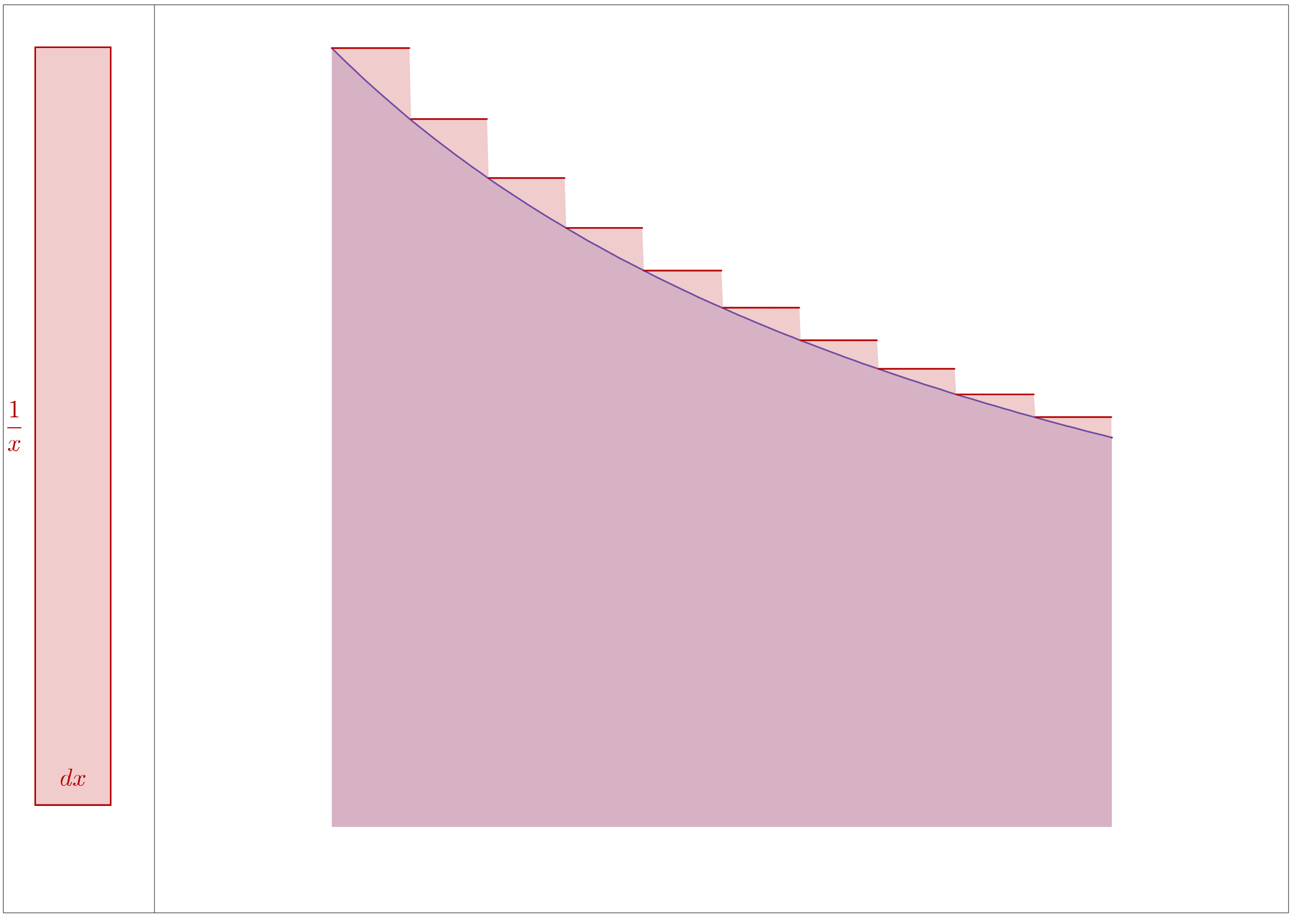
BTS ABM 1
30/11/2017

Corrigé du TP n° 3

Sujet : *Le but du TP est de calculer le logarithme de 2 (intégrale de 1/x entre 1 et 2) par la méthode des rectangles.*

1. Première partie : Présentation de l'algorithme

On a vu la semaine précédente (avec CaRMetal) qu'une intégrale est, d'une certaine manière, une somme, dont les termes sont du type f(x)×dx : En considérant ces termes comme les aires de rectangles de hauteur f(x) et de largeur dx, l'intégrale est approchée par l'aire de l'histogramme ainsi formé. Graphiquement, cela revient à approcher l'aire sous l'hyperbole (en bleu) par celle des rectangles (en rouge). D'où le nom de méthode des rectangles :

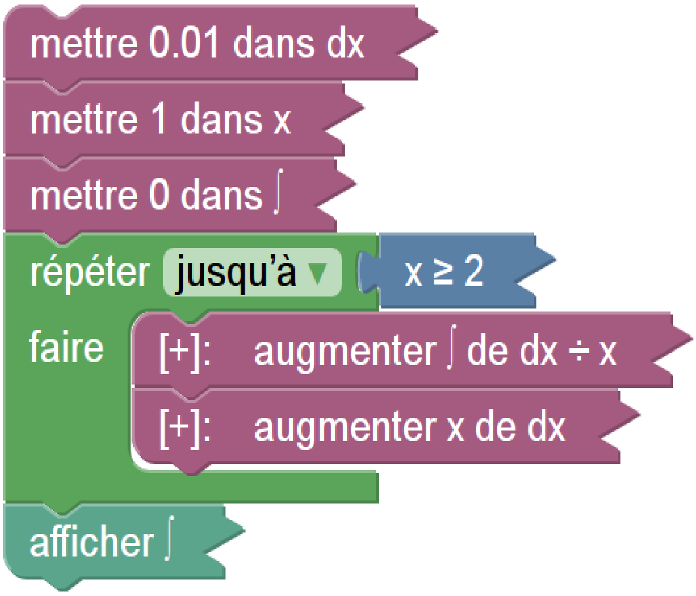


En effet chaque rectangle constituant l'histogramme a la même (petite) largeur notée dx, et une hauteur égale à f(x), x étant l'abscisse des points du bord gauche du rectangle. L'aire d'un rectangle est donc f(x) dx (largeur × hauteur) et l'aire de l'histogramme est égale à la somme des f(x)×dx.

La variable dx est en réalité une constante, dans cette partie du TP. Elle contient par exemple 0,01. Les variables x et ∫ par contre vont être augmentées par petits incréments, la première, par pas de dx jusqu'à ce qu'elle dépasse 2, la seconde, par pas de dx/x puisqu'elle est destinée, à terme, à contenir la somme des dx/x.

- On calcule l'intégrale de 1/x donc f(x)×dx=dx/x dans ce cas.
- On calcule l'intégrale pour x allant de 1 à 2 donc la valeur de départ de x est 1
- et on arrête le calcul dès que x a dépassé 2 (borne supérieure de l'intégrale).
- Au départ (quand x =2), la somme ∫ est initialisée à 0.

L'algorithme, décrit avec Sofus, est donc assez court, même agrémenté d'un affichage final :



En pseudocode, en notant S la variable contenant, à la fin, la valeur approchée de l'intégrale, on a ceci :

```
dx ← 0,01
x ← 1
S ← 0
Jusqu'à ce que x ≥ 2
        S ← S + dx/x
        x ← x + dx
fin de la boucle
```

Pour la programmation de l'algorithme, c'est en général le langage Python qui a été choisi. Le script donne (en Python 3.6) :

```
dx = 0.01
x = 1
S = 0
while x<2:
    S = S + dx/x
    x = x+dx
print(S)
```

2. Seconde partie : Résultats

Avec dx=0,01 le script Python ci-dessus donne le résultat 0.695653430481824. Comme l'exécution du script est rapide, on a le temps d'essayer avec d'autres valeurs de dx pour estimer l'influence de ces valeurs

- sur la précision de l'intégrale ;
- sur la rapidité d'exécution.

On va se concentrer ici sur la précision de l'intégrale, avec ces résultats :

dx	intégrale
0,1	0.7187714031754279
0,01	0.695653430481824
0,001	0.6938972430599569
0,0001	0.6932221811849671
0,00001	0.6931496805649328
0,000001	0.6931479305759216
0,0000001	0.6931472054471943

Note : Le script Python suivant a permis d'automatiser largement le remplissage du tableau :

```
for p in range(1,7):
    dx = 10**(-p)
    x = 1
    S = 0
    while x<2:
        S = S + dx/x
        x = x+dx
    print(dx,",",S)
```

3. Conclusion

On constate que, plus dx est petit, et plus l'intégrale est calculée avec précision. En effet la calculatrice affiche pour ln(2) le nombre 0,6931472 qui correspond à la valeur affichée pour dx=0,0000001 : Ce choix[1] de dx donne un résultat à 7 décimales près.

Par contre pour dx=0,0000001 la boucle est parcourue 10 millions de fois ce qui prend du temps : Pour calculer une intégrale par la méthode des rectangles il y a un compromis à faire entre précision et rapidité.

La méthode des rectangles est facile à programmer et permet d'imaginer que, lorsque dx tend vers 0, la somme tend vers une limite connue : $\int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2) - 0 = \ln(2)$. La méthode des rectangles permet de calculer la valeur approchée d'une intégrale même lorsqu'on ne connaît pas de primitive de la fonction à intégrer.

Enfin elle donne un sens à la notation de l'intégrale et à l'énoncé « somme de f(x) dx » pour désigner celle-ci.

Une façon possible d'améliorer l'algorithme serait d'admettre la possibilité que dx soit variable (tout en restant petit) : On parle alors de méthodes à pas variable, l'une des plus connues étant celle de Gauss.

1 Qui est celui de la calculatrice Ti 82 stat fr