Valeur moyenne d'une fonction continue sur [a , b]

Cet exercice se traite sur calculatrice.

Rappel : le nombre $m=\frac{1}{b-a}\times\int_a^b f(x)dx$,qui est défini pour f continue sur [a , b], s'appelle la valeur moyenne de f sur [a , b].

Pourquoi cette appellation ? L'objectif de cet exercice est de répondre à cette question.

A) On pose f(x) = sin(x), a = 0 et b = Π

1) Calculer m, le calcul pouvant éventuellement se faire à la machine.
2) On pose :

$u_n = \frac{1}{n}\times(f(a+\frac{b-a}{n}) + f(a+2\frac{b-a}{n}) + f(a+3\frac{b-a}{n}) +..+ f(a+k\frac{b-a}{n})+..+f(a+n\frac{b-a}{n}))$,

c'est à dire $u_n = \frac{1}{n}\times\sum_{k=1}^{k=n} f(a+k\frac{b-a}{n})$.

Si la calculatrice est à calculs formels on peut calculer directement u_n pour toute valeur de n en utilisant la fonction « $\sum$ », sinon on utilise la fonction « seq » (en anglais) ou « suite » (en français) de l'application « liste » de la machine pour créer la liste des valeurs f(a +k $\frac{b-a}{n}$) pour k= 1,2,3,…n, ceci pour une valeur de n donnée, u_n est alors égal à la somme de cette liste divisée par n. La machine fait ce calcul.

Calculer u_{100}, u_{500}, u_{900} et comparer avec m.

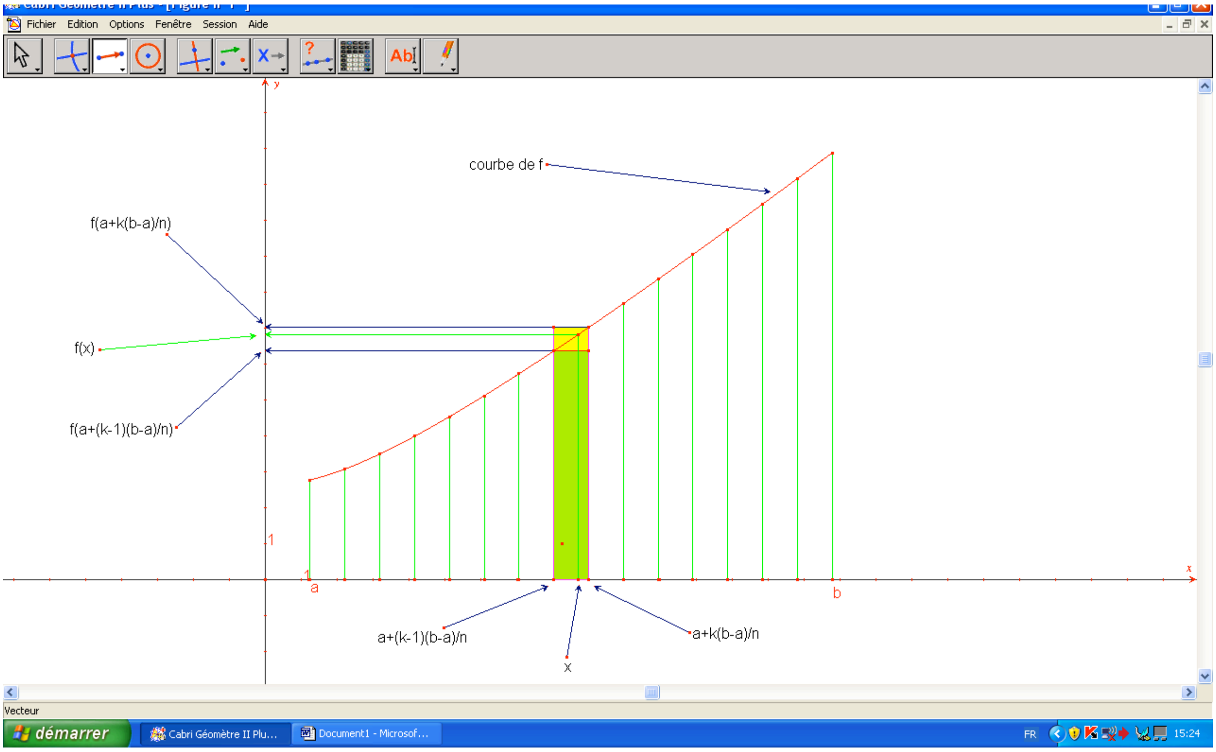
$\boxed{\text{Appeler l'examinateur pour lui proposer la solution, sinon lui demander de l'aide}}$

3) Refaire ce qui a été fait précédemment avec f(x) = $\frac{\exp(x)}{x}$, a = 0.5, b = 3 , le calcul de l'intégrale se faisant, cette fois-ci, à la machine
4) Faire une conjecture sur la convergence de u_n .

   Remarque : LaTI89, par exemple, donne lim u_n

B) On veut démontrer cette conjecture en se limitant au cas particulier d'une fonction monotone sur [a , b]. Dans cette partie on va donc supposer <u>f</u> <u>continue</u> <u>monotone</u> <u>croissante</u> (par exemple).

Le dessin ci-dessous est donné pour guider dans la démonstration.



1) Montrer que : si $x \in \left[a+(k-1)\frac{b-a}{n}, a+k\frac{b-a}{n}\right]$ alors $f(a+(k-1)\frac{b-a}{n}) \leq f(x) \leq f(a+k\frac{b-a}{n})$ pour $k=1,2,\ldots,n$.

2) En déduire : $\frac{b-a}{n} \times f(a+(k-1)\frac{b-a}{n}) \leq \int_{a+(k-1)\frac{b-a}{n}}^{a+k\frac{b-a}{n}} f(x)dx \leq \frac{b-a}{n} \times f(a+k\frac{b-a}{n})$

pour $k=1,2,\ldots,n$.

3) En déduire : $u_n + \frac{f(a)}{n} - \frac{f(b)}{n} \leq m \leq u_n$ <u>Indication</u> : on pourra faire la somme des membres des inégalités (2) pour $k=1,2,\ldots,n$.

4) En déduire : $-\frac{f(b)-f(a)}{n} \leq m - u_n \leq 0$

Conclure.

Appeler l'examinateur pour lui proposer les solutions, sinon lui demander de l'aide

Commentaires :

1) Ce résultat est valable si la fonction n'est plus supposée monotone mais seulement continue, comme peuvent le suggérer les exemples traités à la machine.
2) u_n, qui est la moyenne des valeurs $f(a+\frac{b-a}{n})$, $f(a+2\frac{b-a}{n})$, $f(a+3\frac{b-a}{n})$, ..., $f(a+k\frac{b-a}{n})$,.....,$f(a+n\frac{b-a}{n})$ converge donc vers m, d'où l'appellation de « valeur moyenne de f »

<u>*Production demandée :*</u>

- les deux exemples traités à la machine
- Les réponses aux questions 1 2 3 4 de mathématiques