Les paradoxes de l'infini

Achille et la tortue

• Combien de fois une corde de longueur donnée peut-elle être coupée en deux ?

• Le temps est-il infiniment divisible ou existe-t-il des unités de temps (infimes à notre échelle !) qu'on ne peut couper ?

Ces deux questions travaillent les philosophes et les scientifiques depuis l'Antiquité. Elles interviennent dans le **paradoxe de Zénon d'Élée** (Ve siècle av. J.-C.), qui imagine une course entre **Achille** (héros de l'*Illiade* d'Homère) et une **tortue** :

Achille et Ajax jouant aux dés, amphore du VIe siècle av. J.-C., Musée du Vatican, Rome

Pendant ce temps la tortue prend de l'avance ! Achille pourra-t-il la rattraper ?

Achille a laissé 100 m d'avance à la **tortue**. Il court plus vite mais, pendant qu'il parcourt ces 100 m de retard, la tortue avance de 10 m ; pendant qu'il parcourt ces 10 m, elle avance d'1 m ; pendant qu'il parcourt ce mètre, elle avance de 10 cm... Comment peut-il alors la rejoindre et la dépasser ?

Les mathématiciens ont mis plusieurs siècles pour résoudre ce paradoxe, grâce à la notion de **série convergente** : la somme des durées des parcours successifs d'Achille, quand on les découpe comme ci-dessus, **est finie**, bien que faisant intervenir une infinité de termes. Achille rejoint donc bien la tortue... et il peut la dépasser !

Le paradoxe du barbier

Un barbier se propose de raser ***tous*** les hommes qui ne se rasent pas eux-mêmes et ***seulement*** ceux-là. Le barbier doit-il se raser lui-même ? S'il ne se rase pas lui-même, alors il doit se raser ; s'il se rase lui-même, alors il ne doit pas se raser... On ne peut que conclure à l'impossibilité de l'existence d'un tel barbier.

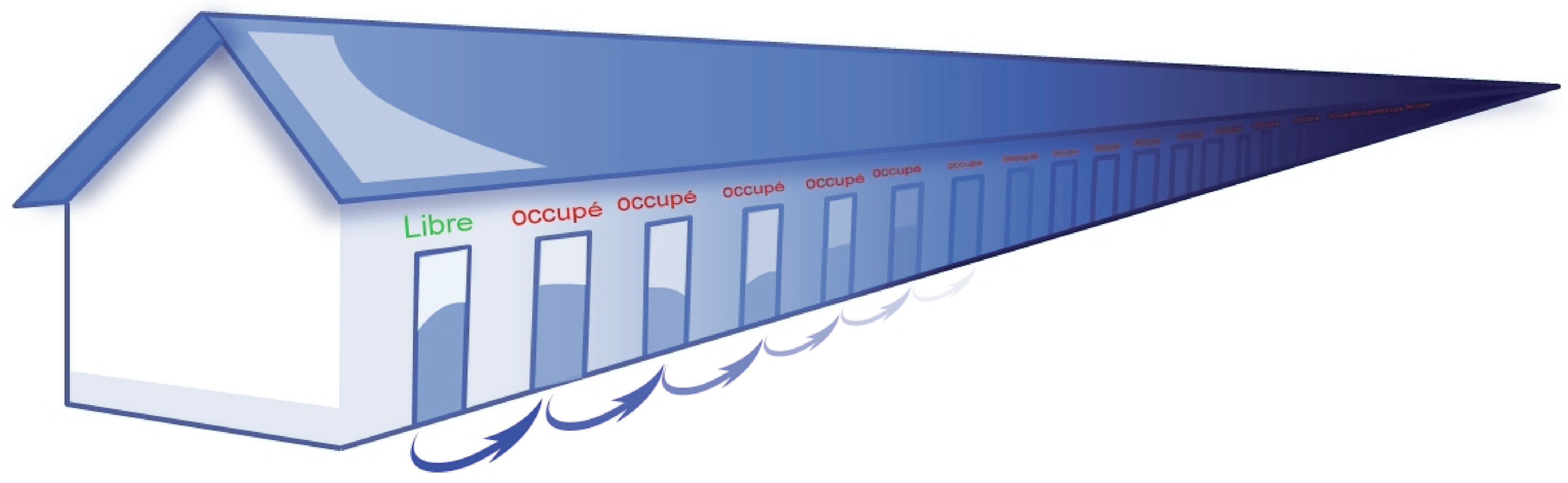
Ce paradoxe dû au logicien **Bertrand Russell** (1872-1970) illustre les difficultés rencontrées par les mathématiciens du début du XXe siècle pour construire les bases axiomatiques qui fondent les mathématiques, en particulier la notion d'*ensemble* : de même qu'il n'existe pas de barbier comme ci-dessus, il ne peut pas exister d'*ensemble de tous les ensembles*.

L'hôtel de Hilbert

Pour définir les nombres entiers naturels (0, 1, 2, 3...), les mathématiciens décrivent leurs propriétés fondamentales, ou *axiomes*, parmi lesquels figure le fait que **chaque nombre a un successeur** (c'est le suivant dans la liste ordonnée de ces nombres).

Pour illustrer cette propriété, imaginez un **hôtel ayant autant de chambres qu'il y a de nombres entiers naturels**, numérotées 1, 2, 3... Imaginez que cet hôtel soit complet (toutes les chambres sont occupées) et qu'un nouveau client arrive. Sera-t-il refoulé (de façon très polie) de l'*hôtel de Hilbert* ? Pas du tout !

L'hôtelier va demander un petit service à chacun des clients déjà installés : changer de chambre pour prendre celle qui a le numéro suivant. Puisque tout nombre a un successeur, les clients déjà installés retrouvent tous une chambre et le nouvel arrivant peut s'installer dans la chambre n°1. Le tour est joué !



L'*hôtel de Hilbert* est complet mais il peut encore accueillir de nouveaux clients... le rêve de beaucoup d'hôteliers ! Il peut même accueillir **une infinité de nouveaux clients**, s'ils sont en nombre **dénombrable**, c'est-à-dire s'ils peuvent être numérotés à l'aide de la suite des nombres entiers. *Comment ? Voir ci-dessous...*

Le tout et la partie

Le *tout* est réputé être plus grand que chacune de ses *parties* mais ce n'est pas toujours le cas, du moins pour les *ensembles infinis* : ainsi, **l'ensemble des nombres entiers naturels « n'est pas plus grand » que celui des nombres pairs**, puisqu'on peut demander à chaque client de l'*hôtel de Hilbert* de prendre la chambre dont le numéro est le double de celle qu'il occupait précédemment, sans que personne se retrouve sans abri...

La Bibliothèque de Babel de Jorge Luis Borgès

Dans cette nouvelle de 1941, l'écrivain argentin imagine une bibliothèque contenant tous les livres de 410 pages possibles. Elle contient donc **tous les ouvrages de cette taille déjà écrits et tous ceux à venir**. Et pourtant elle n'est pas infinie... mais tout de même gigantesque : l'écriture en chiffres du nombre de ses livres ne tiendrait pas dans un de ses livres.

Affiche reprise d'une exposition de l'IREM de Limoges avec l'aimable autorisation de son directeur Stéphane Vinatier

Université de Limoges
IREM Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques

fête de la Science .fr

Université de La Réunion S'ouvrir aux mondes

IREM La Réunion