Arithmétique et itérations

Au travers d'une famille d'applications définies sur N*et dépendant de deux paramètres a et c. Des problèmes de type Syracuse sont étudiés dont certains sont résolus avec des moyens du niveau lycée.

Les applications considérées sont définies dans N*par la relation

$$n \quad \rightarrow \quad \frac{c+p1(2\text{an}+1)}{2}$$

a et c sont dans N*et c est impair.
p1(n) désigne le plus petit diviseur premier de *n*, ainsi *p1*(21)=3.

Exemple de problème étudié.
Pour a = 31 et c =61, les itérés de 1 sont
1 → 32 → 33 → 42 → 33 → 42 → 33 → ...
On parle également du vol de 1. Le vol de 89 est
89 → 2790 → 86521 → 32 → 33 → 42 → 33 → ...

Nous montrerons dans la partie B qui englobe ces deux valeurs des paramètres, que quelque soit l'entier de départ le vol boucle sur le cycle 33,42.
Pour d'autres valeurs des paramètres plusieurs cycles pourront apparaître parfois même des points fixes. Enfin dans une grande majorité de cas nous ne saurons pas justifier la convergence mais cela nous mènera vers " les nombres premiers en progression arithmétique " et les suites de Cullingham généralisées " qui sont des sujets d'actualité.
Le logiciel Xcas est utilisé pour les calculs.

Sommaire

A Généralités sur la fonction $f : n \rightarrow \frac{c+p1(2an+1)}{2}$ définie dans N*

Étude des points fixes : L'égalité *f*(*n*) = *n*

Si n est point fixe on a l'égalité $\frac{c+p1(2an+1)}{2}=n$ elle implique $p1(2an+1) = 2n - c$, ainsi $2n - c$ est premier. Comme c est impair de l'égalité $2an + 1 = a(2n - c) + ac + 1$, on déduit que $2n - c$ est un diviseur premier impair de $ac + 1$.

En posant $q = 2n - c$, l'égalité précédente s'écrit $2an+1=q(a+\frac{ac+1}{q})$

$p1(2an+1) = q$ *implique* $p1(a+\frac{ac+1}{q})\geq q$

Réciproquement

Si q est un facteur premier impair de $ac + 1$ vérifiant $p1(a+\frac{ac+1}{q})\geq q$ alors $n=\frac{c+q}{2}$ est point fixe.

Conclusion

Les points fixes lorsqu'ils existent sont donnés par la formule $n=\frac{c+q}{2}$ dans laquelle q est un facteur premier impair de $ac + 1$ vérifiant en outre la condition $p1(a+\frac{ac+1}{q})\geq q$.

Exemples :

Pour $a = 23$ et $c = 7$, $ac + 1 = 162 = 2*3^4$, la seule possibilité est pour $q = 3$, il vient $p1(23+\frac{162}{3})=7$ comme $7 \geq 3$, la condition est vérifiée et $5=\frac{7+3}{2}$ est le seul point fixe.

Pour $a = 31$ et $c = 61$, $ac + 1 = 1892 = 2^2 * 11 * 43$. Pour $q = 43$ $a+\frac{ac+1}{q}=75$ 43 ne vérifie pas la condition. Il en va de de même pour 11. Il n'y a pas de point fixe.

Remarque : Pour des valeurs de a et de c données, le nombre de points fixes est fini.

comparaison entre *n* et son image *f(n)* .

Si $2an + 1$ est premier, n est propulsé et $f(n)=an+\frac{c+1}{2}$. L'image est plus grande que n.

Si $2an + 1$ n'est pas premier, remarquons que cette hypothèse implique $p1(2an+1)\leq\sqrt{(2an+1)}$ .donc $f(n)\leq\frac{(c+\sqrt{(2an+1)})}{2}$. On vérifie facilement que pour tout $n>\frac{c}{2}$, l'inéquation $\frac{(c+\sqrt{(2an+1)})}{2}<n$ équivaut à $0<4n^2-2(a+2c)n+c^2-1$.

Cette dernière inégalité est vérifiée dès que n est assez grand c à d $n>\frac{a+2c+\sqrt{(a^2+4(ac+1))}}{4}$

.On pose. $R_0=\frac{a+2c+\sqrt{(a^2+4(ac+1))}}{4}$.

On a alors la propriété (P_1)

Pour une valeur de *n* vérifiant $n > R_0$,
soit *n* est propulsé, soit l'image de *n* est plus petite que *n*.

Conséquence : Un point fixe est inférieur ou égal à R_0.

Si $n \leq R_0$ il est difficile de comparer *n à f(n). C*ependant il est important pour la suite de noter la propriété (P_2)

Si *n* n'est pas propulsé et si $n \leq R_0$ alors $f(n) \leq R_0$.

Cela résulte par transitivité des deux inégalités

$$f(n) \leq \frac{(c+\sqrt{(2an+1)})}{2} \quad \text{et} \quad \frac{(c+\sqrt{(2an+1)})}{2} \leq R_0 \quad .$$

La première provient du fait que n n'est pas propulsé.

La deuxième résulte de l'implication "$n \leq R_0$ implique $\frac{(c+\sqrt{(2an+1)})}{2} \leq R_0$ ".

Montrons cette dernière

$n \leq R_0$ donc $n \leq \frac{a+2c+\sqrt{(a^2+4(ac+1))}}{4}$ dans les deux membres de l'inégalité on multiplie par 8*a* et on ajoute 4 . On obtient $8an+4 \leq 2a^2+4ac+4+2a\sqrt{(a^2+4(ac+1))}$. Les racines carrées sont dans le même ordre donc $2\sqrt{(2an+1)} \leq a+\sqrt{(a^2+4(ac+1))}$ aux deux membres on ajoute 2*c* et on divise par 4. On obtient

$$\frac{(c+\sqrt{(2an+1)})}{2} \leq R_0$$

B Étude d'une sous famille

a et *c* sont congrus à 1 modulo 3

Dans cette partie nous allons exhiber une sous famille de transformations pour les quelles nous savons :

établir la convergence vers un cycle pour tout vol

énumérer les cycles pour *a* et *c* fixés

Pour cela, on réalise une partition de l'ensemble N* en trois ensembles en fonction du reste dans la division euclidienne par 3.

Graphe associé à la fonction

Soit N_0 l'ensemble des entiers naturels (non nul) congrus à 0 modulo 3, N_1 celui des entiers congrus à 1 et N_2 celui des entiers congrus à 2.

Image d'un élément de N_1.

Pour un élément de N_1, $n \equiv 1$ (3) comme $a \equiv 1$ (3), 3 divise $2an + 1$ et $p1(2an + 1) = 3$.

L'image d'un élément de N_1 est $\frac{c+3}{2} = i_0$ .Tous les éléments de N_1 ont donc la même image et i_0

est dans N_2.
La flèche terminée par un point noir traduit ceci sur le graphique.

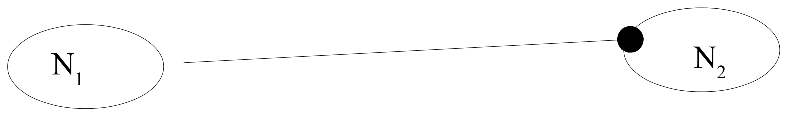


Image d'un élément de N_2.

Pour un élément de N_2, $n \equiv 2$ (3) comme $a \equiv 1$ (3), $2an + 1 \equiv 2$ (3) deux cas surviennent
$p1(2an + 1) \equiv 1$ (3), l'image est dans N_1 et elle n'est pas propulsée.
$p1(2an + 1) \equiv 2$ (3), l'image est dans N_0 car 3 divise $c + p1(2an + 1)$. Elle est éventuellement propulsée, ce qu'indique le pointillé pour la flèche.

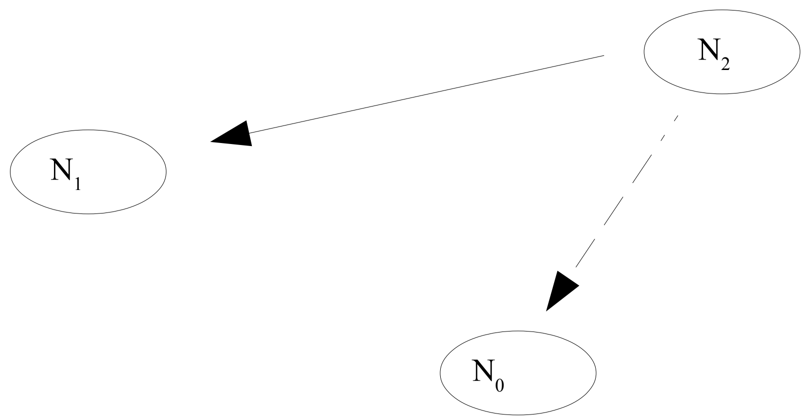
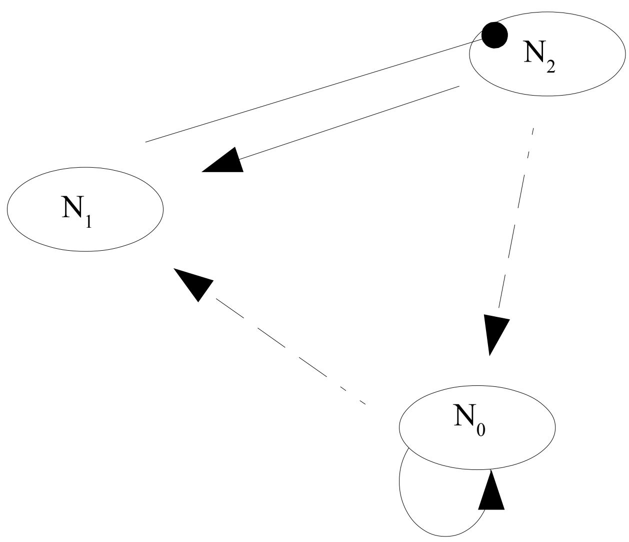


Image d'un élément de N_0.

Pour un élément de N_0, $n \equiv 0$ (3), $2an + 1 \equiv 1$ (3) deux cas surviennent
$p1(2an + 1) \equiv 1$ (3), l'image est dans N_1 et elle est éventuellement propulsée.
$p1(2an + 1) \equiv 2$ (3), l'image reste dans N_0 car 3 divise $c + p1(2an + 1)$. Elle n' est pas propulsée,

Le graphe suivant résume ce qui précède



Étude des itérés de i_0

$$2ai_0+1=\frac{2a(c+3)}{2}+1=ac+3a+1$$

Si $p1(ac+3a+1) \equiv 1(3)$ alors l'image est dans N_1 et on a un cycle de longueur 2.
Par exemple pour a =19 et c = 1, i_0 = 2 et $ac+3a+1=7*11$; $7 \equiv 1$ (3)
2 → 4 → 2 → 4 → 2 → ...

Si $p1(ac+3a+1) \equiv 2$ (3) alors l'image est dans N_0 et deux éventualités se présentent

1er cas Les itérés successifs ne restent pas dans N_0.
On rencontrera alors de nouveau i_0 ce qui donne un cycle contenant i_0 un ou plusieurs éléments de N_0 et un élément de N_1.
Par exemple
a = 868 et c = 403, i_0 = 203 et $ac+3a+1$= 352409 (nombre premier congru à 2 modulo 3)
203 → 176406 → 153120610 → 203 → 17406 → ...

a = 1765 et c = 1, i_0 = 2 et $ac+3a+1$= 23*307
2 → 12 → 6 → 30 → 69 → 15 → 26476 → 2 → ...

2ième cas Les itérés successifs restent dans N_0.

-Si $f(i_0) \leq R_0$
les itérés suivants resteront tous inférieurs ou égaux à R_0 d'après la propriété (P_2) car les itérations se font sans propulsion.
-Si $f(i_0) > R_0$
Pour la même raison la propriété (P_1) assure qu'on finira par rencontrer un itéré inférieur ou égal à R_0. Puis les itérés suivants resteront tous inférieurs ou égaux à R_0.
Puisqu'il y a un nombre fini de nombres inférieurs ou égaux à R_0 On aura un cycle formé d'éléments de N_0 tous inférieurs ou égaux à R_0.

Par exemple
a = 31 et c = 61, i_0 = 32 et $ac+3a+1$= 5*397
32 → 33 → 42 → 33 → 42 → ...

a = 7837 et c = 1, i_0 = 2 et $ac+3a+1$= 29*109
2 → 12 → 6 → 3 → 30 → 216 → 3 → 30 → ...

Étude des itérés d'un entier n

Dans la suite des itérés de n
- Soit on rencontre i_0 et on est ramené à l'étude précédente
Exemple
Le vol de 3174 pour a = 1 et c = 1, i_0 = 2

45 → 44 → 4 → 2 → 3 → 4 → 2 → ...

Le vol de 3174 pour a = 31 et c = 61, i_0 = 32

3174 → 54 → 39 → 51 → 1612 → 32 → 33 → 42 → 33

- Soit le vol est composé d'éléments de N_0 avec éventuellement un élément de N_2 en première position et il se termine alors par un cycle..

Exemple

Le vol de 170 pour a =790 et c = 1, i_0 = 2

170 → 57 → 57 → 57 → ...

Conclusion

Si a et c sont congrus à 1 modulo 3 tous les vols bouclent
Pour a et c fixés les cycles sont déterminés par l'étude des vols de i_0 et des nombres congrus à 0 modulo 3, inférieurs ou égaux à R_0. Les cycles sont en nombre fini.

Remarque 1::

Si c = 1 et si 2 est propulsé alors la longueur du cycle est 3 et 2 appartient au cycle.

En effet, $4a$ +1 *est* premier car il y a propulsion ; l'image de 2 est $2a$ +1. Il suffit alors de montrer que l'image de $2a$ +1 est congrue à 1 modulo 3.
Cela revient à montrer que $p1(2a(2a + 1) + 1)$ est congru à 1 modulo 3.
Si p premier divise $2a(2a+1) + 1 =(2a)^2 + 2a +1$ donc il est premier avec 2a et d'après "Fermat" p divise $(2a)^{p-1} - 1$. Comme $(2a)^3 - 1 = (2a - 1)((2a)^2 + 2a +1)$, p divise $(2a)^3 - 1$. Par ailleurs $2a$ et $(2a)^2$ ne sont pas congrus à 1 modulo p. On en déduit que 3 est l'ordre de $2a$ modulo p donc 3 divise p-1 et p est congru à 1 modulo 3. Ainsi $p1(2a(2a + 1) + 1)$ est congru à 1 modulo 3.

Exemple

Le vol de 2 pour a = 25 et c = 1, i_0 = 2 et $4a$+1 = 101 est premier

2 → 51 → 1276 → 2 → ...

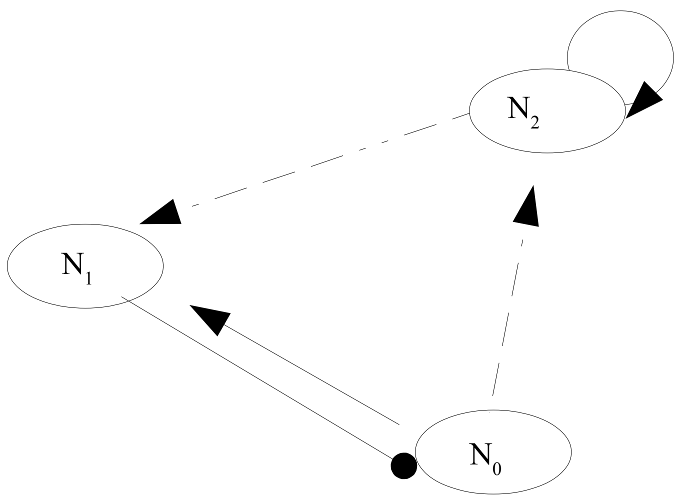
Le vol de 2 pour a = 49 et c = 1, i_0 = 2 et $4a$+1 = 197 est premier

2 → 99 → 16 → 2 → ...

C - Une autre sous famille

a est congru à 1 modulo 3 et c congru à 0

Le graphe correspondant aux valeurs des paramètres est le suivant



Le graphe est facile à établir. Des raisonnements analogues à ceux de la partie B montrent que

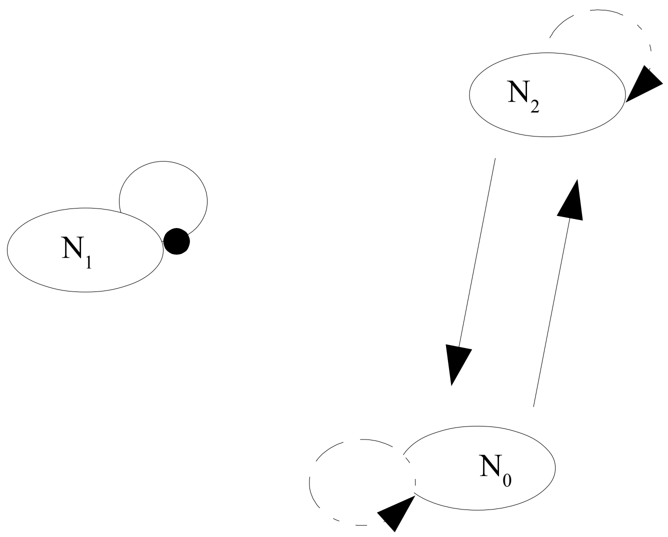
Si a est congru à 1 modulo 3 et c est congru à 0 modulo 3 alors tous les vols bouclent.
Les cycles sont déterminés par l'étude des vols de i_0 et des nombres congrus à 2 modulo 3, inférieurs ou égaux à R_0

D Vers les nombres premiers en progression arithmétique et les chaînes de Cullingham généralisées

Pour épuiser l'étude du cas ou a est congru à 1 modulo 3, examinons la sous famille

a est congru à 1 modulo 3 et c congru à 2 modulo 3.

Le graphe correspondant est



observations

Comme c ≡ 2 (3) $i_0 = \frac{c+3}{2}$ est un élément de N_1 . C'est également un point fixe car 3 est un diviseur de ac +1 qui vérifie automatiquement la condition.
Par ailleurs un élément de N_1 a pour image i_0.
La différence essentielle avec les études précédents est qu'un élément de N_0 (ou N_2) peut avoir son image dans le même ensemble et être propulsé. Les propriétés (P_1) et (P_2) ne s'appliquent donc pas.

On observe assez vite des cycles plus longs.
Par exemple :pour a = 25 et c = 5
les six premiers vols sont

1,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4
2,53,8,203,5078,126953,29,728,47,1178,29453,26,653,54,21,528,11,12,303,57,1428,8
3,78,26,653,54,21,528,11,12,303,57,1428,8,203,5078,126953,29,728,47,1178,29453,26
4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4
5,128,21,528,11,12,303,57,1428,8,203,5078,126953,29,728,47,1178,29453,26,653,54,21
6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6

Des chaînes d'itérés consécutifs propulsés apparaissent.
Par exemple :pour a = 1 et c = 209 on a R_0 = 112
Les premiers termes du vol de 99 sont
99 → 204 → 309 → 414 → 519 → 624 → 729 → 834 → 939 → 1044 → 1149 → 110 → ... → 324 → 110 → ...

Chaque terme jusqu'à 1044 est propulsé (on utilise R_0 et les propriétés (P_1) et (P_2) pour le montrer).
Ceci induit une séquence de nombres premiers obtenus à partir de la séquence précédente en multipliant par 2 et en ajoutant 1.
199 409 619 829 1039 1249 1459 1669 1879 2089
Nous sommes en présence d'une séquence de nombres premiers en progression arithmétique de raison 210.
Nous savons grâce au résultat récent de **Tao-Green** qu'il existe des séquences de nombres premiers en progression arithmétique de longueur arbitraire. Donc il existe des chaînes d'itérés consécutifs propulsés de longueur arbitraire.
Pour le résultat de **Tao-Green** voir : images des mathématiques. Progressions polynomiales dans l'ensemble des nombres premiers. par Julia **Wolf**.

Pour a = 4 et c = 5 on a R_0 < 7
Les premiers termes du vol de 32 sont
32 → 131 → 527 → 2111 → 8447 → 33791 → 13516 → 540671

Chaque terme jusqu'à 13516 est propulsé ce qui induit une séquence de nombres premiers obtenus à partir de la séquence précédente en multipliant par 8 qui est la valeur de 2a et en ajoutant 1.
257 1049 4217 16889 67577 270329 1081337
Ils sont en progression arithmético-géométrique chaque terme s'obtient à partir du précédent en multipliant par 4 qui est la valeur de a et en ajoutant 21 qui est la valeur de ac+1.
Cela porte le nom de "chaîne de Cullingham généralisée "

Nous observons des cycles pour chaque vol mais dans la majorité des cas nous ne savons pas expliquer la convergence.
Cependant pour a = 1 nous allons montrer que tous les vols convergent indépendamment du paramètre c.

E – **Un cas particulier**

La sous famille déterminée par *a* = 1 et *c* impair

La croissance propulsée

Lorsque $2n+1$ est premier, n est propulsé et son image est $f(n)=\frac{c+2n+1}{2}=n+\frac{c+1}{2}$

Définition :
La suite des itérés de n est en croissance propulsée de durée égale à $d \geq 1$ si et seulement si n est propulsé ainsi que $f(n)$, $f^2(n)$, ..., $f^{d-1}(n)$ mais pas $f^d(n)$

On obtient alors la suite d'itérés

$$n\ ,\quad n+\frac{c+1}{2}\ ,\quad n+2\frac{c+1}{2}\ ,\quad n+3\frac{c+1}{2}\ ,\ ...,\quad n+(d-1)\frac{c+1}{2}\ ,\quad n+d\,\frac{c+1}{2}\ ,$$

et $f^d(n)=n+d\,\frac{c+1}{2}$ n'est pas propulsé.
On convient de dire que n est en croissance propulsée de durée zéro si $2n+1$ n'est pas premier.

Une croissance propulsée limitée

Soit $\boldsymbol{p_c}$ le plus petit nombre premier ne divisant pas $c+1$ nous allons montrer le résultat suivant

> **Pour tout *n* la suite des itérés de *n* en croissance propulsée a une durée inférieure ou égale à p_c .**

A la suite des itérés de n en propulsion de durée d est associée une séquence de nombres premiers qui assurent la propulsion
$2n+1$, $2n+1+(c+1)$, $2n+1+2(c+1)$,...................., $2n+1+(d-1)(c+1)$.

Considérons la séquence
$2n+1$, $2n+1+(c+1)$, ..., $2n+1+(j-1)(c+1)$ pour $0 < j$.
dans la quelle les termes sont supposés être des nombres premiers.
pour $j \leq p_c$
tous les termes ont des restes différents dans la division euclidienne par p_c car la différence entre deux termes n'est pas divisible par p_c.
pour $j = p_c$
Comme ils sont au nombre de p_c, le reste 0 est obtenu et l'un d'eux est divisible par p_c donc égal à p_c puisqu'il est lui même premier. Ce terme est forcément $2n+1$ car les autres sont tous plus grand que p_c. (Cela est vrai si $p_c = 3$, dans le cas contraire si q désigne le nombre premier qui précède p_c le postulat de **Bertrand** montre que $p_c < 2q \leq c+1$. car 2 et q divisent $c+1$).

Donc le terme suivant $2n+1+p_c(c+1)$ est divisible par p_c et n'est donc pas premier.
Ainsi un vol en propulsion ne peut avoir une durée supérieure à p_c.
Elle peut être égale à p_c, par exemple
Pour $c = 5$ alors $p_c = 5$ Le vol de 2 est $2 \to 5 \to 8 \to 11 \to 14 \to 17 \to 5$

L'ensemble borné *I*

Introduction

Pour tout nombre *c,* nous allons mettre en évidence un ensemble borné *I* dans lequel la suite des itérés d'un élément *n* arbitraire prend une infinité de valeurs. L'ensemble *I* étant fini, un cycle apparaîtra.

Mise en évidence de l'ensemble *I*

Chaque nombre *n* a une croissance propulsée de durée *d* comprise entre 0 et p_c.
$n+d\dfrac{c+1}{2}$ termine la croissance propulsée car $2n + 1 + d\,(c + 1)$ n'est pas premier.

Nous allons montrer que pour *n* assez grand, l'itéré de $n+d\dfrac{c+1}{2}$ est plus petit que *n*.

$f\left(n+d\dfrac{c+1}{2}\right)=\dfrac{c+p1(2n+d(c+1)+1)}{2}$. Puisque $n+d\dfrac{c+1}{2}$ n'est pas propulsé

$f\left(n+d\dfrac{c+1}{2}\right)\leq\dfrac{c+\sqrt{(2n+d(c+1)+1)}}{2}$. L'inégalité $\dfrac{c+\sqrt{(2n+d(c+1)+1)}}{2}\leq n$ équivaut pour $n>\dfrac{c}{2}$ à $2n + d(c + 1) +1 \leq (2n - c)^2$.

pour *n* plus grand que $R_d=\dfrac{2c+1+\sqrt{(4(d+1)(c+1)+1)}}{4}$ On a $f\left(n+d\dfrac{c+1}{2}\right)<n$.

Les valeurs R_0, R_1, ……. R_{p_c} sont rangées en ordre croissant. Posons $R=R_{p_c}$ et définissons *I* comme l'ensemble des entiers de l'intervalle $\left[\dfrac{c+1}{2}\quad ,\quad R\ \right]$

Propriété de l'ensemble *I*

si $n\leq R$ son image est soit dans *I,* soit supérieure à R .

si $R<n$, en un nombre d'étapes inférieur à p_c on obtient un itéré qui est
- soit un élément de *I.*
- soit un nombre inférieur à *n* mais supérieur à R .

Dans le deuxième cas on recommence alors avec celui ci jusqu'à obtenir un nombre dans *I* ce qui se fera en un nombre fini d'étapes

La suite des itérés de *n* contient une infinité d'éléments de I comme cet ensemble est fini
elle contient une infinité de fois un même élément de *I.*

Pour tout *n* la suite des itérés de *n* est ultimement périodique et le cycle contient au moins un élément de *I*.
L'intervalle *I* est fini donc Le nombre de cycles est lui même fini.

Exemples :
Pour ***c* = 665** il y a trois cycles
Un point fixe 334 .
Le cycle 336, 669, 339 .
Le cycle 335,338,671,341,674,342 .

Terminons par une propriété concernant les points fixes

F- Tout nombre *n* non propulsé est point fixe pour une certaine valeur de *c*

Remarquons d'abord que si le nombre n est propulsé alors $f(n)=n+\frac{c+1}{2}$ il ne peut être point fixe.
Soit *n* un entier non propulsé, 2*n* + 1 n'est pas premier, posons $p = p1(2n+1)$, en choisissant $c = 2n - p$ l'image de *n* est *n*. Il existe donc une valeur de *c* pour laquelle *n* est point fixe.
Nous savons que $n \leq N_0$.

Position du point fixe *n* dans l'ensemble I_0

Exemple

n	c	I_0	R_0
82	161,	81,**82**,83,84,85,86,87	87.1188696014
84	155	78,79,80,81,82,83,**84**	84.0
85	167	84,**85,**86,87,88,89,90	90.2355608855
87	169	85,86,**87**,88,89,90,91	91.2739941753
88	173	87,**88**,89,90,91,92,93	93.3501893912
91	179	90,**91**,92,93,94,95,96	96.462860791
92	179	90,91,**92,**93,94,95,96	96.462860791
93	175	88,89,90,91,92,**93,**94	94.3879590237

On constate que le point fixe peut occuper la borne supérieure de I_0 (pour *n* = 84 par exemple).
Nous allons étudier ce cas.

n occupe la borne supérieure de I_0

Si *n* occupe la borne supérieure de l'intervalle I_0 alors $N_0 - n < 1$, comme $n=\frac{c+p}{2}$ il vient

$\frac{2c+1+\sqrt{(4c+5)}}{4}-\frac{c+p}{2}<1$ inégalité équivalente à $c + 1 < p^2 + 3p + 2$.

Nous savons que *p* divise *c* + 1, on a $2n+1=c+p+1=p(1+\frac{c+1}{p})$

la condition $p = p1(2n+1)$ entraîne que $1+\dfrac{c+1}{p} \geq p$ c à d $p(p-1) \leq c+1$.
On pose $c + 1 = p(p + x)$.
Les deux inéquations $c + 1 \leq p^2 + 3p + 2$ et $p(p-1) \leq c+1$ déterminent les valeurs possibles de x qui sont :

-1, 0, 1, 2, 3.

L'égalité $2n + 1 = c + p + 1 = p(1 + p + x)$ montre que pour des raisons de parité 0 et 2 ne conviennent pas.
On en déduit les valeurs possibles pour 2n + 1 qui sont p^2, $p(p+2)$ et $p(p+4)$.
Pour les deux dernières, la condition $p1(2n+1)=p$ entraîne que $p + 2$ et $p + 4$ sont premiers.

Pour $x = -1$, $2n + 1 = p^2$. $2n + 1$ est **le carré** d'un nombre premier impair. Le nombre $n=\dfrac{p^2-1}{2}$ est point fixe pour la valeur de $c = p^2 - p - 1$ correspondante et on a l'égalité $n = R_0$ pour tout nombre premier impair p.

Pour $x = 1$, $2n + 1 = p(p + 2)$. $2n + 1$ est le produit de deux nombres premiers **jumeaux.**
Le nombre $n=\dfrac{p^2+2p-1}{2}$ est point fixe pour la valeur de $c = p^2 + p - 1$ correspondante et on a $n+\dfrac{1}{2}=R_0$ pour tout couple p, $p + 2$ de nombres premiers.

Pour $x = 3$, $2n + 1 = p(p + 4)$. $2n + 1$ est le produit de deux nombres premiers **cousins.**
Le nombre $n=\dfrac{p^2+4p-1}{2}$ est point fixe pour la valeur de $c = p^2 + 3p - 1$ correspondante et on a $0{,}88 \leq R_0 - n \leq 1$ pour tout couple p, $p + 4$ de nombres premiers.

Conclusion

On peut construire les graphes pour les cas $a \equiv 2$ ou $a \equiv 3$ mais ils nous renseignent peu. Les méthodes exposées pour expliquer la convergence vers le cycle ne s'appliquent plus dès que l'on aborde le cas général. D'autres questions restent sans réponse. Par exemple : comment connaître le nombre de cycles à partir des paramètres a et c?
J'espère que ce texte donnera l'occasion d'expérimenter quelques programmes pour observer cette convergence qui fait penser à la loi d'attraction terrestre.