⓒ
Puisque AB est parallèle à CE et que AC tombe sur elles, les angles alternes,	
ceux sous BAC, ACE sont égaux entre eux. Ensuite, puisque AB est parallèle	Ⓞ
à CE et que la droite BD tombe sur elles, l'angle extérieur, celui sous ECD, est	
égal à celui sous ABC, intérieur et opposé (prop. 29). Et il a aussi été démontré	Ⓞ
que celui sous ACE est égal à celui sous BAC. L'angle tout entier sous ACD est	Ⓞ
donc égal aux deux angles intérieurs et opposés, ceux sous BAC, ABC (n. c. 2).	
Que soit ajouté de part et d'autre celui sous ACB. Ceux sous ACD, ACB sont	Ⓞ
donc égaux aux trois sous ABC, BCA, CAB. Mais ceux sous ACD, ACB sont	Ⓞ
égaux à deux droits (prop. 13) ; donc ceux sous ABC, BCA, CAB sont aussi	Ⓞ
égaux à deux droits (n. c. 1).	

7 EUCLIDE, *Les éléments*, trad. Vitrac, p. 255-256.
8 Nous utilisons la terminologie euclidienne où une droite est toujours finie.

En ce qui concerne la mobilité du corps, notons que ce n'est pas « je » qui prolonge une droite et qui mène une parallèle, mais que les phrases au passif indiquent que ces droites ont été menées. En revanche, c'est « je » qui dis, qui prononce le discours. En ce qui concerne la mobilité de l'œil, le double regard sur les angles est indiqué par les conjonctions de coordination « aussi » et « mais ». Tandis que sont utilisées les conjonctions de subordination « donc » et « puisque » pour les égalités des angles intérieurs et extérieurs au triangle déduites de la proposition 29, et pour l'égalité des sommes des angles déduite d'un axiome, à savoir la notion commune 2. Ainsi, la mobilité de la figure, celle du corps et celle de l'œil sont remplacées par un déroulement, celui du discours de celui qui prononce. Nous allons nous intéresser au déroulement de ce discours, en le prenant à ses débuts, c'est-à-dire depuis l'énoncé des définitions des figures et des axiomes.

Déroulement du discours et discours de la mobilité

Les définitions des *Éléments* d'Euclide désignent des figures immobiles. Par exemple, la définition 15 énonce qu'un cercle est « une figure plane contenue par une ligne unique par rapport à laquelle toutes les droites menées à sa rencontre à partir d'un unique point sont égales entre elles »[9]. Les figures sont à la fois des formes et des grandeurs limitées par des lignes. Par exemple, la définition 19, à savoir « les triangles sont les figures planes contenues par trois droites »[10], désigne les triangles en tant qu'aires. Ces définitions n'ont pas nécessairement un rôle opératoire dans les démonstrations, par exemple celle de l'angle défini comme « l'inclinaison de deux lignes qui se touchent ». Elles servent essentiellement à désigner des ob-jets.

Les axiomes du livre I sont répartis en « demandes » et en « notions communes ». Les trois premières « demandes » réclament que soient toujours possibles des constructions de droite et de cercle. Notons que ces constructions à la règle et au compas correspondent à des manipulations d'instruments. De la sorte, les « demandes » disent, sous forme de discours, les mobilités qui président aux constructions des figures immobiles des définitions et des démonstrations. Elles permettent de construire une profusion de figures, de droites supplémentaires, qui sont nécessaires aux démonstrations.

La quatrième « demande » affirme l'égalité des angles droits. Ceux-ci ont été définis ainsi : « quand une droite, ayant été élevée sur une droite, fait les angles adjacents égaux entre eux, chacun de ces angles égaux est droit »[11]. Par exemple, dans la situation où une droite D est perpendiculaire à deux droites D_1 et D_2, cette « demande » affirme que les angles définis par D et par les deux autres sont égaux (fig. 5). La cinquième « demande » concerne le cas où, au contraire, les angles faits

[9] EUCLIDE, *op. cit.*, p. 162.
[10] *Op. cit.*, p. 163.
[11] *Op. cit.*, p. 160.

par la droite D et les droites D_1 et D_2 ne sont pas des angles droits (fig. 6). Elle affirme que les droites D_1 et D_2 se rencontreront. Ainsi, cette « demande » permet de juger de la rencontre de deux droites de manière locale, ou encore que l'œil puisse suppléer à la main.

dem. 1 : Qu'il soit demandé de mener une ligne droite de tout point à tout point.	ⓒ
dem. 2 : Et de prolonger continûment en ligne droite une ligne droite limitée.	ⓒ
dem. 3 : Et de décrire un cercle à partir de tout centre et au moyen de tout intervalle.	ⓒ
dem. 4 : Et que tous les angles droits sont égaux entre eux.	ⓞ
dem. 5 : Et que, si une droite tombant sur deux droites fait les angles intérieurs	
et du même côté plus petits que deux droits, les deux droites indéfiniment	ⓞ
prolongées, se rencontrent du côté où sont les angles plus petits que deux droits.	ⓒ

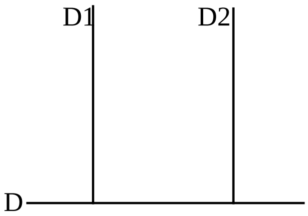


FIG. 5

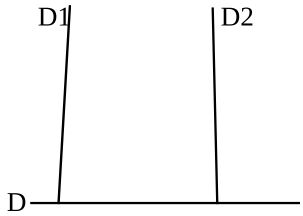


FIG. 6

Les « notions communes » concernent le « même et change », le mouvement de l'œil. La première « notion commune » énonce que « les choses égales à une même chose sont aussi égales entre elles ». Pour que cet énoncé ait une signification, il faut au moins trois choses, c'est-à-dire percevoir trois choses comme différentes, mais que deux d'entre elles soient perçues comme même, en ce sens qu'elles sont égales à une même troisième. Alors la « notion commune » affirme que ces deux choses différentes seront cependant égales.

Il y a là une réelle difficulté, car cela pose la question de savoir en quoi consiste l'égalité de deux choses différentes. La septième « notion commune » énonce que « les choses qui s'ajustent les unes et les autres sont égales entre elles ». Euclide en use très peu. Dans la démonstration de la proposition 4, ce que l'on appelle le premier cas d'égalité des triangles, elle lui sert à faire coïncider deux triangles l'un sur l'autre. L'égalité signifie dans ce cas que deux figures peuvent occuper l'une, puis l'autre, le même lieu, et donc un changement de lieu. C'est alors faire de la géométrie une physique, au sens aristotélicien du terme. Or, Platon écrit dans *La République* : « si la géométrie oblige à contempler l'essence alors elle nous convient ; si elle s'arrête au devenir alors, alors elle ne nous convient pas »[12]. Pour que les figures de la géométrie puissent être contemplées, il faut qu'elles soient immobiles. Nous

[12] Voir PLATON, *La République*, Livre VII, 526-527.

reviendrons sur cette volonté d'immobilité, qui est aussi une marque de l'impossibilité de la science grecque à tenir un discours sur le mouvement.

L'égalité peut signifier que deux choses occupent le même lieu. En effet, quand un géomètre grec écrit que deux figures sont égales, cela ne signifie pas qu'elles soient nécessairement superposables, mais cela peut signifier que leurs aires sont égales. Ainsi, Euclide énonce que deux triangles ayant la même base et situés entre les mêmes parallèles sont égaux. La difficulté devient alors de comprendre ce que signifie l'égalité de deux aires, c'est-à-dire de deux grandeurs. Ceci fait l'objet d'une définition du livre V d'Euclide, livre où est exposée la théorie eudoxienne des grandeurs. Mais parler du lieu d'une chose est bien plus difficile que de parler de la chose même. Ainsi, Proclus, commentateur d'Euclide du V^e^ siècle de notre ère rapporte qu'Apollonius avait pensé démontrer la notion commune d'Euclide par le raisonnement suivant : « Puisque A est égal à B, il occupe le même lieu que lui, et puisque B est égal à C, il occupe le même lieu que celui-ci. Et donc A occupe le même lieu que C, donc ils sont égaux ». Proclus proteste contre cette démonstration en écrivant qu'il « n'est absolument pas admissible de faire passer dans un lieu qui est plus incompréhensible pour nous que les choses situées en ce lieu ; car la découverte de la substance de ce lieu est difficile et douteuse »[13].

Dans les notions communes 2 et 3, il s'agit d'ajouter ou de retrancher des choses égales à des choses égales. « Ajouter » et « retrancher » n'ont ici aucune signification numérique, il faut comprendre ces opérations comme des constructions géométriques : ajouter une droite à une autre signifie prolonger la première par la seconde, ajouter deux figures rectilignes signifie les juxtaposer. Par exemple, dans le livre II, Euclide énonce que « si une ligne droite est coupée au hasard, les rectangles contenus par la droite entière et chacun des segments sont égaux au carré décrit sur la droite entière »[14]. Proclus ne mentionne pas la « notion commune » 5, « les doubles du même sont égaux », ni la suivante, « les moitiés du même sont égales entre elles ». Elles peuvent sembler inutiles ou redondantes, sauf si nous nous référons justement aux constructions qui les sous-tendent. En effet, la « notion commune » 5 affirmerait, par exemple, que si on prolonge une droite, d'un côté puis de l'autre, par une droite qui lui est égale, on obtient des droites égales.

Ainsi, dans les « notions communes », comme dans les « demandes », un discours de la mobilité exprime les constructions des figures. Alors que dans les démonstrations de propositions, les figures seront décrites de manière passive et contemplées dans leur immobilité. Le discours de la mobilité est qualifié de ridicule et méprisable par Platon. Il écrit dans *La République* : « aucun de ceux qui savent un peu de géométrie ne nous contestera que la nature de cette science est directement opposée au langage qu'emploient ceux qui la pratiquent. [...] Ce langage, assurément

---

13 PROCLUS, *Les commentaires sur le premier livre d'Euclide*, p. 171-172.
14 EUCLIDE, *op. cit.*, p. 328.

est fort ridicule et misérable ; car c’est en hommes de pratiques, ayant en vue les applications, qu’ils parlent de carrer, de construire sur une ligne, d’ajouter, et qu’ils font sonner d’autres mots semblables, alors que cette science toute entière n’a d’autre objet que la connaissance »[15].

n. c. 1 : Les choses égales à une même chose sont aussi égales entre elles.	ⓞ
n. c. 2 : Et si, à des choses égales, des choses égales sont ajoutées, les touts sont	ⓞ
égaux.	ⓒ
n. c. 3 : Et si, à partir de choses égales, des choses égales sont retranchées, les	ⓞ
touts sont égaux.	ⓒ
n. c. 4 : Et si, à des choses inégales, des choses égales sont ajoutées, les touts	ⓞ
sont inégaux.	ⓒ
n. c. 5 : Et les doubles du même sont égaux.	ⓒ
n. c. 6 : Et les moitiés du même sont égales entre elles.	ⓒ
n. c. 7 : Et les choses qui s’ajustent les unes et les autres sont égales entre elles.	ⓒ
n. c. 8 : Et le tout est plus grand que la partie.	
n. c. 9 : Et deux droites ne contiennent pas une aire.	

Nous avons dit que le passage de l’ob-jet triangle de la vue à l’objet triangle de l’entendement s’effectue par une mobilité du corps et par une mobilité de l’œil. Dans le discours axiomatique le passage de l’ob-jet de la définition à ce qui va devenir l’objet immobile de la démonstration s’effectue par des axiomes où se disent des mobilités du corps, dans des constructions, et des mobilités de l’œil, dans des transports d’égalités.

Euclide : le discours de la nécessité

Les deux premières propositions du Livre I sont intéressantes à examiner pour lire le discours démonstratif d’Euclide. D’une part, parce qu’elles nous permettent de saisir comment les axiomes vont être opérationnels dans le discours. En effet, la première doit être déduite uniquement à partir des axiomes, et la seconde à partir de ces axiomes et de la proposition 1. D’autre part, parce que les deux premières propositions ne sont pas des théorèmes, mais des problèmes de construction. La distinction entre « problème » et « théorème » dans la géométrie grecque est explicitée par Pappus dans le Livre II de sa *Collection mathématique*. Dans un « problème », terme qu’Alain Bernard traduit de manière adéquate par « pro-jet », « on projette de faire quelque chose ou de le construire », alors que dans un « théorème », c’est-à-dire un « spectacle », « ayant sup-posé certaines choses on voit ce qui s’ensuit »[16].

---

[15] PLATON, idem.

[16] BERNARD, *Le triparti du temps*, p. 179, extrait de *Temps et mathématique*, thèse à l’Université de Strasbourg. Alain Bernard insiste sur la difficulté à traduire le terme grec *theorein*, qui désigne une vision d’une grande intensité, comme celle que l’on ressent au théâtre, d’où sa proposition de traduire le terme par celui de « spectacle ».

Cependant, dans les *Éléments* d'Euclide, les « pro-jets » de construction s'effacent derrière la mise en scène du discours.

La proposition 1 énonce « Sur une droite limitée donnée, construire un triangle équilatéral »[17].

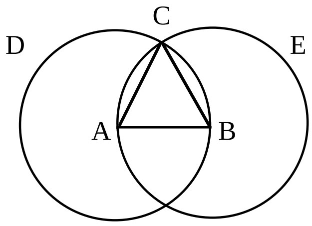


FIG. 7

Soit AB la droite limitée donnée. Il faut alors construire un triangle équilatéral	
sur la droite AB.	
Que du centre A et au moyen de l'intervalle AB soit décrit le cercle BCD	dem Ⓒ
(dem. 3), $\boxed{\text{et}}$ qu'ensuite du centre B, et au moyen de l'intervalle BA, soit décrit	$\boxed{\text{et}}$
le cercle ACE (dem. 3), $\boxed{\text{et}}$ que du point C auquel les cercles s'entrecoupent	dem Ⓒ
soient jointes les droites CA, CB jusqu'aux points A, B (dem. 1).	$\boxed{\text{et}}$
Et $\boxed{\text{puisque}}$ le point A est le centre du cercle CDB, AC est égale à AB (def. 15) ;	$\boxed{\text{puisque}}$
ensuite, $\boxed{\text{puisque}}$ le point B est le centre du cercle CAE, BC est égale à BA	$\boxed{\text{puisque}}$
(def. 15). Et il a été démontré que CA est égale à AB ; or les choses égales à une	nc Ⓞ
même chose sont aussi égales entre elles (n. c. 1) ; et $\boxed{\text{donc}}$ CA est égale à CB ;	$\boxed{\text{donc}}$
$\boxed{\text{donc}}$ les trois droites CA, AB, BC sont égales entre elles.	$\boxed{\text{donc}}$

Remarquons que les figures introduites sont désignées au parfait passif de l'impératif, autrement dit, le discours déductif va s'appuyer une figure déjà là. Bernard Vitrac remarque que, d'une manière générale dans le discours euclidien, les objets sont les sujets des verbes, « le mathématicien s'effaçant devant ce qu'il contemple »[18].

Nous avons de nouveau noté par les signesⒸ et Ⓞ les éléments du discours démonstratif qui correspondent à des mouvements du corps et de l'œil. Nous avons aussi noté les conjonctions qui rythment le déroulement du discours déductif. L'utilisation des demandes de constructions est ponctuée par des « et », tandis que celle des définitions et des notions communes l'est par des « puisque » et des « donc ». Le discours démonstratif est le règne du « donc ». Une fois les axiomes admis comme vrais, la vérité de ce qui s'en suit est prétendue inéluctable par le « donc ». La nécessité est marquée par le discours, on peut parler ici d'un discours de la nécessité.

---

[17] EUCLIDE, *op. cit.*, p. 194-195.
[18] Voir ses commentaires dans EUCLIDE, *op. cit.*, p. 195.

La proposition 2 énonce : « Placer, en un point donné, une droite égale à une droite donnée »[19].

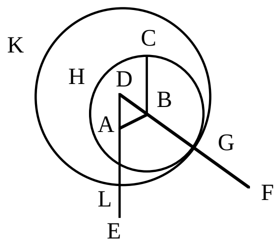


FIG. 8

Soit d'une part A le point donné, d'autre part BC, la droite donnée. Il faut alors	
placer au point A une droite égale à la droite donnée BC.	
En effet, que soit jointe la droite AB, du point A jusqu'au point B (dem. 1),	dem Ⓒ
et que sur elle, soit construit le triangle équilatéral DAB (prop. 1). Et que les	et
droites AE, BF soient les prolongements en ligne droite de DA, DB (dem. 2).	dem Ⓒ
Et que du centre B et au moyen de l'intervalle BC soit décrit le cercle CGH,	et
et qu'ensuite du centre D et au moyen de l'intervalle DG soit décrit le cercle	et
GKL (dem. 3).	dem Ⓒ
Or, puisque le point B est le centre du cercle CGH, BC est égale à BG ;	puisque
ensuite, puisque le point D est le centre du cercle GKL, DL est égale à DG	puisque
(def. 15), desquelles la partie DA est égale à la partie DB (def. 20) ; donc la	donc
partie restante AL est égale à la partie restante BG (n. c. 3). D'autre part il a été	nc Ⓞ
démontré que BC est aussi égale à BG ; donc chacune des droites AL, BC est	donc
égale à BG ; or les choses égales à une même chose sont égales entre elles	nc Ⓞ
(n. c. 1) ; et donc AL est égale à BC.	donc

L'énoncé de la proposition 2 montre que le discours de la nécessité a pris le pas sur la possibilité du mouvement. Il ne s'agit pas ici de transporter avec un compas l'écart BC au point A, car la demande 3 autorise de tracer un cercle seulement si son centre et un de ses points sont donnés. Il s'agit de pouvoir déduire par le discours la validité du mouvement d'un compas. Comme l'indique tout de suite la figure (fig. 8), la nécessité du discours fait fi de la simplicité. Cette figure serait même un peu plus complexe si elle incluait la construction du triangle équilatéral DAB qui est nécessaire à établir déductivement la vérité.

Les propositions 1 et 2 qui enjoignent par leur énoncé de « construire », ne laissent pourtant aucune place dans les discours des démonstrations à la résolution du problème de construction, du « pro-jet ». En fait, le discours prend pour hypothèse la figure déjà construite pour faire s'ensuivre la vérité de la figure.

[19] EUCLIDE, *op. cit.*, p. 197-199.

Dans le discours démonstratif, la nécessité de l'énoncé ne tient pas à une évidence en tant qu'affect de l'entendement. D'une certaine façon toute l'évidence de ce discours est concentrée dans l'énoncé des axiomes. Car comme l'écrit Aristote, dans les *Seconds analytiques*, les prémisses doivent être « vraies, premières et immédiates », mais « par démonstration » il ne faut entendre rien d'autre que l'énonciation du syllogisme[20].

Démonstrations grecque et chinoise : pourquoi ça s'exprime ?

Cette question se pose à la lecture de certaines démonstrations chinoises. Comparons la démonstration du « théorème de Pythagore » des *Éléments* d'Euclide et celle des *Neufs chapitres sur l'art du calcul* de Liu Hui, mathématicien chinois du IIIe siècle de notre ère[21].

La démonstration d'Euclide contemple une figure où ont été ajoutées les droites nécessaires au discours déductif, à savoir la perpendiculaire AL, et les droites FC, BK, AD et AE (fig. 9). Il faut démontrer que le carré BCDE est égal (en aire) à la somme des carrés ABFG et ACKH. Cette proposition est l'avant-dernière du livre I, et la démonstration est donc déduite d'un bon nombre de propositions qui précèdent, en particulier, des propositions qui énoncent que deux parallélogrammes de même base et situés entre les mêmes parallèles sont égaux (en aire), et qu'un triangle est égal (en aire) à un parallélogramme de même base et situé entre les mêmes parallèles. Elle est assez longue, car Euclide prend soin de démontrer l'alignement de AC avec le côté AG du carré construit sur AB. Elle utilise donc bon nombre de « puisque » et de « donc »[22].

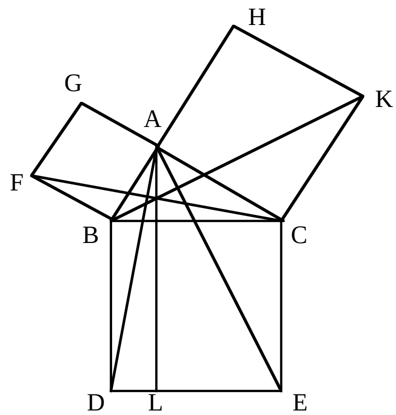
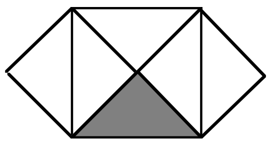


FIG. 9

[20] ARISTOTE, *Les seconds analytiques*, trad. Tricot, p. 8.
[21] Se reporter à MARTZLOFF, Quelques exemples de démonstrations en mathématiques chinoises, in *La démonstration mathématique dans l'histoire*, IREM de Besançon, 1990, p. 131-153.
[22] EUCLIDE, *op. cit.*, p. 283.

Schopenhauer, dans *Le monde comme volonté et comme représentation*, qualifie cette démonstration d'étrange et d'absurde. Il écrit : « Elle se donne une peine infinie pour détruire l'évidence, qui lui est propre, et qui d'ailleurs est plus à sa portée, pour lui substituer une évidence logique. [...] A nos yeux, la méthode d'Euclide n'est qu'une brillante absurdité. [...] La démonstration boiteuse et même captieuse d'Euclide nous abandonne au pourquoi, tandis que la simple figure, [...] nous fait entrer du premier coup, et bien plus profondément que la démonstration, au cœur même de la question ; elle nous amène à une plus intime conviction de la nécessité de cette proposition et de sa liaison avec l'essence même du rectangle »[23]. La « simple figure » est la suivante :



La nécessité que réclame Schopenhauer est celle que nous avons appelée plus haut la nécessité de l'entendement. Remarquons que sa figure s'obtient par « copier-coller » de quatre triangles rectangles isocèles qui peuvent être disposés de deux façons. Le jeu du « même et change » permet d'énoncer que le carré construit sur la diagonale du triangle est bien la somme des deux carrés construits sur les côtés de ce triangle (fig. 10).

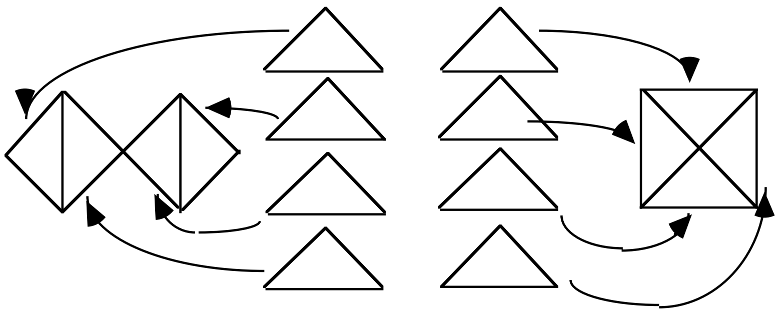


FIG. 10

Pour Schopenhauer, la démonstration euclidienne est absurde parce qu'elle s'appuie sur l'évidence logique au lieu de s'appuyer sur l'évidence géométrique, sur un discours et non sur la perception d'une figure. La démonstration est captieuse, elle « nous abandonne au pourquoi », parce que nous ne savons pas pourquoi il faut tracer toutes les lignes supplémentaires qui permettent de conclure, et parce qu'elle ne dit pas non plus pourquoi le géomètre a pensé cet énoncé vrai, ce qu'il fallait bien avant d'entamer une démonstration.

[23] SCHOPENHAUER, *Le monde comme volonté et comme représentation*, p. 106-110.

Il est intéressant de rapprocher la figure de Schopenhauer de celle du dialogue du *Ménon* de Platon, où Socrate demande à un esclave de construire un carré dont l'aire soit double de l'aire d'un carré donné[24]. Grâce au dialogue, Platon nous donne à lire une par une les différentes étapes de la construction (fig. 11) : il faut « adjoindre » un second carré au premier, puis un troisième, puis « combler l'espace que voici dans le coin », puis dessiner quatre diagonales des quatre carrés. La nécessité de la conclusion, le grand carré est double du premier, s'obtient par le « même et change » puisque chaque diagonale « a retranché une moitié à l'intérieur de chacun d'eux ».

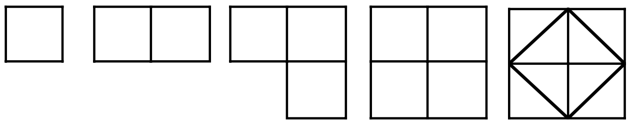


FIG. 11

Schopenhauer écrit qu'il serait facile de généraliser sa figure au cas où le triangle rectangle n'est pas isocèle. Cette affirmation peut venir du fait que si on s'interroge sur la provenance de l'énoncé, c'est-à-dire pourquoi il a pu être pensé comme vrai, il y a tout lieu d'imaginer qu'il a d'abord été une généralisation d'un énoncé manifeste pour le cas du triangle rectangle isocèle. Cette affirmation peut être corroborée par la démonstration de Liu Hui. Cette démonstration n'utilise pas de discours, et seulement quatre mots « bleu », « rouge », « sort » et « entre ». L'utilisation de couleurs pourrait même réduire cette liste à deux mots : « entre » et « sort » (fig. 12).

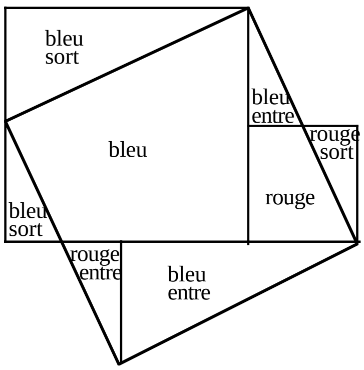


FIG. 12

Les mots « entre » et « sort » indiquent les mouvements de corps, et les mots « bleu » et « rouge » les mouvements de l'œil qui perçoit les figures qui sont les mêmes. La figure de Liu Hui s'obtient de celle de Platon-Schopenhauer par décalage des diagonales. Comme nous pouvons le voir en rétablissant une à une les étapes de

[24] PLATON, *op. cit.*, p. 534-535.

la construction qui part des deux carrés construits sur les côtés du triangle rectangle pour obtenir le carré construit sur la diagonale (fig. 13).

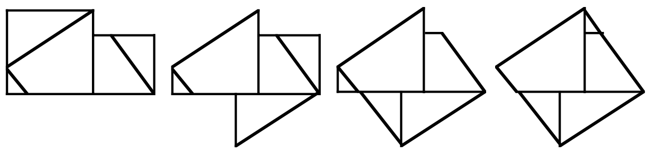
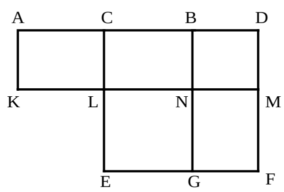


FIG. 13

La nécessité de l'énoncé n'est pas indiquée par le chemin du discours, mais le mouvement et les couleurs suggèrent un cheminement à l'entendement. Entre les démonstrations grecque et chinoise, il y a un renversement du fixe et du mobile. La première contemple une figure immobile et déroule son discours, la seconde repose sur la mobilité de la figure et offre un dire qui n'est pas mobilisé dans un discours.

Démonstrations par « copier-coller » et par « couper-coller »

Certains lecteurs du Livre II des *Éléments* d'Euclide ont parlé de démonstrations « par puzzle ». Cette dénomination est très scabreuse, parce que dans un puzzle, les pièces bougent, or les figures d'Euclide sont immobiles. Examinons la démonstration de la proposition VI du Livre II des *Éléments* d'Euclide[25].

> Qu'une certaine droite AB soit coupée en deux parties égales au point C, et qu'une certaine droite BD, lui soit ajoutée en alignement. Je dis que le rectangle contenu par AD, DB, pris avec le carré sur CB, est égal au carré sur CD.
>
> 
>
>
> En effet, que le carré CEFD soit décrit sur CD. Et que DE soit jointe ; et, d'une part que par le point B soit menée BG parallèle à l'une ou l'autre des droites des droites EC, DF ; et d'autre part, que par le point H, soit menée KM parallèle à l'une ou l'autre des droites AB, EF ; et que par le point A, soit encore menée AK parallèle à l'une ou l'autre des droites CL, DM.
>
> Or, puisque AC est égale à CB, AL est aussi égal à CH (I, 36). mais le [complément] CH est égal au [complément] HF (I, 43), et donc AL est égal à HF. Que CM soit ajouté de part et d'autre. AM tout entier est donc égal au gnomon NOP. Mais AM est le [rectangle contenu] par AD, DB car DM est égal à DB. Que LG – qui est égal au carré sur BC – soit ajouté de part et d'autre. Le rectangle contenu par AD, DB avec le carré sur CB, est donc égal au gnomon NOP avec LG. Mais le gnomon NOP et LG sont le carré CEFD – tout entier – qui est celui décrit sur CD. Donc le rectangle contenu par AD, DB pris avec le carré sur CB, est égal au carré sur CD.

25 EUCLIDE, *Les éléments*, p. 335-336.

Comparons le discours euclidien avec une démonstration « à la chinoise », qui serait effectivement un puzzle très simple (fig. 14). Le discours euclidien met le lecteur sous la contrainte de l'enchaînement déductif, alors que la démonstration chinoise repose sur l'évidence du regard sur une figure en mouvement.

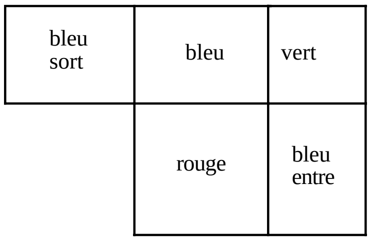


FIG. 14

Cette démonstration comme celle du « théorème de Pythagore » de Liu Hui repose sur le « couper-coller » d'une figure. Tandis que, l'une des trois démonstrations que Liu Hui donne pour la solution du problème 16 du chapitre 9 des *Neufs chapitres sur l'art du calcul* demande de « copier-coller » une figure.

L'énoncé du problème est : « Un angle droit a des côtés de huit pieds et de quinze pieds. Quel est le diamètre du cercle inscrit ? »[26]. La réponse est : « Calcule le Xian à partir du Gou et du Gu, puis ajoute les trois ensemble et divise par cette somme deux fois le produit du Gou et du Gu ». Gou et Gu sont, respectivement, le plus petit et le plus grand côté du triangle rectangle, tandis que Xian est l'hypoténuse. Autrement dit, le diamètre du cercle inscrit est égal à quatre fois l'aire du rectangle divisé par son périmètre.

La première démonstration consiste à coller quatre copies du triangle initial pour former un rectangle, puis à découper ce rectangle en pièces qui seront collées à nouveau pour former un nouveau rectangle. Une démonstration « sans parole » suit les instructions de Liu Hui sur la manière de découper le triangle initial en pièces triangulaires colorées en jaune, pourpre, et indigo. Ces couleurs permettent de voir comment les pièces sont transportées dans le puzzle. En l'absence de couleurs, notre lecteur pourra repérer les couleurs jaune, pourpre, et indigo par les lettres j, p, et i (fig. 15). Les deux rectangles ont mêmes aires, l'aire du premier est quatre fois l'aire du triangle initial et l'aire du second est le produit du diamètre du triangle inscrit par le périmètre du cercle. Par conséquent, le puzzle démontre bien le résultat annoncé.

26 Nous utilisons ici les indications et les traductions de Man-Keung-Siu, in MAN-KEUNG SIU, Proof and pedagogy in Ancient China : examples from Liu Hui's commentary on Jiu Zhang Suan Shu, in *Educational Studies*, 24, 1993, p. 349-351.

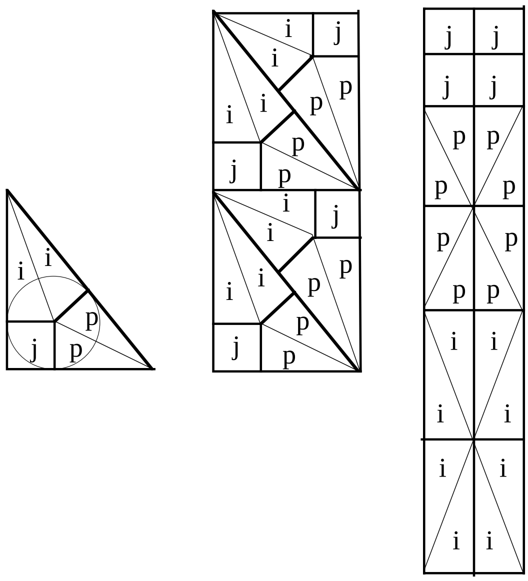


FIG. 15

Vision des aires et discours sur les droites

Il est intéressant d'examiner la seconde démonstration de Liu Hui pour ce même problème. Elle utilise la proportionnalité entre des droites, et cette fois, au lieu de copier la figure initiale, il faut la découper par une droite supplémentaire YX, qui est la parallèle à l'hypoténuse AB passant par le centre O du cercle inscrit (fig. 16).

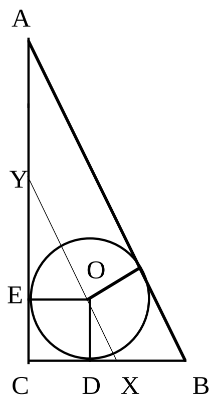


FIG. 16

En notant AB = a, AC = b, et AB = c et r le rayon du cercle inscrit, nous avons par similitude des triangles CAB et DOX :

$$a : b : c = DX : r : OX.$$

Par conséquent, en sachant que XB = OX (ce qui n'est pas démontré dans le commentaire de Liu Hui), nous avons :

$$b : (a + b + c) = r : (DX + r + OX) = r : (CX + OX) = r : (CX + XB) = r : a.$$

Donc :

$$r = \frac{ab}{a+b+c} \quad \text{et} \quad d = 2r = \frac{2ab}{a+b+c}.$$

Comparons ces deux démonstrations pour comprendre l'intérêt que présente leur juxtaposition. Comme l'écrit Wittgenstein, toute nouvelle preuve d'un résultat montre (ou crée) de nouvelles connexions[27]. La première preuve connecte des aires par sommation, car l'accolement de figures est un calcul de sommation d'aires[28], tandis que la seconde connecte des droites par des écritures de rapports. La première nous demande de voir les figures par leurs aires, la seconde par leurs pourtours. Leur présence simultanée joue sur deux visions différentes des figures géométriques. Mais, donner ces deux démonstrations signifie aussi donner différentes stratégies de preuve. La première preuve procède par « copier-coller » puis par « couper-coller » de figures, tandis que la seconde procède par découpage de la figure initiale par une droite supplémentaire. La première est une alternative au tracé de lignes supplémentaires et à l'écriture de rapports entre droites, et la seconde est une alternative au procédé de « couper-coller » et « copier-coller ».

Dans les *Éléments* d'Euclide, les démonstrations procèdent par argumentation sur les aires ou sur les droites. Mais, s'il arrive qu'Euclide donne deux démonstrations d'un même résultat par les aires et par les droites, celles-ci peuvent être fort éloignées dans le discours démonstratif, ordre axiomatico-déductif oblige. Ainsi, un même résultat reçoit deux démonstrations différentes dans les livres II et VI des *Éléments* d'Euclide, sous deux énoncés différents. La proposition 14 du Livre II demande de « construire un carré égal à une figure rectiligne donnée ». Le problème est ramené, grâce aux propositions précédentes, à celui de construire un carré égal à un rectangle BEDC (fig. 17). Soient construits EF égal à ED sur le prolongement de BE, le cercle de diamètre BF, et la perpendiculaire EH à BF, Euclide démontre par le « théorème de Pythagore », donc par une argumentation sur les aires, que le carré de côté EH est égal au rectangle BEDC. La proposition 13 du livre VI demande de « trouver la moyenne proportionnelle de deux droites données » AB et BC (fig. 18). La démonstration passe par la similitude des triangles ABD et DBC, donc par une argumentation sur des rapports entre droites, qui elle-même nécessite le livre V des grandeurs.

---

[27] WITTGENSTEIN, *op. cit.*, p. 173.
[28] Ce calcul correspond à une pratique algorithmique des démonstrations chinoises, voir CHEMLA, Les limites d'un parallèle, in Salanskis et Sinaceur éd., *Le labyrinthe du continu*, Springer-Verlag, 1992, p. 31-45.

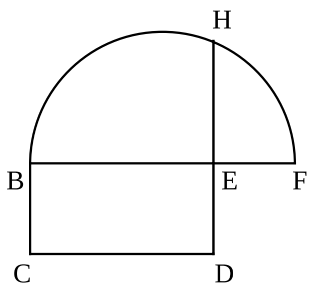


FIG. 17

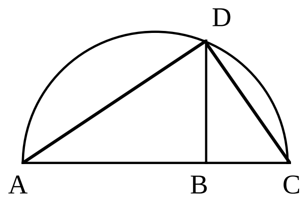


FIG. 18

Dans l'ouvrage euclidien, il y a un avant le livre V et un après, deux discours qui se suivent, sur les aires et sur les droites, mais qui ne se rejoignent pas, comme dans la juxtaposition des deux démonstrations de Liu Hui. Le livre V des grandeurs d'Euclide demande également de ne pas faire un mélange de genres, aires et grandeurs, car on ne peut mettre en raison (en rapport) que des choses homogènes, des aires avec des aires, des droites avec des droites. Le « logos », dans les deux acceptions du terme grec, comme discours et comme raison, sépare ainsi deux fois les argumentations sur les aires et sur les droites, faisant fi d'une vision simultanée de l'aire et du pourtour d'une figure.

La pulsation entre le discursif et le visuel

Liu Hui écrit que « si nous élucidons par prose et illustrons par des images, alors nous serons capables d'atteindre la concision aussi bien que la compréhension, la clarté aussi bien que la rigueur »[29]. Les deux démonstrations précédentes correspondraient ainsi à deux significations de la démonstration, celle « d'éclairer » et celle de « convaincre »[30], la première du côté de la vision de la figure et la seconde du côté du discours. Mais leur présence simultanée indique, chez Liu Hui, la volonté à la fois d'éclairer et de convaincre.

En effet, la phrase de Liu Hui prononce une alliance du discursif et du visuel. La démonstration mathématique nécessite que le discursif ne renonce pas au visuel, et que le visuel ne renonce pas au discours. René Guitart écrit : « voir ce que l'on dit, dire ce que l'on voit, c'est impossible intégralement ; entre voir ce que l'on pense et dire ce que l'on pense, il y a une dialectique non-résolutive qui reste toujours un procès ouvert qui ne se referme que sur lui-même, soit plus précisément ce que j'appelle une *pulsation*. C'est la vivacité de cette pulsation, son incessante traversée sue et insue par l'entendement, qui forme la trame qu'emprunte le penser mathématique »[31].

---

29 Cité par MAN-KEUNG SIU, *op. cit.*, p. 355-356.
30 Voir BARBIN, Démontrer : convaincre ou éclairer ? Signification de la démonstration mathématique au XVIIe siècle, in *Les procédures de preuve sous le regard de l'historien des sciences et des techniques*, Cahiers d'histoire et de philosophie des sciences, nº 40, 1992, p. 29-49.
31 GUITART, *La pulsation mathématique*, nº 57.

Le discours démonstratif est figé dans la matérialité de la page, mais l'écriture ou la lecture de ce texte s'effectue dans une pulsation incessante de la pensée entre le fixé du texte et la possibilité du bougé des figures. Les mouvements de l'œil qui regarde les figures ne sont pas dits dans le texte. Mais paradoxalement, l'intelligibilité du texte nécessite que ce qui n'est pas dit soit emprunté par la pensée.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

ARISTOTE, *Organon IV, Les seconds analytiques,* trad. Tricot, Vrin, Paris, 1987.

BARBIN, Démontrer : convaincre ou éclairer ? Signification de la démonstration mathématique au XVII^e siècle, in *Les procédures de preuve sous le regard de l'historien des sciences et des techniques*, Cahiers d'histoire et de philosophie des sciences, n^o 40, 1992, p. 29-49.

BARBIN, La démonstration : pulsation entre le visuel et le discursif, in *Produire et lire des textes de démonstrations*, IRM, Université de Rennes, à paraître.

BERNARD, Le triparti du temps, p. 179, in *Temps et mathématique*, thèse à l'Université de Strasbourg, 1996.

CHEMLA, Les limites d'un parallèle, in Salanskis et Sinaceur éd., *Le labyrinthe du continu*, Springer-Verlag, 1992, p. 31-45.

EUCLIDE, *Les éléments*, trad. Vitrac, PUF, Paris, 1990.

GUITART, *La pulsation mathématique*, ouvrage à paraître.

MAN-KEUNG SIU, Proof and pedagogy in Ancient China : examples from Liu Hui's commentary on Jiu Zhang Suan Shu, in *Educationnal Studies*, 24, 1993, p. 345-357.

MARTZLOFF, Quelques exemples de démonstrations en mathématiques chinoises, in *La démonstration mathématique dans l'histoire*, IREM de Besançon, 1990.

MERLEAU-PONTY, *Phénoménologie de la perception* (1945), rééd. Gallimard, Paris, 1968.

PLATON, *La République*, trad. Chambry, Les Belles Lettres, Paris, 1932.

PROCLUS, *Les commentaires sur le premier livre d'Euclide*, trad. Ver Eecke, Desclée de Brouwer, Bruges, 1948.

SCHOPENHAUER, *Le monde comme volonté et comme représentation*, trad. Burdeau, PUF, Paris, 1966.

WITTGENSTEIN, *Remarques sur les fondements des mathématiques*, trad. Lescourret, Gallimard, Paris, 1983.