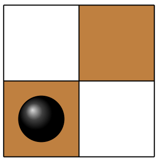
Étude du jeu alquerkonane sur un damier 2×2

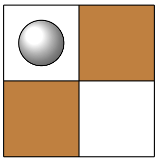
Alain Busser
Institut de Recherche
pour l'Enseignement des Mathématiques
et de l'Informatique
La Réunion

10 janvier 2023

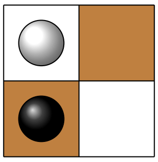
Les noirs avancent leur pion vers le haut et comme ce pion ne peut être que sur une case noire, c'est forcément ici qu'il est au début du jeu :



Et comme les blancs avancent leur pion vers le bas, il ne peut initialement être qu'ici :

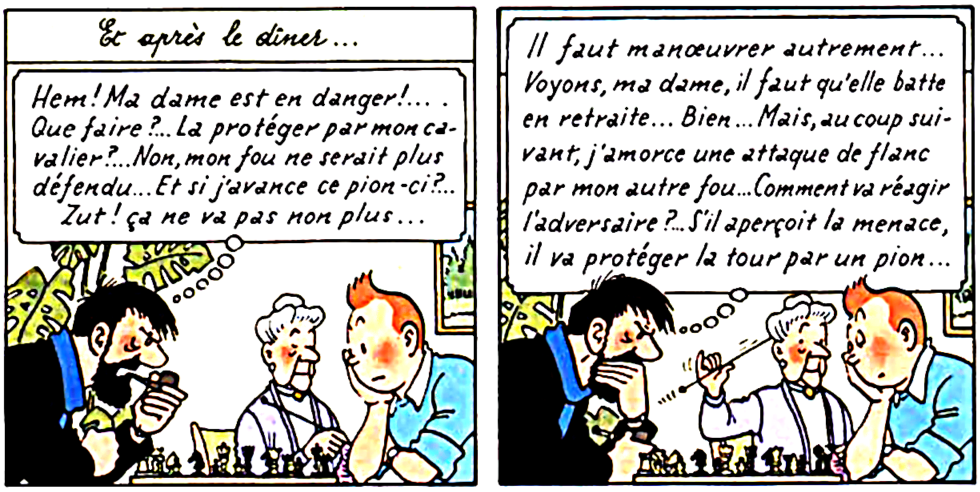


Voici donc la position initiale au jeu alquerkonane 2×2 :



Dans la construction de Conway, la valeur de ce jeu est zéro. Pour le vérifier, on va étudier séparément les cas où ce sont les noirs qui jouent en premier, et les cas où ce sont les blancs qui jouent en premier.

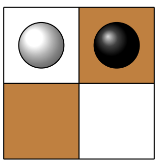
En effet pour évaluer une position de jeu, il ne faut pas seulement regarder quelles sont les options accessibles à chaque jouer, mais aussi lesquelles on peut obtenir à partir de chacune d'entre elles :



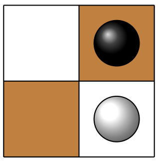
0.1 Graphe du jeu

0.1.1 Les noirs jouent en premier

En fait, l'unique pion noir ne peut pas sauter par dessus un pion blanc (il n'y a pas la place pour cela) donc la seule possibilité pour lui est d'avancer. Et il n'y a qu'une case vers laquelle il peut avancer. On passe donc à



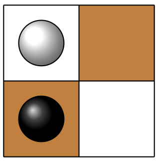
Maintenant c'est aux blancs de jouer. Eux aussi ne peuvent qu'avancer leur pion (vers le bas) donc on arrive à cette position :



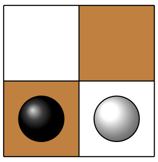
C'est maintenant aux noirs de jouer. Mais leur pion est déjà arrivé au bout et ne peut donc plus avancer : *les noirs ont perdu.* En fait les blancs aussi sont arrivés au bout donc si c'était à eux de jouer, ils auraient perdu aussi.

0.1.2 Les blancs jouent en premier

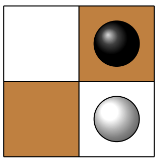
On rappelle la position de départ :



C'est aux blancs de jouer. La seule chose qu'ils puissent faire c'est avancer leur pion (vers le bas), pour aboutir à cette position :



C'est maintenant aux noirs de jouer. Ils ne peuvent faire qu'une chose : avancer leur pion vers le haut :

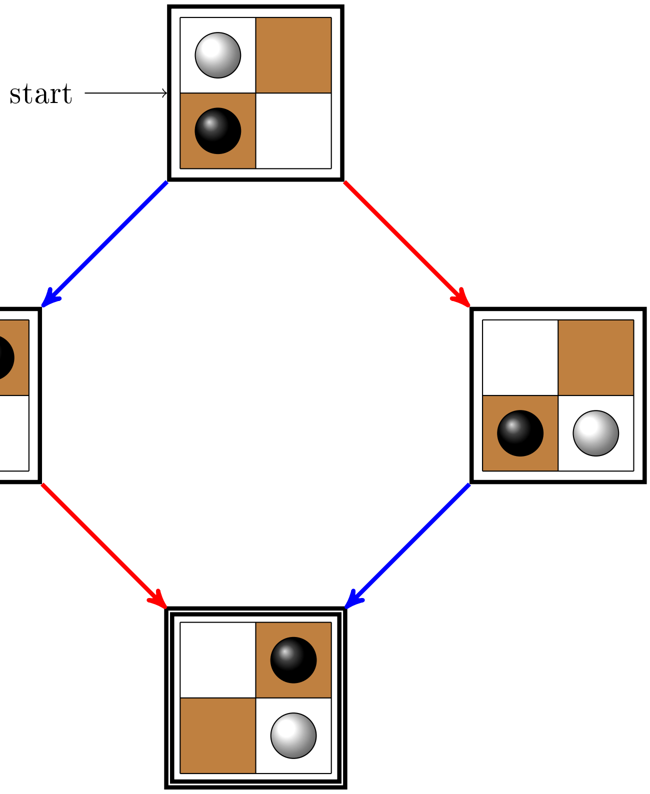


On a déjà vu cette position : aucun joueur ne pouvant bouger, elle est considérée comme nulle par Conway. En tout cas, puisque c'est aux blancs de jouer, ils ne peuvent pas avancer leur pion et donc *les blancs ont perdu.*

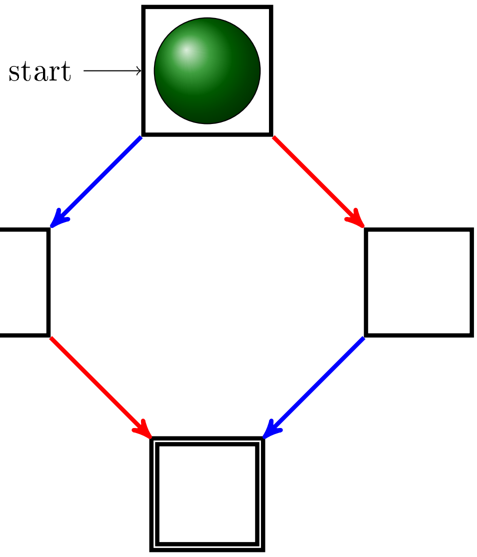
Finalement, le premier qui joue le jeu alquerkonane 2×2 perd ce jeu. Conway lui attribue donc la valeur zéro. On peut voir cela sur le graphe du jeu :

0.1.3 Le graphe du jeu

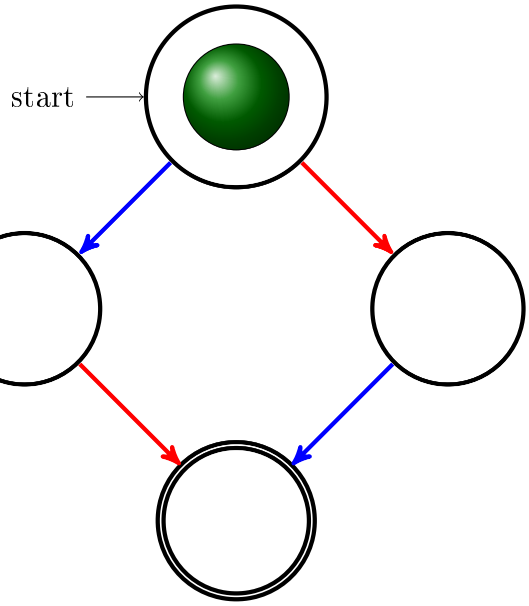
Une flèche bleue veut dire que ce sont les noirs qui jouent, une flèche rouge veut dire que ce sont les blancs qui jouent :



Le jeu alquerkonane 2×2 est donc équivalent à ce jeu de Nim bicolore (les noirs n'ont le droit d'avancer le pion vert que le long d'une flèche bleue, les blancs n'ont le droit d'avancer le pion vert que le long d'une flèche rouge) :



Le double trait en bas signifie qu'aucune flèche ne part de ce sommet : c'est *l'état final* de l'automate. On le voit mieux si on dessine les sommets du graphe en forme de ronds :

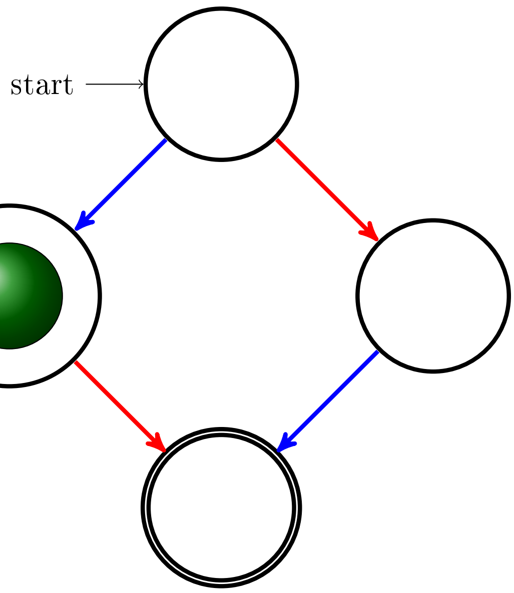


0.2 Un jeu à la Con(way)

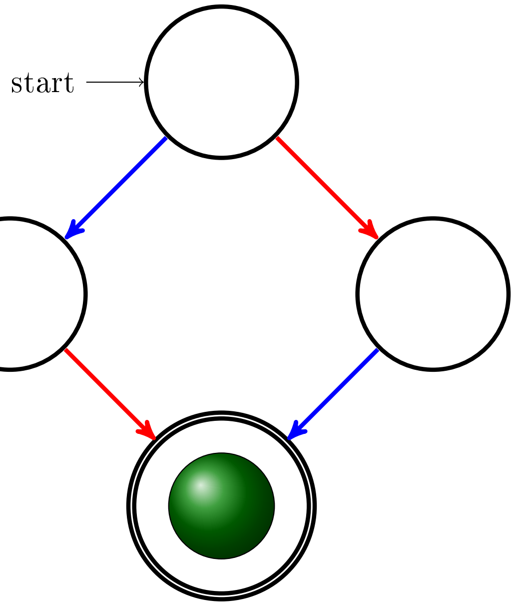
Les joueurs avancent le pion vert, chacun son tour, sur le graphe ci-dessus. Le premier qui ne peut plus avancer l'unique pion, a perdu le jeu.

0.2.1 Les noirs jouent en premier

Comme ils n'ont le droit d'avancer le pion que le long d'une flèche bleue, ils ne peuvent aboutir qu'à ceci :



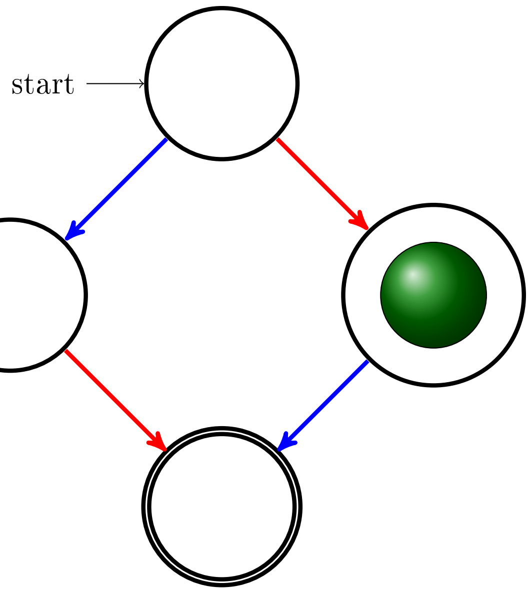
C'est maintenant aux blancs de jouer. Ils avancent alors le pion vert le long de la flèche rouge pour aboutir à la situation finale :



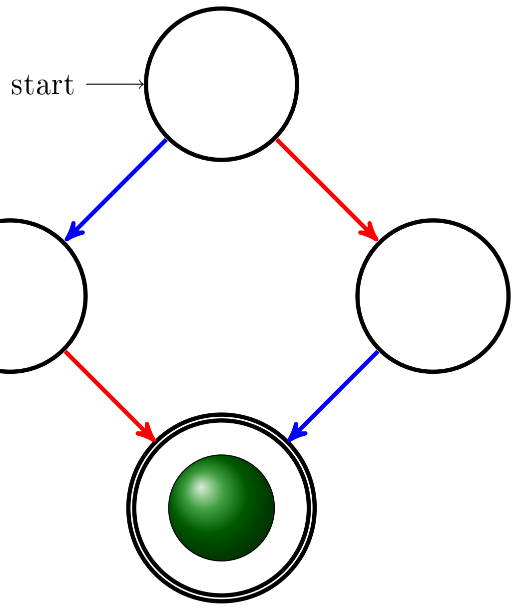
Les noirs devraient jouer mais ne peuvent pas, puisqu'il n'y a aucune flèche bleue partant de l'arrivée : ils ont perdu.

0.2.2 Les blancs jouent en premier

Comme ils ne peuvent avancer le pion vert que le long d'une flèche rouge, ils ne peuvent aboutir qu'à



C'est maintenant aux noirs de jouer. Ils avancent le pion vert le long de la flèche bleue, et arrivent à la situation finale :



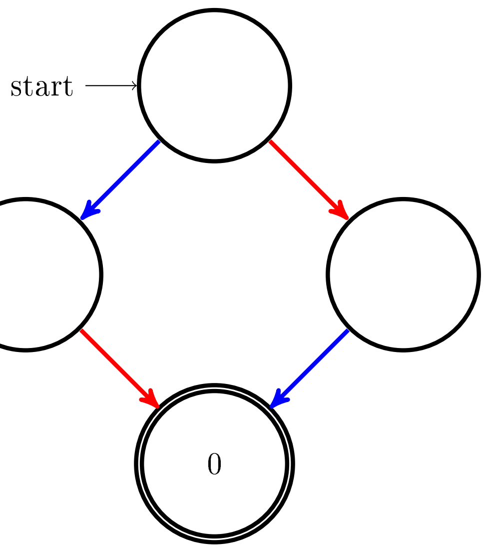
C'est maintenant aux blancs de jouer, mais ils ne peuvent pas avancer le pion le long d'une flèche rouge, car il n'y a aucune flèche rouge partant de l'arrivée. Les blancs ont perdu.

0.3 Analyse du jeu

On peut calculer les valeurs du jeu directement sur le graphe. On part de l'arrivée et on remonte vers le départ.

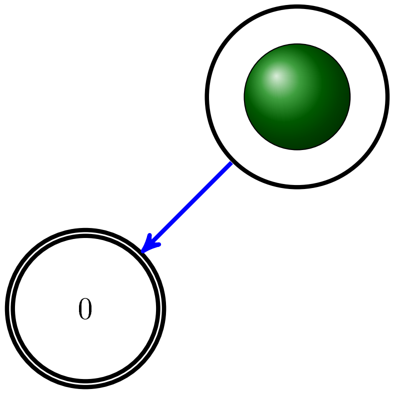
0.3.1 Le nombre 0

Si le pion vert est à l'arrivée, personne ne peut le bouger. Donc si c'est aux noirs de jouer, ils perdent et si c'est aux blancs de jouer, ils perdent. Conway donne à ce genre de (position de) jeu la valeur zéro. On inscrit alors le chiffre 0 dans le sommet d'arrivée :

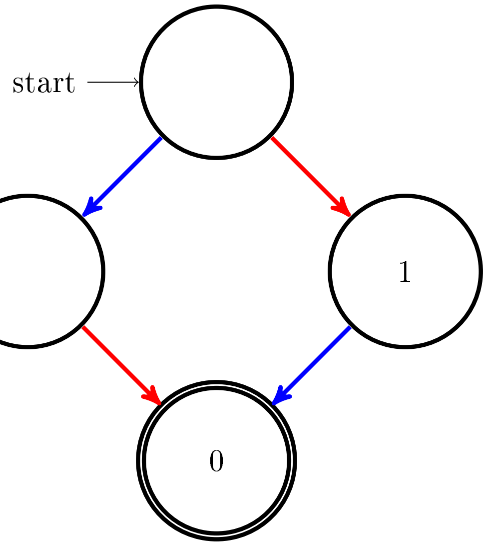


0.3.2 Le nombre 1

Dans ce jeu, les noirs peuvent arriver à 0 (ce qui fait perdre les blancs) alors que les blancs ne peuvent rien faire :

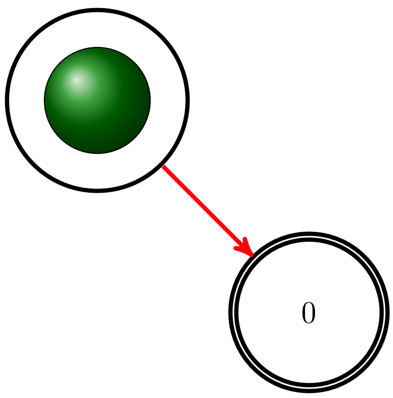


Les noirs ont donc un coup d'avance sur les blancs, et ce jeu vaut 1 (on compte positivement pour les noirs) :

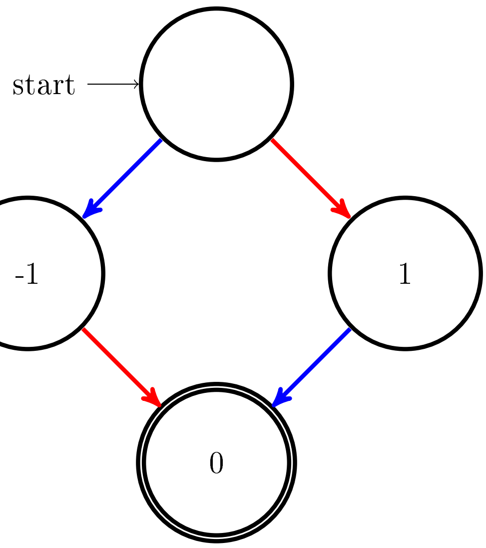


0.3.3 Le nombre -1

Dans ce jeu, les noirs ne peuvent plus rien faire, alors que les blancs peuvent arriver à 0 :



Les blancs ont donc un coup d'avance sur les noirs. Comme on compte positivement du point de vue des noirs, ce jeu a pour valeur -1. On inscrit cette valeur dans le graphe :



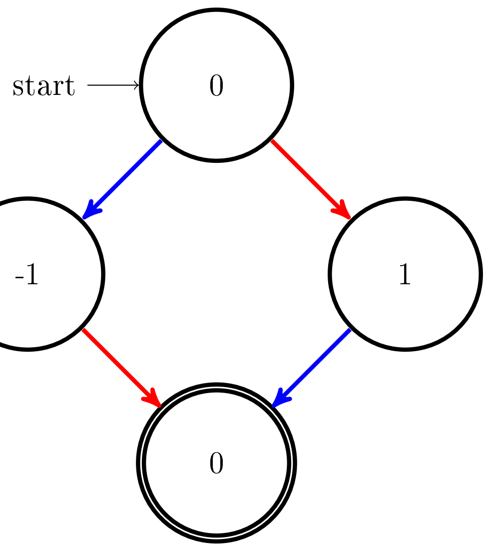
Maintenant, on peut calculer la valeur du sommet de départ, puisqu'on connaît les valeurs auxquelles peuvent arriver les deux joueurs depuis celle-ci : si c'est aux noirs de jouer, ils arrivent à -1 et si c'est aux blancs de jouer ils arrivent à 1.

0.3.4 Et alors ? Et alors ?

Zéro est arrivé ! En effet

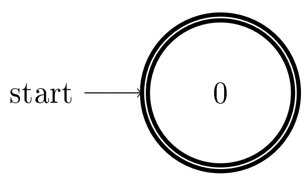
- selon Conway, si toute option des noirs (ici c'est -1) est inférieure à toute option des blancs (ici c'est 1) alors le jeu est un nombre (c'est la définition d'un nombre selon Conway).
- Il s'agit en l'occurrence du nombre le plus simple compris entre -1 et 1 : c'est 0.
- D'ailleurs on a vu plus haut que le prochain joueur est le perdant. C'est ainsi que Conway définissait le nombre 0.

On a donc fini de numéroter le graphe :



0.3.5 Le zen du zéro

Du coup le jeu alquerkonane 2×2 a la même valeur que le jeu



et donc on pouvait tout aussi bien ne pas jouer du tout, puisque le premier qui joue sait qu'il va perdre. On peut dire que le jeu ci-dessus est la forme simplifiée du alquerkonane 2×2. Mais on peut détailler comment on a fait pour aller de zéro pour finalement y retourner.

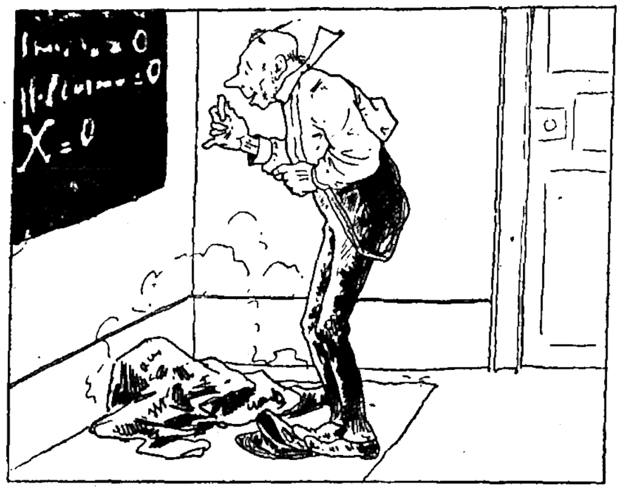
Le principe est simple, du moins tant qu'on est dans des nombres :

- chaque coup des noirs décrémente (fait baisser d'une unité) la valeur du jeu,
- chaque coup des blancs incrémente (fait monter d'une unité) la valeur du jeu.

Les noirs jouent en premier

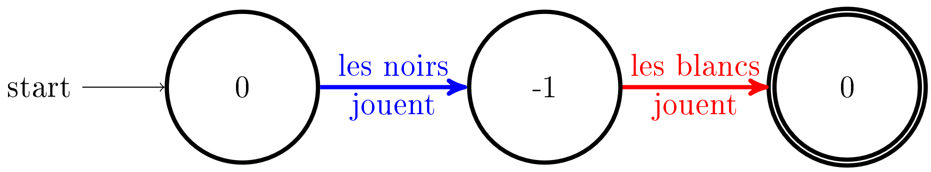
Au début, la valeur du jeu est 0. Mais comme ce sont les noirs qui jouent, ils la font passer à -1. Après cela, les blancs jouent et réaugmentent la valeur du jeu, la refaisant passer à 0.

Tout ça pour revenir à la valeur initiale qui était 0 ! En mathématiques, ce phénomène est bien connu, le résultat d'un calcul est souvent 0 :



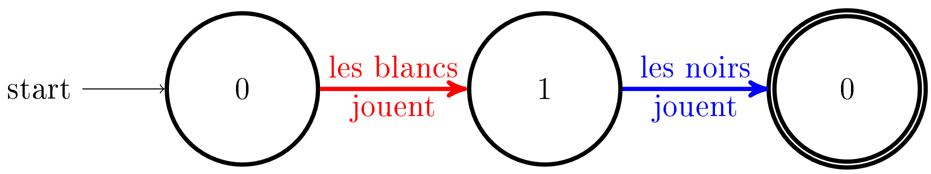
A trois heures et demie, le docteur découvre la valeur de x, l'inconnue cherchée ; ce qui lui cause une joie sans mélange. — Nous prions les esprits superficiels de s'abstenir de toute réflexion sur la valeur de x, et de ne point prétendre que Zéphyrin a beaucoup travaillé pour peu de chose.

On peut résumer l'histoire de cette version du jeu (les noirs jouent en premier) dans un graphe orienté :



Les blancs jouent en premier

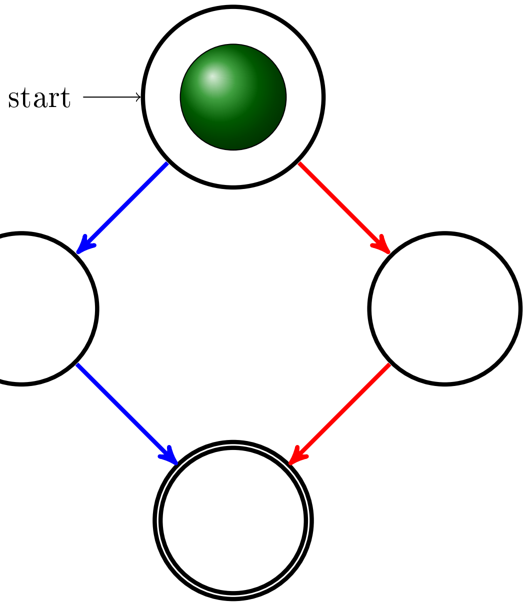
Au début du jeu, sa valeur est 0. Mais comme ce sont les blancs qui jouent, ils la font passer à 1. Mais ensuite les noirs jouent et refont passer la valeur à 0 :



En effet il est bien connu que lorsqu'on grimpe (ici, de 0 à 1) c'est souvent pour redescendre juste après :

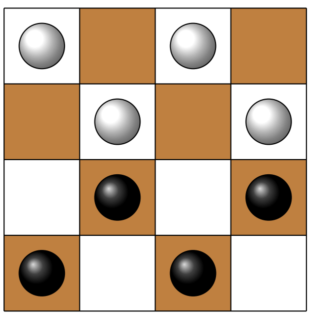
0.3.6 Les jeux ne sont pas tous des nombres

Tant qu'on est sur les graphes, que se passe-t-il si on change juste deux couleurs de flèches ? Comme ici :



- Si c'est aux noirs de jouer, ils arrivent à 1 qui les fait gagner. Ce jeu n'est donc pas négatif puisqu'il n'est pas certain que les blancs gagnent.
- Il n'est pas nul non plus car sinon (si les noirs jouent) les noirs perdraient. Or dans ce cas ils gagnent.
- Si c'est aux blancs de jouer, ils arrivent à -1 qui les fait gagner. Comme il n'est pas certain que les noirs gagnent, ce jeu n'est pas positif non plus.

N'étant ni positif, ni négatif, ni nul, ce jeu n'est donc pas un nombre. Conway le note ± 1.
Conjecture : le jeu alquerkonane 4×4 semble être égal à ± 2.
Sa position initiale est celle-ci :

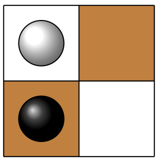


0.4 Résumé

Le jeu alquerkonane 2×2 est égal à zéro. Du moins, sa position de départ est nulle.

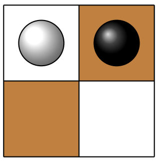
0.4.1 Position de départ

Ce jeu est donc égal à 0 :



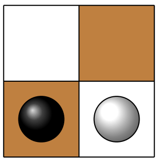
0.4.2 Jeu négatif

Ce jeu est égal à -1 :



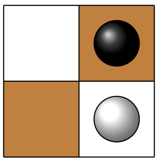
0.4.3 Jeu positif

Ce jeu est égal à 1 :



0.4.4 Position finale

Ce jeu (fin de partie d'alquerkonane 2×2) est aussi égal à 0 :



Sources des illustrations

- Christophe, *L'idée fixe du savant Cosinus*, Armand Colin 1900
- Hergé, *Tintin au Tibet*, Casterman 1963