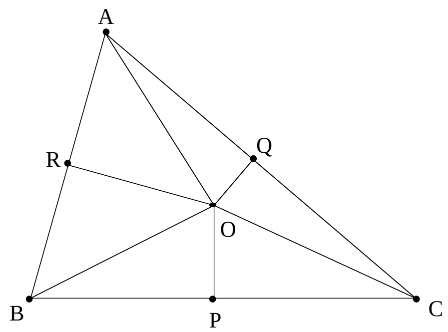
LE THÉORÈME D'ERDÖS-MORDELL
PAR LA MÉTHODE DES AIRES

Jean-Louis AYME

La conjecture[1] de Paul Erdös[2]

Hypothèses : un plan géométrique, un triangle ABC non dégénéré du plan, un point O situé à l'intérieur du triangle, les projetés orthogonaux P, Q et R de O respectivement sur les côtés [BC], [CA] et [AB].



Conjecture : $2(OP + OQ + OR) \leq OA + OB + OC$.

Un point d'histoire

C'est peut-être en travaillant sur une généralisation de la relation d'Euler[3] que Paul Erdös a eu l'idée de cette conjecture et que le mensuel de mathématique américaine de juin-juillet 1935 l'a proposée à ses lecteurs dans la rubrique des problèmes à résoudre sous le numéro 3740.

Presque deux années s'écoulèrent avant d'obtenir la première réponse. Curieusement, comme c'est souvent le cas dans le domaine de la découverte, deux mathé-

---

1 *American Mathematical Monthly*, juin-juillet 1935, problème 3740, p. 396.
2 Mathématicien hongrois.
3 Euler Léonhard, mathématicien suisse, 1707-1783 ; le carré de la distance des centres du cercle circonscrit et inscrit à un triangle est égal au carré du rayon du cercle circonscrit diminué du double produit des rayons de ces deux cercles.

maticiens, l'un britannique, Mordell de l'université de Manchester, l'autre américain, David Barrow de l'université de Géorgie, proposèrent chacun une solution dans le même mensuel[4] du mois d'avril 1937 ; si celle de Mordell[5] apparaissait comme une brève démonstration trigonométrique, celle de Barrow[6] se développait longuement autour de trois lemmes préliminaires avant de conclure ; ce dernier précisait au passage que l'inégalité se transformait en une égalité lorsque le triangle ABC est équilatéral et que le point O est le centre du triangle.

Dix ans plus tard, *i. e.* en 1945, le mathématicien russo-américain Donat Kazarinoff de l'université du Michigan proposait à son tour une nouvelle solution[7] basée sur l'idée de symétrie.

En 1953, l'allemand Toth réfléchissait sur les différentes solutions connues du théorème d'Erdös et suggérait, dans son livre[8], la recherche d'une preuve simple et élémentaire qui pourrait être obtenue par la méthode de la géométrie synthétique.

En 1957, Donat Kazarinoff[9], revisitant sa solution, l'améliorait tandis que son fils Nicolas Kazarinoff[10], professeur associé à l'université du Michigan et travaillant à cette période à l'institut Steklov de mathématique de l'académie des sciences à Moscou, la généralisait sous certaines conditions à un tétraèdre.

Un an plus tard, le professeur Léon Bankoff[11] de l'université de Los Angeles publiait la dernière solution du théorème d'Erdös.

Notons qu'à ce jour aucune généralisation[12] de ce théorème n'a été, à ma connaissance, trouvée dans le cadre d'un espace euclidien de dimension supérieure à 3.

---

4 *American Mathematical Monthly*, avril 1937, p. 252-254.

5 Il considère la loi des cosinus et la loi des sinus dans le triangle ARQ pour calculer QR, puis décompose le radicande en somme de deux carrés avant de la minorer, puis évalue le périmètre du triangle ABC et, enfin, minore cette somme en sachant qu'un réel strictement positif augmenté de son inverse est supérieure ou égale à deux.

6 Il commence par rappeler que si, d'un point situé hors d'une droite, on abaisse sur cette droite une perpendiculaire et diverses obliques, alors la « perpendiculaire est plus courte que toute oblique » ; il affirme ensuite que la conjecture d'Erdös sera démontrée si on la démontre en remplaçant chaque perpendiculaire par la *bissectrice* intérieure des trois *angles* ∠BOC, ∠COA et ∠AOB.

7 *Mathématiques, Cours de Seconde*, Delagrave, 1991, p. 113. Donat Kazarinoff commence par considérer la *bissectrice* intérieure de l'*angle* ∠A, puis le symétrique O' du point O par rapport à cette bissectrice, puis évalue les aires des triangles O'AB et O'AC qu'il majore d'abord et additionne ensuite pour trouver un minorant de OA ; de même, il trouve un minorant de OB et de OC, ajoute ces trois inégalités membre à membre et termine comme Mordell.

8 Toth, L. F., *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum*, Berlin, 1953, p. 12-28.

9 Kazarinoff, D. K., A simple proof of the Erdös-Mordell inequality for triangles, *Michigan Math. J.*, vol. 4, 1957, p. 97-98.

10 Kazarinoff, N. D., Kazarinoff, D. K., Kazarinoff's inequality for tetrahedra, *Michigan Math. J.*, vol. 4, 1957, p. 99-104 ; Kazarinoff, N. D., *Geometric inequalities*, The Mathematical Association of America, 1961, p.78-88.

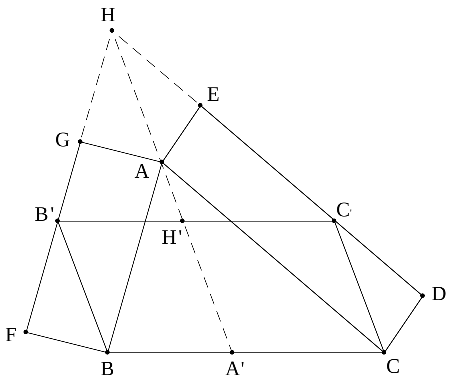
11 Bankoff, L., *American Mathematical Monthly*, volume 65, 1958, p. 521. Il considère les projetés orthogonaux Q' et R' des points Q et R sur la droite (BC), puis s'intéresse à des triangles semblables.

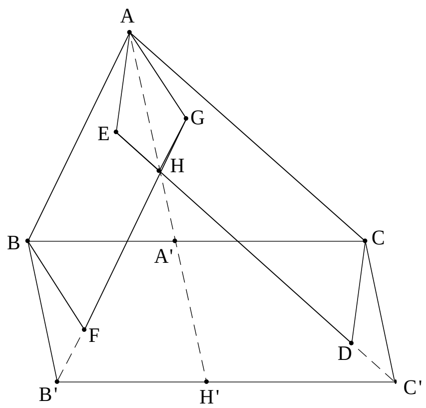
12 Eggleston, H. G., A triangle inequality, *Math. Gazette*, vol. 42, 1958, p. 54-55.

La seconde solution de Donat Kazarinoff

a) Le théorème de Pappus d’Alexandrie[13]

C’est un théorème général d’addition des parallélogrammes. L’énoncé en est le suivant : « si sur chacun des côtés d’un triangle quelconque, on construit à l’extérieur (resp. à l’intérieur) des parallélogrammes quelconques[14] et si l’on prolonge, dans chacun des parallélogrammes construits sur les côtés adjacents à un sommet, les côtés opposés jusqu’à leur point de rencontre ; si on relie ensuite le point de rencontre avec le sommet du triangle commun aux deux parallélogrammes et si, enfin, par les autres sommets du triangle, on mène deux parallèles à cette ligne de liaison, ces deux parallèles prolongées jusqu’à leur rencontre avec les côtés des deux parallélogrammes opposés aux côtés du triangle donnent deux points d’intersection tels que, si on les joint, on obtient un troisième parallélogramme, construit sur la base du triangle, qui est égal en aire à la somme des aires des deux premiers parallélogrammes ».





Démonstration dynamique[15] :

• aire (AGFB) = aire (AHB’B) = aire (BA’H’B’) ;

• aire (ACDE) = aire (ACC’H) = aire (A’CC’H’) ;

• aire (AGBF) + aire (ACDE) = aire (BA’H’B’) + aire (A’CC’H’) = aire (BCC’B’).

---

[13] Mathématicien grec du IVe siècle, auteur de la *Collection mathématique* qui forme un ensemble de huit livres. C’est dans le livre IV que l’on trouve ce théorème qui apparaît comme une généralisation du théorème de Pythagore. On suppose aujourd’hui que ce résultat était connu de Héron d’Alexandrie qui vécut au Ier siècle.

[14] Non dégénérés.

[15] Elle a été initiée par le mathématicien Nasir-ed-din at-Tusi (1201-1274), lors de sa traduction en arabe des *Éléments* d’Euclide, dans laquelle il présente une démonstration *dynamique* du théorème de Pythagore.

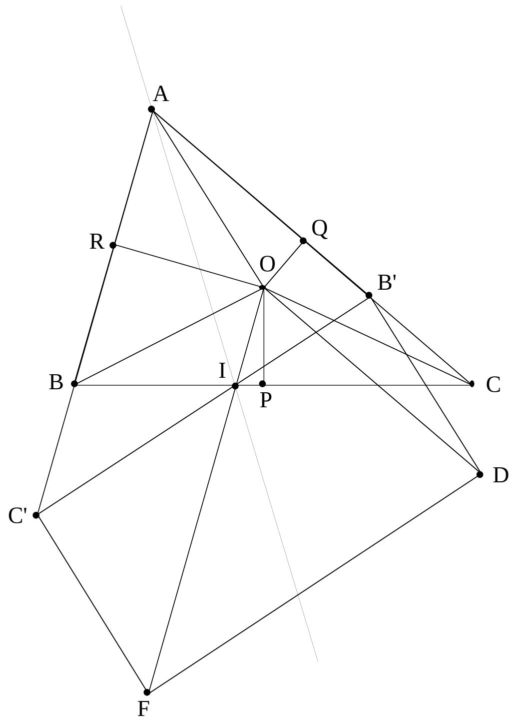
b) L'idée de Kazarinoff

Armé des instruments de Platon[16], Donat Kazarinoff commence par tracer, sur une feuille de papier, un triangle ABC, puis place un point O à l'intérieur[17] du triangle ; ensuite, il construit la bissectrice intérieure de l'angle ∠A, puis se *délie* de sa démonstration de 1945, en symétrisant orthogonalement, non plus le point O, mais le triangle ABC par rapport à cette bissectrice ; enfin, et c'est là l'instant magique, il se *lie* à Pappus...

c) Démonstration

Soit AB'C' l'image du triangle ABC par la symétrie orthogonale d'axe (AI). Construisons, sur les côtés [AB'] et [AC'] du triangle AB'C', les parallélogrammes AC'FO et AODB'. Le quadrilatère C'FDB' étant un parallélogramme, nous reconnaissons la situation de Pappus, *i. e.*

$$\text{aire (AC'FO)} + \text{aire (AODB')} = \text{aire (C'FDB')}.$$



[16] Philosophe grec du IVe siècle av. J.-C. ; il ne reconnaissait que la règle et le compas comme instruments en géométrie.
[17] Notons que, dans le cas particulier où le point O est situé sur l'un des côtés du triangle, la démonstration de D. Kazarinoff devra être adaptée.

Posons BC = a, CA = b et AB = c. L'égalité précédente conduit à l'inégalité suivante : b.OR + c.OQ ≤ a.OA, d'où :

$$\frac{b}{a}.\mathrm{OR}+\frac{c}{a}.\mathrm{OQ}\leq \mathrm{OA} \qquad (1).$$

En reprenant la même démarche avec la bissectrice intérieure de l'angle ∠B, puis avec celle de l'angle ∠C, nous obtenons les deux inégalités suivantes :

$$\frac{c}{b}.\mathrm{OP}+\frac{a}{b}.\mathrm{OR}\leq \mathrm{OB} \qquad (2)\ ;$$

$$\frac{a}{c}.\mathrm{OQ}+\frac{b}{c}.\mathrm{OP}\leq \mathrm{OC} \qquad (3).$$

En additionnant membre à membre les inégalités (1), (2) et (3), nous avons :

$$\left(\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\right).\mathrm{OP}+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right).\mathrm{OQ}+\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right).\mathrm{OR}\leq \mathrm{OA}+\mathrm{OB}+\mathrm{OC} \qquad (4).$$

Sachant qu'un réel strictement positif augmenté de son inverse est supérieur ou égal à deux, nous obtenons par minoration du premier membre de l'inégalité (4), l'inégalité d'Erdös-Mordell :

$$2(\mathrm{OP}+\mathrm{OQ}+\mathrm{OR})\leq \mathrm{OA}+\mathrm{OB}+\mathrm{OC}.$$

Conclusion

Nous venons de présenter la démonstration de Donat Kazarinoff et de rappeler au passage les différentes démonstrations qui ont été proposé dans l'histoire de cette conjecture. Nous noterons que les démonstrations proposées peuvent en définitive se regrouper en deux familles : la première, la plus nombreuse, procède par minoration à partir d'un terme du second membre avec la même technique de fin de calcul tandis que la deuxième, qui se réduit à la seule démonstration de Barrow, procède par majoration à partir d'un terme du premier membre. Souhaitons, au terme de ce papier, que des chercheurs passionnés puissent trouver d'autres solutions innovantes susceptibles d'enrichir le théorème d'Erdös.