Mathématiques et Philosophie en classe de seconde

Intervention du Professeur de mathématiques.
Effectif de la classe : 34 élèves.
Intervention : quinze heures en alternance avec le cours de Philosophie.
Objectifs :

- Préciser la définition du mot démonstration en mathématiques.
- Montrer sur des exemples, l'utilité d'une démonstration.
- Faire le tour des différents types de démonstrations rencontrées au lycée.
- Faire en sorte que les élèves, après avoir saisi l'importance des démonstrations n'y soient plus réfractaires.

I] Qu'est-ce qu'une démonstration ?

Définitions :

Démonstration :
En mathématiques, une démonstration est un raisonnement qui permet, à partir de certains *axiomes*, d'établir qu'une *proposition* est nécessairement vraie.
Les démonstrations utilisent la logique, mais incluent habituellement des éléments du langage naturel en évitant tant que possible d'introduire des ambiguïtés.
Dans le contexte de la théorie de la preuve, dans lequel des preuves purement formelles sont considérées, des preuves qui ne sont pas entièrement formelles sont appelées des « preuves sociales ». Ce sont des preuves qui sont basées sur des affirmations considérées comme exactes parce qu'elles sont admises par un ensemble de personnes. L'idée est acceptée comme exacte lorsqu'elle fait le consensus.
Le résultat qui est démontré s'appelle un théorème.

Axiome :
Un axiome (du grec ancien $\alpha\zeta\iota\omega\mu\alpha$/axioma, « considéré comme digne, convenable, évident en soi » lui-même dérivé de $\alpha\xi\iota o\varsigma$ (axios), signifiant « digne ».) désigne une vérité indémontrable qui doit être admise. Pour certains philosophes grecs de l'Antiquité, un axiome était une affirmation qu'ils considéraient comme évidente et qui n'avait nul besoin de preuve.
En mathématiques les axiomes sont les vérités premières d'une théorie à partir desquelles on en déduit toutes les autres.
Un célèbre axiome : l'Axiome d'Euclide (vers -300), dont une formulation équivalente dû à Proclus (412-485) est : «Par un point donné, on peut mener une et une seule parallèle à une droite donnée »

Proposition :
En mathématiques, dans une théorie donnée, une proposition est un énoncé formé d'un assemblage de symboles et de mots, auquel une valeur de vérité vrai ou faux peut être attribuée, dans certaines conditions mais de la vérité duquel on pourra toujours décider dans toute situation donnée.

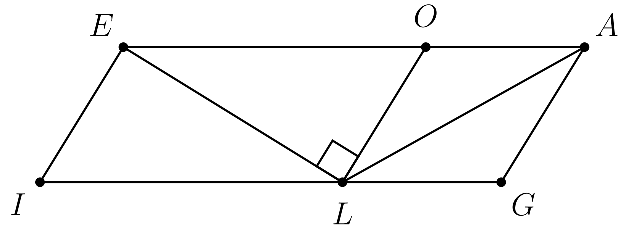
Source : http ://fr.wikipedia.org/
Pour les preuves formelles cf :
http ://images.math.cnrs.fr/Coq-et-caracteres.html

II] À quoi sert une démonstration ?

Exemples de situations illustrant la nécessité de démontrer

Exemple 1 Je vois donc c'est vrai ! (d'après les fiches de tonton Lulu, vol.1 diffusion Tangente)

LEO est un triangle rectangle en L, $OLGA$ est un losange et OEIL est un parallélogramme.
On donne $EO = 40$ mm ; $EI = 21$ mm.



À vue d'œil, il est clair que LE est plus grand que LA !

1. Mesurer les deux segments puis les comparer. Que pouvez-vous en conclure ?
2. Calculer la mesure exacte de LE puis en donner une valeur approchée à 10^{-1} près.
3. Soit J le point d'intersection de $[OG]$ et $[LA]$. Justifier que OJL est rectangle en J.
4. Montrer que $\widehat{JOL} = \dfrac{1}{2}\widehat{AOL}$.
5. Calculer une valeur approchée de $\widehat{EOL}$ à 10^{-1} près.
6. En déduire une valeur approchée de $\widehat{JOL}$ à 10^{-1} près.
7. En déduire une valeur approchée de LA à 10^{-1} près.
8. Quelle conclusion peut-on en tirer de cet exercice ?

Exemple 2 Je ne croix pas !
Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?
$1 = 1,000000000000\ldots$ (une infinité de zéros) $1 = 0,9999999999999\ldots$ (une infinité de neuf)
Les deux sont vraies.
La première proposition n'a pas posé de difficulté, mais pour la deuxième une démonstration s'impose.
On pose $x = 0,999999999999\ldots$. (En seconde, on admettra que x est un nombre rationnel).
x vérifie alors l'équation $10x - 9 = x \ldots$ qui admet comme seule solution 1 donc $x = 0,9999999\ldots = 1$.

Exemple 3 J'en suis sûr ! Je l'ai vérifié. Nombres de Fermat (1640).
Les nombres de Fermat sont les nombres qui s'écrivent $F_n = 2^{2^n} + 1$ pour tout entier naturel n.
Fermat affirma que pour tout entier naturel n, F_n était un nombre premier.
F_0, F_1, F_2, F_3, F_4 sont tous des nombres premiers.
À la calculatrice : en utilisant un petit algorithme, on trouve que $F_5 = 2^{2^5} + 1 = 4\,294\,967\,297$ est divisible par 641. Ce que ne pouvait pas faire M. Pierre de Fermat à son époque en un temps raisonnable.
Il avait donc tort !
Ce n'est qu'en 1732, i.e. 92 ans plus tard que Lehonard Euler prouva la non primalité de F_5.

Exemple 4 C'est vrai dans beaucoup de cas, c'est donc toujours vrai !
Que dire de la proposition : «pour tout entier naturel n, $P(n) = n^2+n+41$ est un nombre premier» ?
Pour tout entier n, tel que $0 \leqslant n \leqslant 39$, $P(n)$ est un nombre premier mais , $P(40) = 1681 = 41^2$ n'est pas un nombre premier.
Le polynôme $P(x) = x^2 + x + 41$ est dû à Euler.

Exemple 5 Syracuse
Soit N un nombre entier naturel non nul.
On construit une suite de nombres en procédant ainsi :
• Si N est paire, alors on divise N par 2

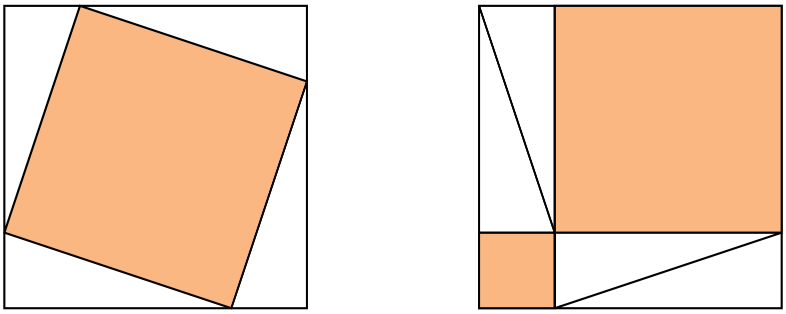
• Si N est impaire on multiplie N par 3 et on lui ajoute 1.
On réitère l'opération à partir du résultat obtenu.
La suite s'arrête lorque le nombre obtenu est 1.
Exemple : 14, 7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1
La conjecture de syracuse dit que pour tout entier naturel N strictement positif, la suite se termine toujours.
La conjecture tient depuis plus de 70 ans, personne n'a encore réussi à la démontrer.
Elle a été vérifiée pour un très grand nombre d'entiers.

Conclusion : la démonstration sert à convraincre, (soi-même ou d'autres), à expliquer une démarche, à trouver des solutions autres que celles connues au départ.

III] Différents types de démonstrations

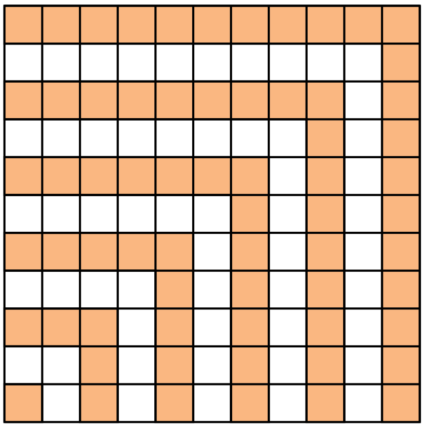
1. **«Démonstration» sans mot.**

   (a) Démonstration sans mot du théorème de Pythagore. « Dans tout triangle rectangle, le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés».

   c étant la longueur de l'hypoténuse, a et b celles des deux autres côtés, on a : $c^2 = a^2 + b^2$.

   (b) Démonstration sans mot, de ce que la somme des nombres impairs est un carré parfait.
   i.e. pour tout entier naturel n, $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$.

   Chaque bande colorée ou blanche correspond à un nombre impair. Ici :

   $$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 21 = 11^2$$

2. **Démonstration directe, indirecte**

   (a) **Directe :**
   • Pour tous nombres réels a et b, $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$.
   Preuve :
   On a : pour tous nombres réels a et b, $a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2$.
   Or pour tous nombres réels a et b, $(a - b)^2 \geqslant 0$
   donc pour tous nombres réels a et b, $a^2 + b^2 - 2ab \geqslant 0$ i.e. $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$.
   • Soit l'équation $(x - 1)^2 = 4$.
   On peut remarquer que : 3 est une solution de l'équation. Est-ce la seule solution ?
   Résolvons l'équation :

$$
\begin{aligned}
(x-1)^2 = 4 &\iff (x-1)^2 - 4 = 0 \\
&\iff (x-1)^2 - 2^2 = 0 \\
&\iff (x-1-2)(x-1+2) = 0 \\
&\iff (x-3)(x+1) = 0 \\
&\iff x-3 = 0 \text{ ou } x+1 = 0 \\
&\iff x = 3 \text{ ou } x = -1
\end{aligned}
$$

L'équation admet donc deux solutions qui sont : -1 et 3.

Cette résolution prouve que 3 n'est pas la seule solution de l'équation. On en a découvert une autre.

(b) **Indirecte : (par contraposition)**

Soient a et b deux nombres réels positifs, démontrons que :
Si $a \leqslant b$ alors $\sqrt{a} \leqslant \sqrt{b}$.
Faisons une démonstration par contraposition :
Soient P, Q deux propositions. Notons : non P et non Q leur négation.
Exemple : Si P est la propostion «$x > 2$» alors la propostion non P est «$x \leqslant 2$».
Pour démontrer que : «si P vraie alors Q est vraie, on va démontrer :
« si non Q est vraie alors non P est vraie».
i.e. Démontrons que : si $\sqrt{a} > \sqrt{b}$ alors $a > b$.
Supposons $\sqrt{a} > \sqrt{b}$.
$\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$ sont des nombres de $[0\,;\,+\infty[$ or sur cet intervalle la fonction carré est strictement croissante donc sur celui-ci, elle conserve les inégalités, d'où $(\sqrt{a})^2 > (\sqrt{b})^2$ i.e. $a > b$.
On a donc démontré que si $\sqrt{a} > \sqrt{b}$ alors $a > b$ d'où par contraposition, si $a \leqslant b$ alors $\sqrt{a} \leqslant \sqrt{b}$.

(c) **Indirecte : (par l'absurde)**

Existe-t-il un réel $x \neq -2$ tel que $\dfrac{x+1}{x+2} = 1$.
Faisons une démonstration par l'absurde :
Supposons qu'il existe un réel $x \neq -2$ tel que $\dfrac{x+1}{x+2} = 1$.
Alors on a : $x+1 = x+2$, ce qui nous donne $1 = 2$. C'est absurde.
On ne peut donc pas supposer qu'il existe un réel $x \neq -2$ tel que $\dfrac{x+1}{x+2} = 1$.
D'où, il n'existe aucun réel $x \neq -2$, $\dfrac{x+1}{x+2} = 1$.
i.e. pour tout nombre réel $x \neq -2$, $\dfrac{x+1}{x+2} \neq 1$.

3. **Démonstration par l'exemple ou contre-exemple**

(a) La proposition : «pour tous réels x, si $x^2 > 1$ alors $x > 1$» est elle vraie ou fausse ?
Il suffit de prendre $x = -2$. On a $(-2)^2 = 4 > 1$ pourtant $x = -2 < 1$.
Donc la proposition est fausse.

(b) La proposition : «l'équation $x^3 - 2x - 4 = 0$ admet au moins une solution» est elle vraie ou fausse ?
À l'aide de la calculatrice, en traçant la courbe représentative de la fonction définie par : $f(x) = x^3 - 2x - 4$, on conjecture que 2 est une solution de cette équation.
En effet $2^3 - 2 \times 2 - 4 = 8 - 4 - 4 = 0$.
Donc la proposition est vraie.

4. **Démonstration par récurrence** (hors programme : vue en terminale scientifique)

- Principe de l'échelle (ou escalier), qui peut-être infini.
  On sait passer d'un barreau au barreau suivant.
  On atteint donc tous les barreaux de l'échelle à partir du premier barreau.

- La démonstration. (en quatre étapes)
  (a) On considére $\mathcal{P}_n$ une proposition dépendant de l'entier naturel n.
  (b) On vérifie, pour $n = 0$, que $\mathcal{P}_n$ est vraie.
  (c) On considère un entier naturel n quelconque.
  On démontre que si $\mathcal{P}_n$ est vraie alors $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
  (i.e. le fait que l'on soit sur le barreau n implique que l'on peut passer sur le barreau $n+1$).
  (d) Conclusion, puisque $\mathcal{P}_0$ alors $\mathcal{P}_1$ est vraie,
  puisque $\mathcal{P}_1$ alors $\mathcal{P}_2$ est vraie, etc. . .
  La proposition est donc vraie pour tout entier naturel n.
  (Remarque : le raisonnement peut-être fait à partir d'un certain rang n_0)

Exemple :

(a) Considérons la proposition, $\mathcal{P}_n$: «$10^n - 1$ est divisible par 9»

(b) Pour $n = 0$, $10^0 - 1 = 1 - 1 = 0$ et 0 est divisible par 9. Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

(c) Soit un entier naturel n.
Supposons que $\mathcal{P}_n$ soit vraie. I.e. 9 divise $10^n - 1$.
$10^n - 1$ est donc un multiple de 9 et il exite un entier k tel que $10^n - 1 = 9k$.
On a alors $10^{n+1} - 1 = 10 \times 10^n - 1$.
Or d'après ce qui précède, $10^n = 9k + 1$ donc $10^{n+1} - 1 = 10 \times (9k + 1) - 1$
i.e $10^{n+1} - 1 = 10 \times 9k + 10 - 1 = 9(10k + 1)$.
Or $10k + 1$ est un entier donc $10^{n+1} - 1$ est divisible par 9. I.e. $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
On a donc montré $\mathcal{P}_n$ vraie implique $\mathcal{P}_{n+1}$ vraie.

(d) D'après le principe de la démonstration par récurrence, pour tout entier naturel n, $\mathcal{P}_n$ est vraie. I.e. pour tout entier naturel n, $10^n - 1$ est divisible par 9.

Bulletin officiel N°30 du 23 Juillet 2009

Notations et raisonnement mathématiques (objectifs pour le lycée)

Cette rubrique, consacrée à l'apprentissage des notations mathématiques et à la logique, ne doit pas faire l'objet de séances de cours spécifiques mais doit être répartie sur toute l'année scolaire.

Notations mathématiques

Les élèves doivent connaître les notions d'élément d'un ensemble, de sous-ensemble, d'appartenance et d'inclusion, de réunion, d'intersection et de complémentaire et savoir utiliser les symboles de base correspondant : $\in, \subset, \cup, \cap$ ainsi que la notation des ensembles de nombres et des intervalles. Pour le complémentaire d'un ensemble A, on utilise la notation des probabilités $\overline{A}$.

Pour ce qui concerne le raisonnement logique, les élèves sont entraînés, sur des exemples :

- à utiliser correctement les connecteurs logiques « et », « ou » et à distinguer leur sens des sens courants de « et », « ou » dans le langage usuel ;
- à utiliser à bon escient les quantificateurs universel, existentiel (les symboles $\forall, \exists$ ne sont pas exigibles) et à repérer les quantifications implicites dans certaines propositions et, particulièrement, dans les propositions conditionnelles ;
- à distinguer, dans le cas d'une proposition conditionnelle, la proposition directe, sa réciproque, sa contraposée et sa négation ;
- à distinguer, dans le cas d'une proposition conditionnelle, la proposition directe, sa réciproque, sa contraposée et sa négation ;
- à utiliser à bon escient les expressions « condition nécessaire », « condition suffisante » ;
- à formuler la négation d'une proposition ;
- à utiliser un contre-exemple pour infirmer une proposition universelle ;
- à reconnaître et à utiliser des types de raisonnement spécifiques : raisonnement par disjonction des cas, recours à la contraposée, raisonnement par l'absurde.