

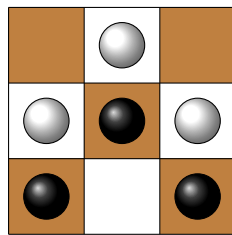
Étude du jeu alquerkonane sur un damier 3×3

Alain Busser
Institut de Recherche
pour l'Enseignement des Mathématiques
et de l'Informatique
La Réunion



24 janvier 2023

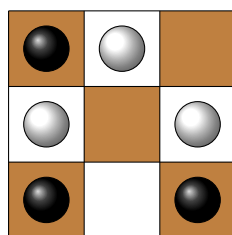
La position initiale du jeu alquerque 3 × 3 (sur un damier de 9 cases) est celle-ci :



Ce jeu est positif : que ce soit aux noirs de commencer, ou aux blancs, ce sont les noirs qui ont une stratégie gagnante.

0.1 Les noirs commencent

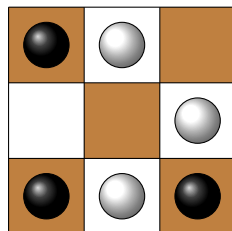
Il n'est pas dans l'intérêt des noirs, de commencer par prendre un pion blanc. Ils maximisent leur gain en glissant le seul pion qu'ils peuvent glisser :



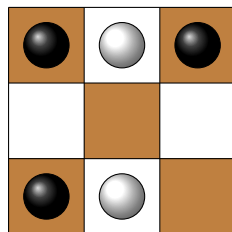
Les blancs peuvent alors avancer soit le pion de gauche, soit celui de droite.

0.1.1 Les blancs avancent le pion de gauche

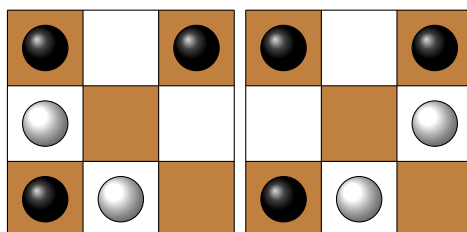
C'est dans leur intérêt car alors ils arrivent au nombre 1 qui fait gagner les noirs, mais de peu :



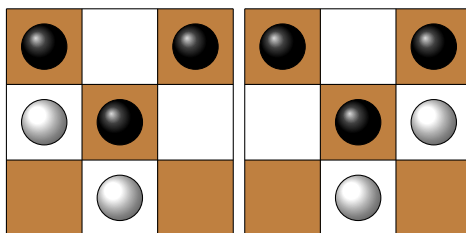
Les noirs ont maintenant intérêt à prendre un pion, bien que ce soit en avant :



Les blancs ne peuvent alors que glisser le seul pion qu'ils peuvent encore bouger, soit vers la gauche, soit vers la droite :



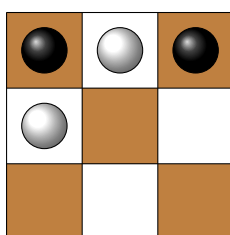
Dans les deux cas (qui valent 1), les noirs glissent un pion vers le centre, pour aboutir à deux situations qui sont symétriques l'une de l'autre :



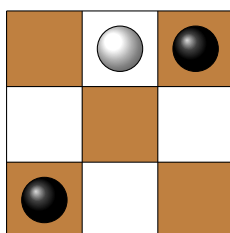
On ne décrira donc la suite de la stratégie gagnante, que sur la première d'entre elles.

Les blancs ont deux possibilités : prendre le pion noir central, vers l'arrière (le haut) ou vers le côté (la droite).

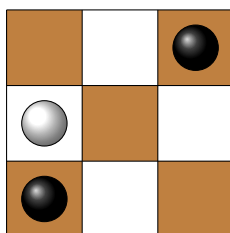
Les blancs prennent en arrière



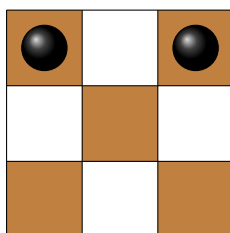
Dans ce cas les noirs également prennent en arrière, aboutissant à cette position :



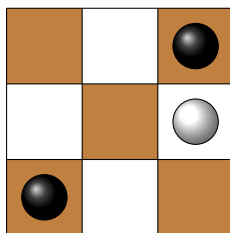
Alors les blancs n'ont plus qu'un pion à avancer, soit vers la gauche, soit vers la droite. S'ils avancent vers la gauche, ils arrivent au nombre 1 :



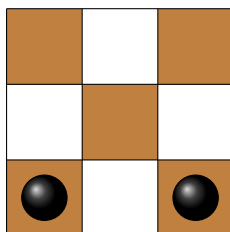
les noirs gagnant en prenant le pion blanc en avant (et arrivant à 0) :



Si les blancs avaient avancé leur pion vers la droite

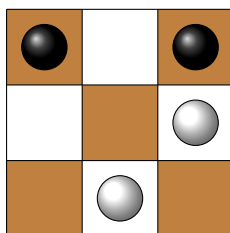


les noirs auraient pu prendre leur pion en arrière, arrivant alors au nombre 4 :

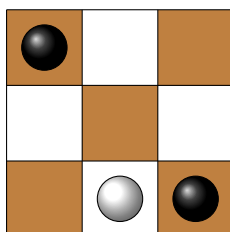


Les blancs n'avaient donc pas intérêt à glisser leur pion vers la droite.

Les blancs prennent sur le côté

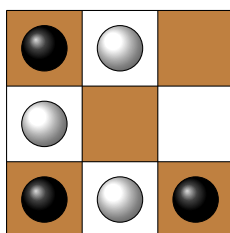


Alors les noirs prennent un pion blanc en arrière :

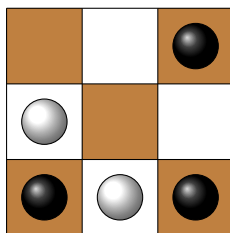


et peuvent encore bouger 3 fois leur pion (dont une prise latérale du pion blanc) alors que les blancs sont bloqués : la position à laquelle ont abouti les blancs vaut 4 pour les noirs.

0.1.2 Les blancs avancent le pion de droite

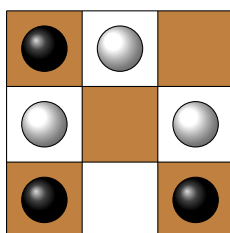


Les noirs, en prenant ce pion latéralement, peuvent aboutir au nombre 3 :



Les blancs, ne pouvant plus bouger, sont bloqués et ont donc perdu. Alors que les noirs auraient pu bouger avec 3 coups d'avance (prise en avant, prise latérale, avance vers le centre) sur les blancs. Cette situation n'est pas avantageuse pour les blancs qui n'avaient donc pas intérêt à avancer le pion de droite.

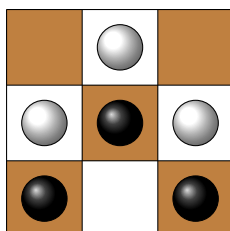
En résumé, depuis la position



les blancs ne pouvaient pas faire mieux que laisser un coup d'avance aux noirs, alors que si les noirs avaient dû rejouer depuis cette position, ils auraient également pu s'assurer un coup d'avance sur les blancs. Cette position n'est pas un nombre, mais elle est infiniment proche du nombre 1 (c'est la somme de 1 et de l'étoile, notée 1*).

0.2 Les blancs commencent

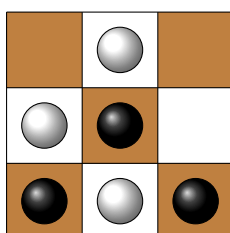
Les blancs, depuis la position initiale



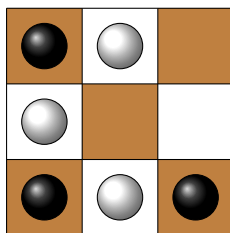
ont trois possibilités : avancer le pion de gauche, avancer le pion de droite (ce qui aboutit à une situation symétrique qu'on ne regardera donc pas), ou prendre le pion noir central.

0.2.1 Les blancs avancent un pion

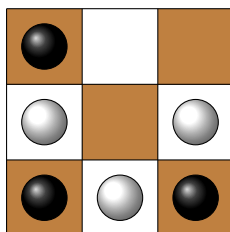
Par exemple s'ils avancent le pion de droite :



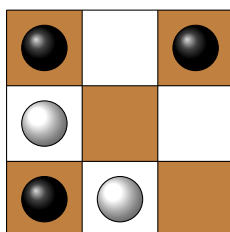
alors les noirs ont intérêt à avancer le pion central pour le mettre à l'abri :



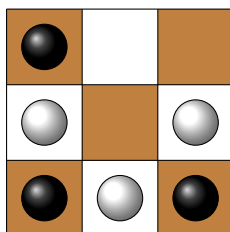
Alors, le seul pion que les blancs peuvent bouger, est celui du haut :



Les noirs peuvent alors gagner en prenant ce pion :

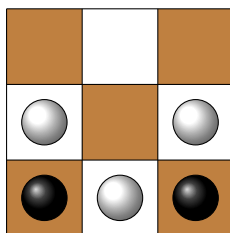


Les blancs, bloqués, ont perdu, alors que les noirs avaient encore 2 coups d'avance sur eux. La position

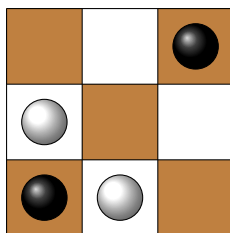


est donc égale au nombre 3, et le premier choix des blancs aboutissait donc à au moins 3. Il était donc peut-être moins catastrophique pour les blancs, de prendre un pion noir dès le début du jeu.

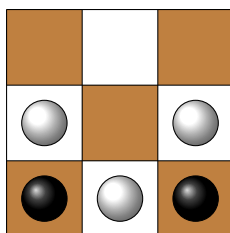
0.2.2 Les blancs prennent un pion



Les noirs ont intérêt à en faire de même (il leur reste toujours un autre pion à bouger, le cas échéant) :



Les blancs ont donc perdu (ils sont bloqués) alors que les noirs avaient encore deux coups d'avance. La position

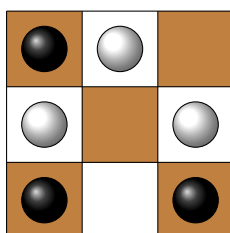


a donc pour valeur, le nombre 3. Les blancs n'avaient donc pas plus intérêt à prendre un pion noir, qu'à avancer un de leurs pions : dans les deux cas ils laissent une avance d'au moins 3 mouvements aux noirs.

0.3 Valeur du jeu alquerque 3 × 3

0.3.1 Le jeu est un nombre

Si les noirs commencent, ils aboutissent au jeu 1^* qui est infiniment proche de 1 :

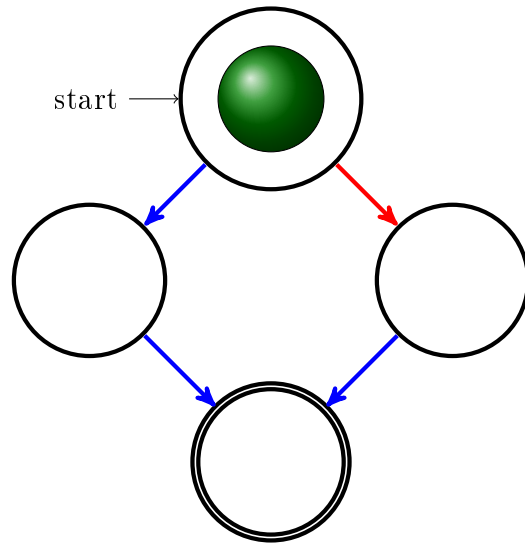


Alors que si les blancs commencent, ils aboutissent à 3. La valeur du jeu est donc un nombre : le nombre 1. C'est en effet le nombre le plus simple qui

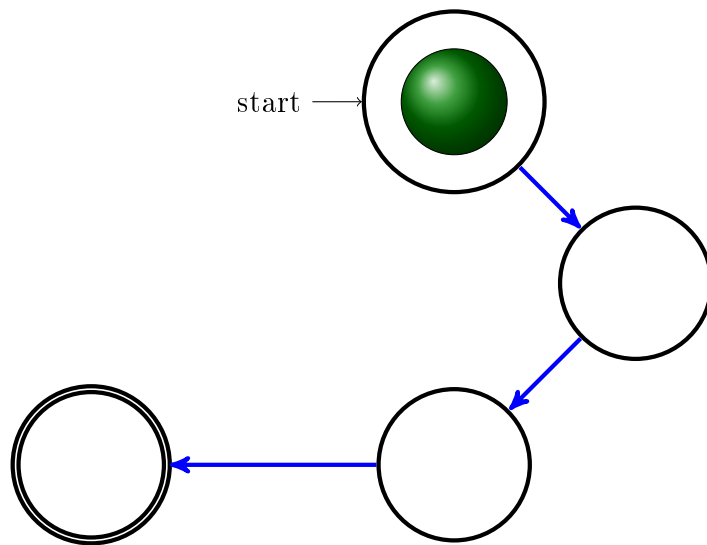
- ne soit pas plus petit que 1^* ,
- ne soit pas plus grand que 3.

0.3.2 Le graphe du jeu

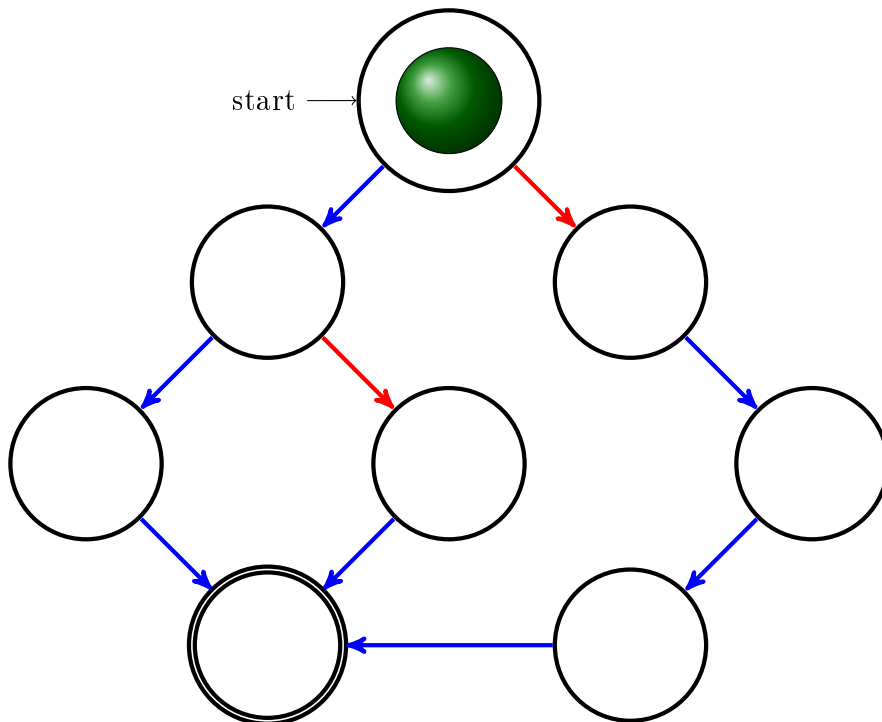
En assimilant les coups des noirs à des flèches bleues, et les coups des blancs à des flèches rouges, on représente le jeu 1^* par ce graphe :



et le jeu 3 par ce graphe :



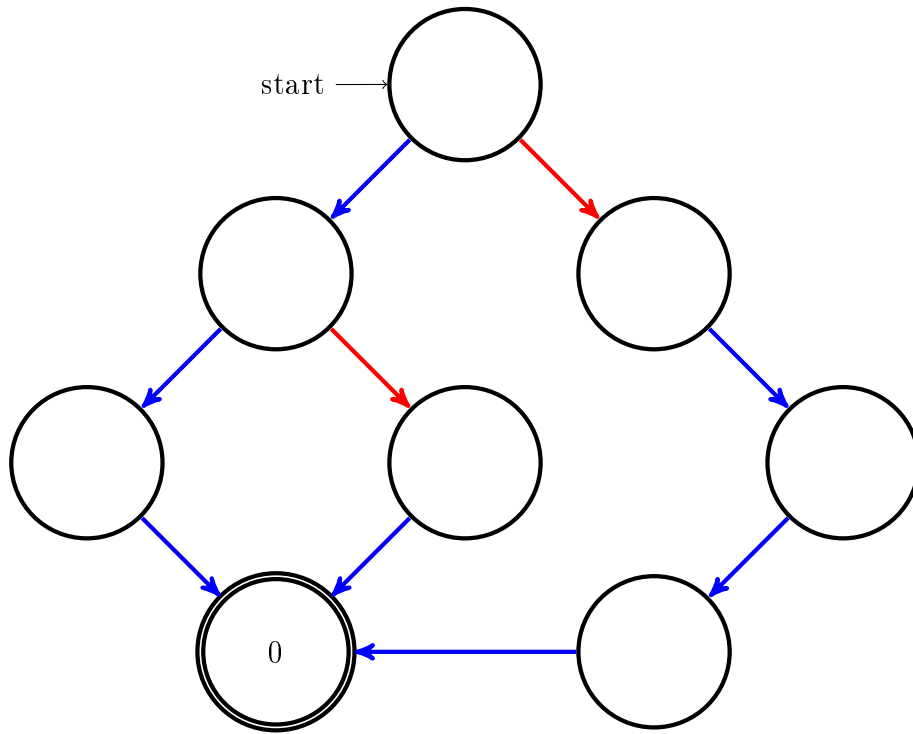
Et finalement la représentation graphique du jeu alquerqueane 3×3 est celle-ci :



On peut, sur ce graphe, recalculer la valeur du jeu.

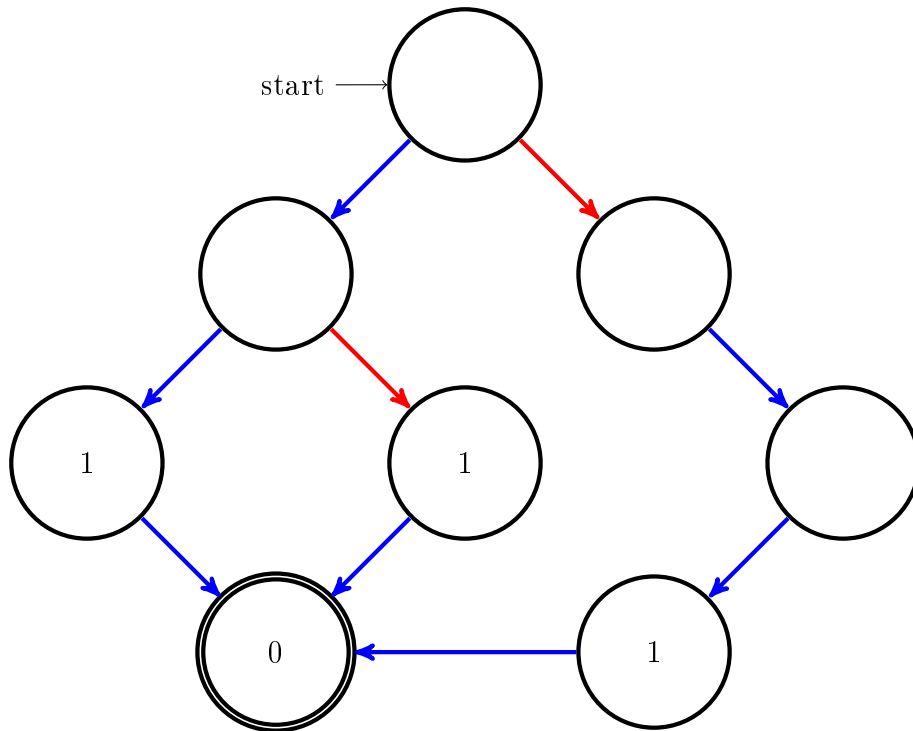
Initialisation

Le sommet d'arrivée est égal à 0 :



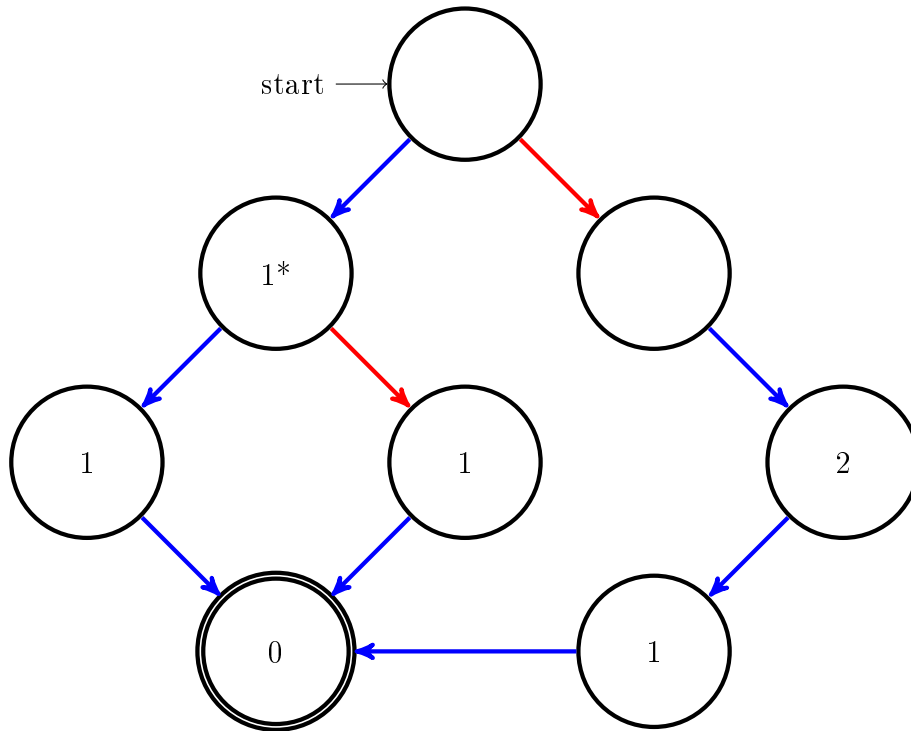
Première étape

Chacun de ses prédécesseurs immédiats ne va vers lui que par une flèche bleue, et vaut donc 1 :



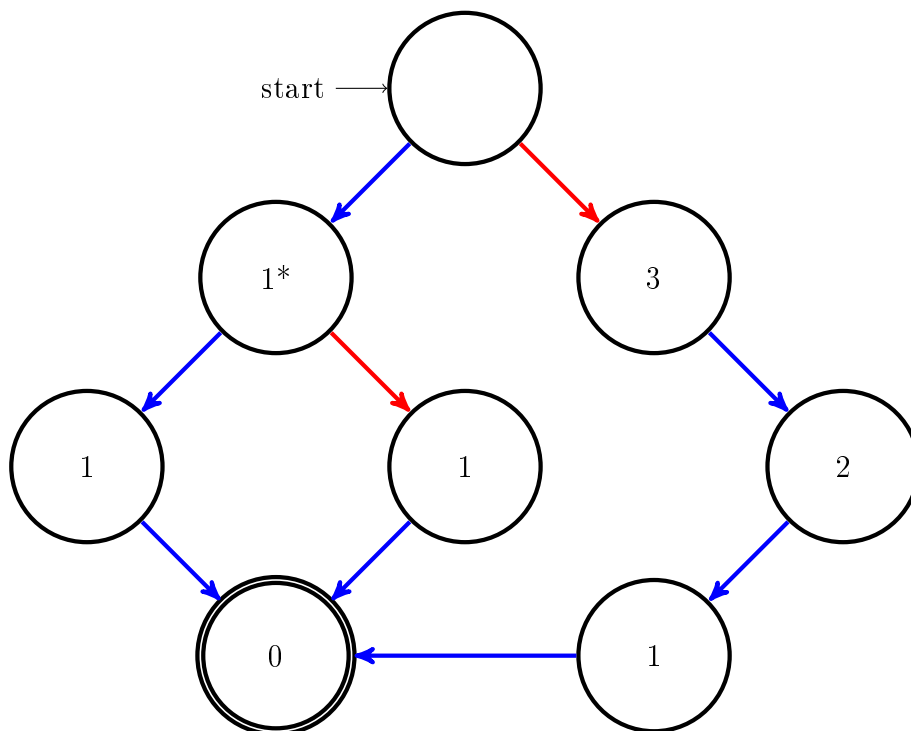
Seconde étape

Il y a un sommet qui mène à 1 par une flèche bleue ou une flèche rouge, il vaut donc 1^* . Et le sommet qui ne mène qu'à 1, et que par une flèche bleue, est égal à 2 :



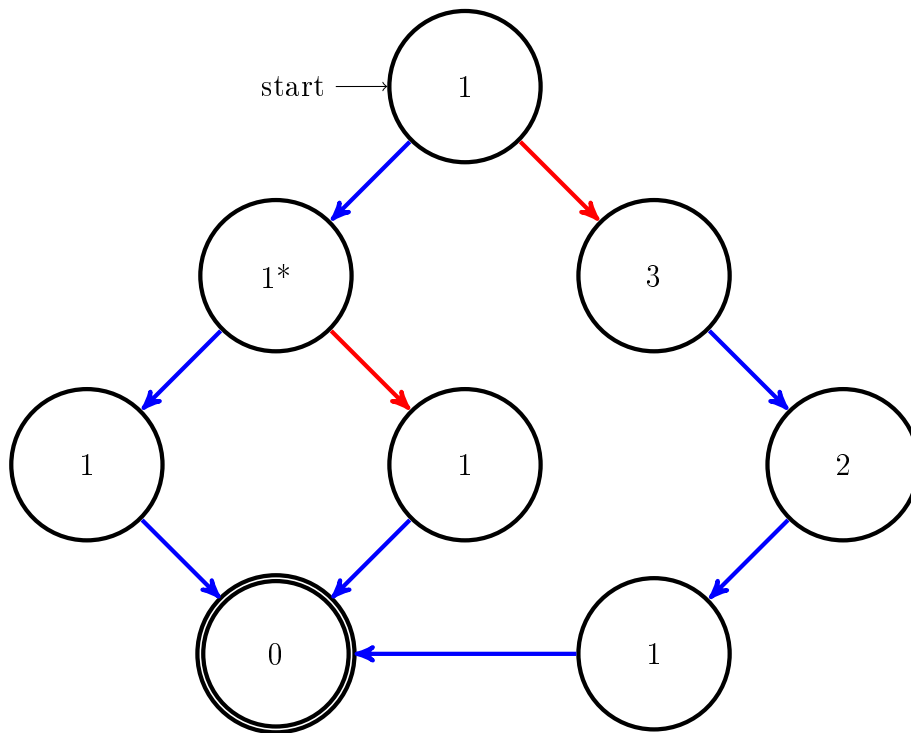
Troisième étape

Le sommet ne menant qu'à 2, et que par une flèche bleue, vaut 3 :



Conclusion

Le jeu vaut donc 1 :



0.4 Plateau du jeu

Pour jouer avec un pion :

