Valeur moyenne d'une fonction continue sur [a , b]

Cet exercice se traite sur calculatrice.

Rappel : le nombre $m=\frac{1}{b-a}\times\int_a^b f(x)dx$,qui est défini pour f continue sur [a , b], s'appelle la valeur moyenne de f sur [a , b].

Pourquoi cette appellation ? L'objectif de cet exercice est de répondre à cette question .

Dans le A) qui suit on peut traiter un des deux exemples ou les deux

A) On pose f(x) = sin(x), a = 0 et b = Π ou bien $f(x) = \frac{\exp(x)}{x}$, a = 0.5 et b = 3

1) Calculer m si ce calcul est faisable sinon le faire à la machine pour $\frac{\exp(x)}{x}$
2) On pose :

$$u_n = \frac{1}{n}\times\left(f(a+\frac{b-a}{n}) + f(a+2\frac{b-a}{n}) + f(a+3\frac{b-a}{n}) +..+ f(a+k\frac{b-a}{n}) +..+ f(a+n\frac{b-a}{n})\right),$$

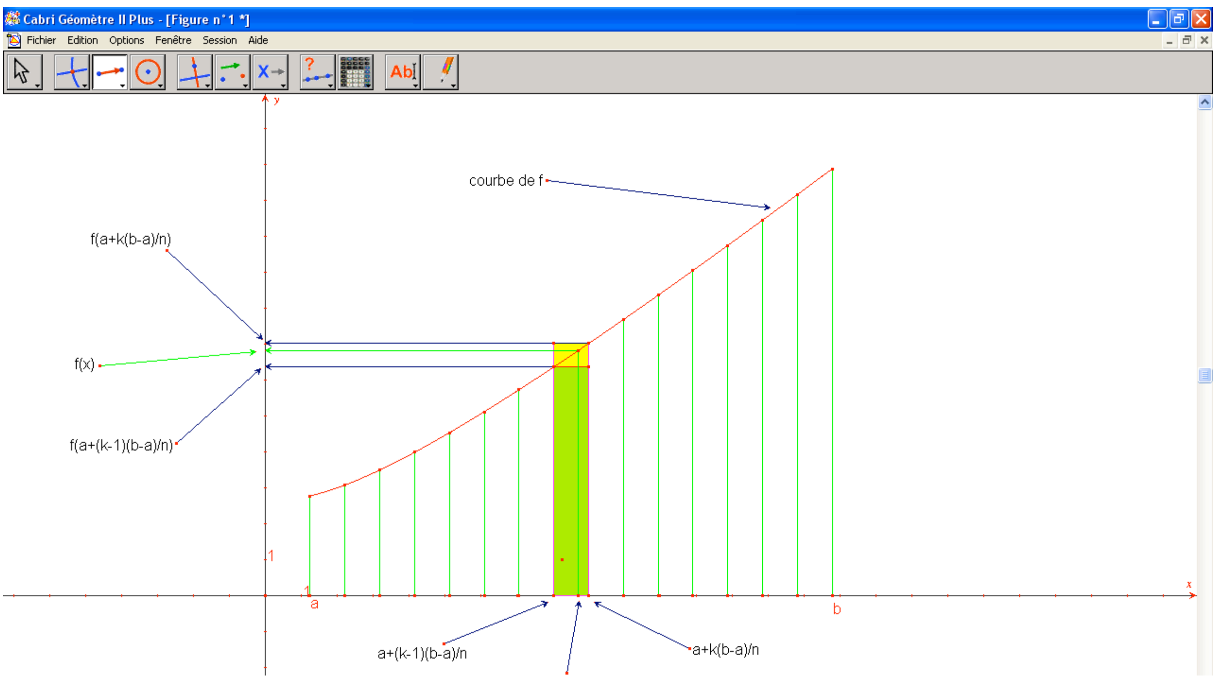
c'est à dire $u_n = \frac{1}{n}\times\sum_{k=1}^{k=n} f(a+k\frac{b-a}{n})$.

Si la calculatrice est à calculs formels on peut calculer directement u_n pour toute valeur de n en utilisant la fonction $\sum$, sinon on utilise la fonction « seq » (en anglais) ou «suite » (en français) de l'application « liste » de la machine pour créer la liste des valeurs $f(a+k\frac{b-a}{n})$ pour k= 1,2,3,…n, ceci pour une valeur de n donnée, u_n est alors égal à la somme de cette liste divisée par n. La machine fait ce calcul.

Calculer u_{100}, u_{500}, u_{900} et comparer avec m.
Faire une conjecture sur la convergence de u_n . (LaTI89, par exemple, donne lim u_n)

B) On veut démontrer cette conjecture en se limitant au cas particulier d'une fonction monotone sur [a , b]. Dans cette partie on va donc supposer f continue monotone croissante (par exemple).

Le dessin ci-dessous est donné pour guider dans la démonstration.



1) Montrer que : si $x \in \left[a+(k-1)\frac{b-a}{n}, a+k\frac{b-a}{n}\right]$ alors $f(a+(k-1)\frac{b-a}{n}) \leq f(x) \leq f(a+k\frac{b-a}{n})$ pour k=1,2,…..,n .
2) En déduire : $\frac{b-a}{n} \times f(a+(k-1)\frac{b-a}{n}) \leq \int_{a+(k-1)\frac{b-a}{n}}^{a+k\frac{b-a}{n}} f(x)dx \leq \frac{b-a}{n} \times f(a+k\frac{b-a}{n})$ pour k=1,2,…..,n .
3) En déduire : $u_n + \frac{f(a)}{n} - \frac{f(b)}{n} \leq m \leq u_n$ <u>Indication</u> : on pourra faire la somme des membres des inégalités (2) pour k=1,2,…..,n .
4) En déduire : $-\frac{f(b)-f(a)}{n} \leq m - u_n \leq 0$

   Conclure.

Commentaires :

1) Ce résultat est valable si la fonction n'est plus supposée monotone mais seulement continue, comme peut le suggérer l'exemple (ou les exemples) traité à la machine.
2) u_n, qui est la moyenne des valeurs $f(a+\frac{b-a}{n})$, $f(a+2\frac{b-a}{n})$, $f(a+3\frac{b-a}{n})$, ..., $f(a+k\frac{b-a}{n})$,…..,$f(a+n\frac{b-a}{n})$ converge donc vers m, d'où l'appellation de « valeur moyenne de f »

Compétences TICE :

- utilisation des listes de la calculatrice et de leurs fonctionalités (Casios à calculs non formels, TI 82, 83, 84), ou bien utilisation de la fonction "$\sum$" et de la fonction "lim" ,sur TI 89 par exemple.
- Calcul d'un intégrale avec la machine

Compétences mathématiques :

- Fonctions
- Propriétés de l'intégrale
- Suites