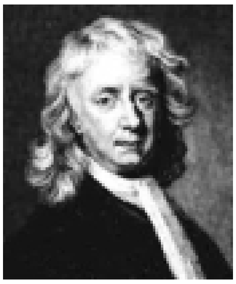
IUFM de La Réunion
Préparation au CAPES de mathématiques

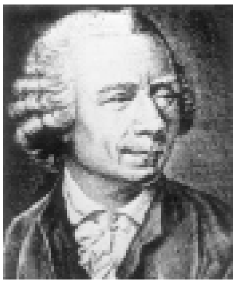
Exercices d'analyse

Dominique Tournès
2000/2001


Newton


Leibniz


Taylor


Euler


Lagrange


Legendre


Fourier


Gauss


Cauchy


Abel


Dirichlet


Weierstrass


Riemann


Lipschitz


Runge


Lebesgue

Je consacrerai toutes mes forces à répandre de la lumière sur l'immense obscurité qui règne aujourd'hui dans l'Analyse. Elle est tellement dépourvue de tout plan et de tout système, qu'on s'étonne seulement qu'il y ait tant de gens qui s'y livrent, et ce qui pis est, elle est absolument dépourvue de rigueur. (Abel 1826)

Table des matières

1 Séries numériques

> Pour moi, j'avoue que tous les raisonnements fondés sur les séries qui ne sont pas convergentes me paraissent très suspects, même quand les résultats s'accorderaient avec des vérités connues d'ailleurs. (D'Alembert 1768)

1.1 Critère de condensation de Cauchy. Séries de référence (Cauchy 1821)

a) Soit u une suite décroissante de réels positifs. Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum 2^n u_{2^n}$ sont de même nature.

b) Utiliser ce critère pour déterminer la nature des *séries de Riemann* $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ et des *séries de Bertrand* $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$.

1.2 Exemples de séries à termes positifs

Déterminer la nature des séries suivantes :

$$\text{a) } \sum \frac{n!}{n^n}\ ;\quad \text{b) } \sum \frac{n^n}{n!\, a^n}\ (a > 0)\ ;\quad \text{c) } \sum \left(\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n} \right)\ ;\quad \text{d) } \sum \left(\frac{n^2 - 6n + 3}{n^2 - 4n + 2} \right)^{n^2}.$$

1.3 Exemples de séries à termes quelconques

Déterminer la nature des séries suivantes :

$$\text{a) } \sum \frac{(-1)^n}{(\ln n)\sqrt[n]{n}}\ ;\quad \text{b) } \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}\ ;\quad \text{c) } \sum \cos\left(\pi n^2 \ln \frac{n}{n-1} \right)\ ;$$

$$\text{d) } \sum \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}\ (\alpha > 0,\ \theta \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}).$$

1.4 Produit de Cauchy de deux séries (Cauchy 1821)

a) On appelle *produit de Cauchy* des séries $\sum_{n \geq 0} a_n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n$ la série $\sum_{n \geq 0} c_n$ dont le terme général est défini par $c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$. Si les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes, montrer qu'il en va de même pour leur produit de Cauchy et qu'on a l'égalité

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \right).$$

b) Retrouver, pour tous nombres complexes x et y, la formule $e^{x+y} = e^x e^y$.

c) Montrer qu'il existe une unique suite a de réels positifs telle que, au sens du produit de Cauchy, on ait l'égalité formelle

$$\left(\sum_{i=0}^{+\infty} (-1)^i a_i \right)^2 = \sum_{i=0}^{+\infty} (-1)^i.$$

Étudier la série $\sum (-1)^i a_i$.

1.5 Règle de Gauss. Série hypergéométrique (Gauss 1813)

a) Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{1}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Montrer que cette série diverge.

b) On considère la série de terme général

$$u_n = \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)}{n!\,\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n-1)}\,z^n,$$

où $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\backslash(-\mathbb{N})$ et $z \in \mathbb{C}$. Pour quelles valeurs de $(\alpha, \beta, \gamma, z)$ cette série est-elle absolument convergente ? semi-convergente ? divergente ?

1.6 Calcul approché de la somme d'une série. Accélération de convergence

a) Calculer la valeur exacte de $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$, de $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ et, plus généralement, de $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)\dots(n+k)}$.

b) Calculer une valeur approchée de $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2+1}$ à la précision 10^{-4} en majorant le reste par une intégrale. Accélérer la convergence en écrivant

$$\frac{1}{n^2+1} = \frac{\alpha}{n(n+1)} + \frac{\beta}{n(n+1)(n+2)} + u_n, \quad \text{avec } u_n = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^4}\right).$$

1.7 Calcul d'un chiffre isolé de π (Plouffe 1995)

a) Montrer que, pour tout entier naturel k non nul,

$$\sqrt{2}^k \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{x^{k-1}}{1-x^8}\,dx = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{16^i(8i+k)}.$$

b) En déduire la *formule de Simon Plouffe* :

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{16^i}\left(\frac{4}{8i+1} - \frac{2}{8i+4} - \frac{1}{8i+5} - \frac{1}{8i+6}\right) = \pi.$$

c) Utiliser cette série pour déterminer la cinquième décimale de π sans calculer les précédentes.

1.8 Inégalité de Carleman (Carleman 1923)

Soit $\sum_{n\geq 1} u_n$ une série convergente à termes positifs. Pour tout $n \geq 1$, on pose $v_n = (u_1 u_2 \dots u_n)^{1/n}$.

a) Établir les inégalités

$$v_n \leq \left(\frac{1}{n!}\right)^{1/n} \frac{\sum_{k=1}^n k u_k}{n} \leq e\,\frac{\sum_{k=1}^n k u_k}{n(n+1)}.$$

b) Montrer que la série $\sum v_n$ est convergente et que $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n \leq e \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$. Montrer enfin que dans cette inégalité, la constante e est la meilleure possible.

1.9 Retour aux séries de référence

Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs et soit $\alpha > 0$.

a) On suppose que la série $\sum u_n$ est divergente. Pour tout n, on pose $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$. Étudier en fonction du paramètre α la nature de la série $\sum \frac{u_n}{S_n^\alpha}$.

b) On suppose que la série $\sum u_n$ est convergente. Pour tout n, on pose $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$. Étudier en fonction du paramètre α la nature de la série $\sum \frac{u_n}{R_{n-1}^\alpha}$.

c) En appliquant les résultats de la question a) avec $u_n = 1$ puis avec $u_n = n$, retrouver la nature des séries de Riemann et de Bertrand.

2 Intégrales généralisées

> Dans le calcul intégral, il m'a paru nécessaire de démontrer généralement l'existence des intégrales ou fonctions primitives avant de faire connaître leurs diverses propriétés. (Cauchy 1823)

2.1 Exemples d'intégrales généralisées

Étudier la nature des intégrales suivantes :

$$\text{a) } \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sh} \alpha t}{\operatorname{sh} t}\, dt \;; \quad \text{b) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x-a)^2+b^2} \;; \quad \text{c) } \int_0^{+\infty} \sin\left(x+\frac{1}{x}\right) \frac{dx}{\sqrt{x}} \;;$$

$$\text{d) } \int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{t^\alpha}\, dt \;; \quad \text{e) } \int_0^{+\infty} \left(\sqrt[3]{x^3+\frac{3}{2}x^2+ax} - \sqrt{x^2+x+1}\right) dx \;;$$

$$\text{f) } \int_1^{+\infty} \left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1/x} - a - \frac{b}{x}\right) dx \;;$$

2.2 Conditions nécessaires de convergence

Soit f une application de $[0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$, localement intégrable, telle que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f$ converge.

a) Montrer que si f admet une limite en $+\infty$, cette limite ne peut être que 0. Trouver des exemples dans lesquels f n'admet pas de limite en $+\infty$.

b) Montrer que si f est uniformément continue, alors $\lim_{+\infty} f = 0$.

c) Montrer que si f est monotone, alors $\lim_{+\infty} f = 0$; plus précisément, montrer que dans ce cas, au voisinage de $+\infty$, $f(x) = \mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)$.

2.3 Un ensemble de définition

Quel est l'ensemble de définition de la fonction

$$x \mapsto \int_x^1 \frac{1}{\sqrt{t(t-x)(1-t)}}\, dt \ ?$$

2.4 Recherche d'équivalents

Justifier les équivalents suivants :

$$\text{a) } \int_x^1 \frac{dt}{\ln(1+t)} \underset{0}{\sim} -\ln x \;; \quad \text{b) } \int_{\sqrt{x}}^{+\infty} e^{-t^2} dt \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{2\sqrt{x}} \;; \quad \text{c) } \int_0^1 \frac{t^x\, dt}{1+t} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2x}.$$

2.5 Intégrales de Froullani

Soit f une application continue de $[0,+\infty[$ dans $\mathbb{C}$, et soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$.

a) On suppose que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x}\, dx$ converge. Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\, dx = f(0) \ln \frac{b}{a}$$

(utiliser le critère de Cauchy et la relation $\int_\alpha^\beta - \int_\gamma^\delta = \int_\alpha^\gamma - \int_\beta^\delta$).

b) On suppose maintenant que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = M < +\infty$. Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = (f(0)-M)\ln\frac{b}{a}.$$

c) Appliquer ce qui précède aux intégrales

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx \ ; \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\tan^{-1}(ax)-\tan^{-1}(bx)}{x}\,dx \ ;$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax)-\cos(bx)}{x}\,dx \ ; \qquad \int_0^{+\infty} \ln\frac{p+q\,e^{-ax}}{p+q\,e^{-bx}}\,\frac{dx}{x}.$$

2.6 Intégrale de Gauss (Gauss 1809)

a) Montrer la convergence de l'*intégrale de Gauss*

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx.$$

b) Justifier les inégalités $1-x^2 \le e^{-x^2}$ sur $[0,1]$ et $e^{-x^2} \le \frac{1}{1+x^2}$ sur $[0,+\infty[$. En déduire que, pour tout entier $n \ge 1$,

$$\sqrt{n}\int_0^1 (1-x^2)^n\,dx \le I \le \sqrt{n}\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx.$$

c) Calculer la valeur de I à partir de ces inégalités (utiliser le résultat suivant concernant les intégrales de Wallis : $\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$).

2.7 Intégrale de Fresnel (Fresnel 1814)

a) Montrer la convergence de l'*intégrale de Fresnel*

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt.$$

b) Pour tout entier $n \ge 1$, calculer $\displaystyle\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kt$, puis $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt$.

c) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}\right)\sin(n+\tfrac{1}{2})t\,dt = 0$. En déduire la valeur de I.

2.8 Une inégalité de Hardy (Hardy 1920)

Soit f une application continue de $[0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$, telle que l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} f^2$ converge. Pour tout $x \ge 0$, on pose $g(x) = \int_0^x f$. Montrer que l'intégrale

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{g^2(x)}{x^2}\,dx$$

converge et que $J \le 4I$. La constante 4 peut-elle être améliorée ?

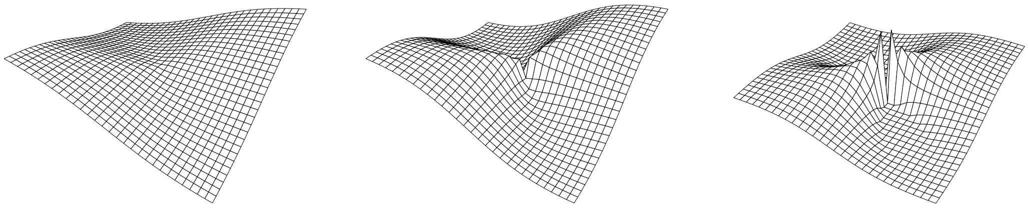
3 Fonctions de plusieurs variables

> Newton dépassait de beaucoup Leibniz comme mathématicien. Mais Leibniz a donné au nouveau calcul en quelque sorte le langage et l'écriture, de manière à le rendre accessible à tout le monde. (Du Pasquier 1927)

3.1 Les mystères de la différentiabilité

Pour $\alpha \geq 0$, on considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{xy}{(x^2+y^2)^\alpha} \quad \text{si } (x,y) \neq (0,0), \qquad f(0,0) = 0.$$



La surface $z = f(x,y)$ au voisinage de $(0,0)$ pour $\alpha = 0,4\ ;\ 0,8\ ;\ 1,2$

Montrer que

a) $\partial f/\partial x$ et $\partial f/\partial y$ existent partout et sont telles que, pour tous réels a et b, les applications $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,b)$ et $y \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(a,y)$ sont continues ;

b) si $\alpha \geq 1/2$, les applications $\partial f/\partial x$ et $\partial f/\partial y$ sont discontinues en (0,0) ;

c) f est continue à l'origine si et seulement si $\alpha < 1$;

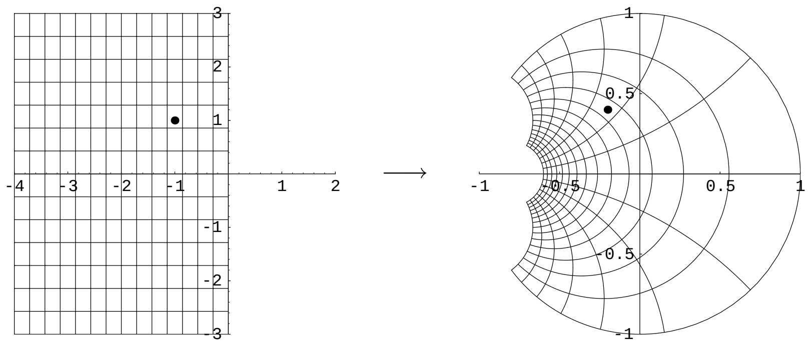
d) f est différentiable à l'origine si et seulement si $\alpha < 1/2$.

3.2 Transformation de Cayley (Cayley 1859)

Montrer que l'application

$$(x,y) \mapsto \left(\frac{1-x^2-y^2}{(1-x)^2+y^2}, \frac{2y}{(1-x)^2+y^2} \right)$$

est un difféomorphisme du demi-plan gauche $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 /\ x < 0\}$ sur le disque ouvert $\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 /\ u^2+v^2 < 1\}$.



3.3 Contre-exemples au théorème de Schwarz (Schwarz 1873, Peano 1884)

Pour les applications suivantes de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, vérifier que les dérivées partielles $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ existent mais sont distinctes :

a) $f(x,y) = x^2 \tan^{-1} \frac{y}{x} - y^2 \tan^{-1} \frac{x}{y}$ si $xy \neq 0$, et $f(x,y) = 0$ si $xy = 0$;

b) $f(x,y) = xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$, et $f(0,0) = 0$.

3.4 Deux équations aux dérivées partielles

a) Résoudre l'équation $2\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$, où f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ (poser $u = x + ay$, $v = x + by$, avec a et b à déterminer).

b) Résoudre l'équation $x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 4\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$, où f est de classe C^2 sur le demi-plan $x > 0$ (poser $u = y + 4\ln x$, $v = y$).

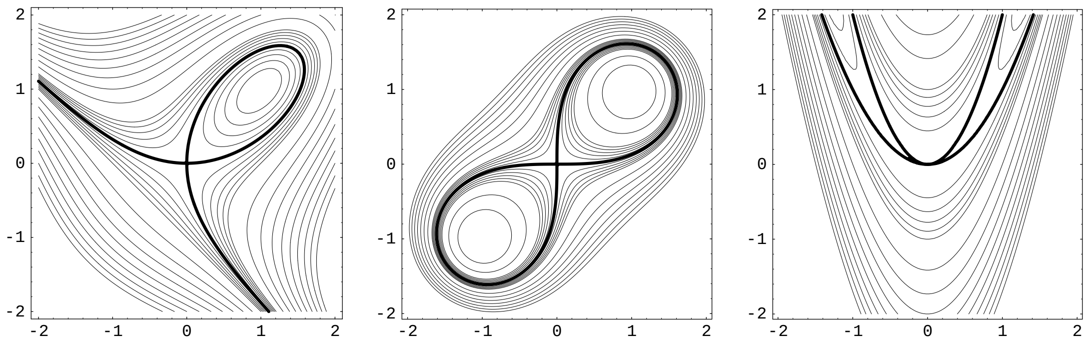
3.5 Extremums locaux

Déterminer les extremums locaux des applications suivantes de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$:

a) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$ (la courbe de niveau 0 de f est le *folium de Descartes*) ;

b) $f(x,y) = (x^2+y^2)^2 - 8xy$ (les courbes de niveau de f sont les *ovales de Cassini* ; en particulier, la courbe de niveau 0 est la *lemniscate de Bernoulli*) ;

c) $f(x,y) = (y - x^2)(y - 2x^2)$ (dans cet exemple, proposé par Peano en 1884, vérifier que f n'admet pas de minimum local en $(0,0)$, bien qu'elle admette un minimum local sur toute droite passant par l'origine).



Courbes de niveau des fonctions a, b, c

3.6 Une fonction implicite

Montrer que la relation $2\,e^{x+y-1} + \ln(x-y) - 2x + y^3 = 0$ définit implicitement y en fonction de x au voisinage de $(1,0)$. Former le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 1 de la fonction $\varphi : x \mapsto y$.

3.7 Une intégrale multiple

Calculer $\displaystyle\int_T xyz(1-x-y-z)\,dx\,dy\,dz$, où T est le tétraèdre défini par les inégalités $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ et $x+y+z \leq 1$ (poser $x+y+z = u$, $y+z = uv$, $z = uvw$).

3.8 Intégrale de Gauss (bis)

Pour tout $A > 0$, on pose $D_A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ x > 0, y > 0 \text{ et } x^2+y^2 < A^2\}$ et $\Delta_A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ 0 < x < A \text{ et } 0 < y < A\}$.

a) Calculer $I(A) = \displaystyle\int_{D_A} e^{-(x^2+y^2)} dx\,dy$ et $J(A) = \displaystyle\int_{\Delta_A} e^{-(x^2+y^2)} dx\,dy$.

b) Montrer que $I(A)$ et $J(A)$ admettent une même limite finie lorsque A tend vers $+\infty$. Retrouver ainsi la valeur de l'intégrale de Gauss (voir exercice 2.6).

4 Équations différentielles scalaires

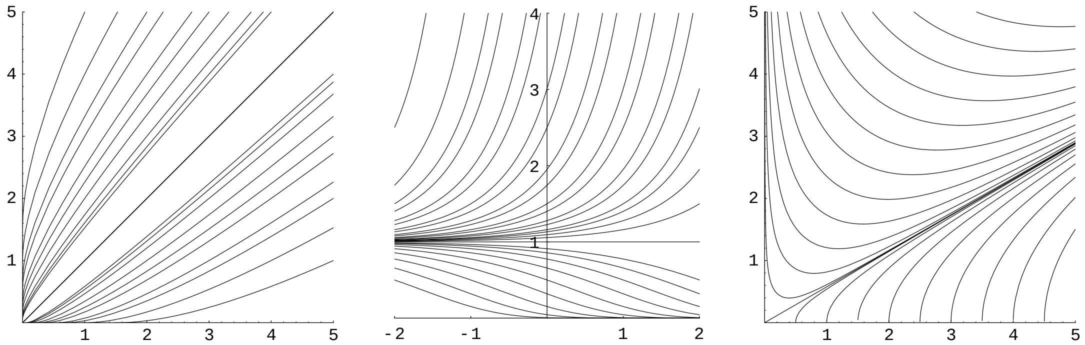
On ne saurait mieux comparer cet afflux de vérités nouvelles qu'au mouvement d'une vague qui occupe un instant l'espace grand ouvert devant elle et qui s'arrête au pied d'une ceinture de granit. La vague s'arrêta quand tout ce qui était intégrable, dans les problèmes naturels, fut intégré. (Painlevé 1904)

4.1 Exemples d'équations scalaires

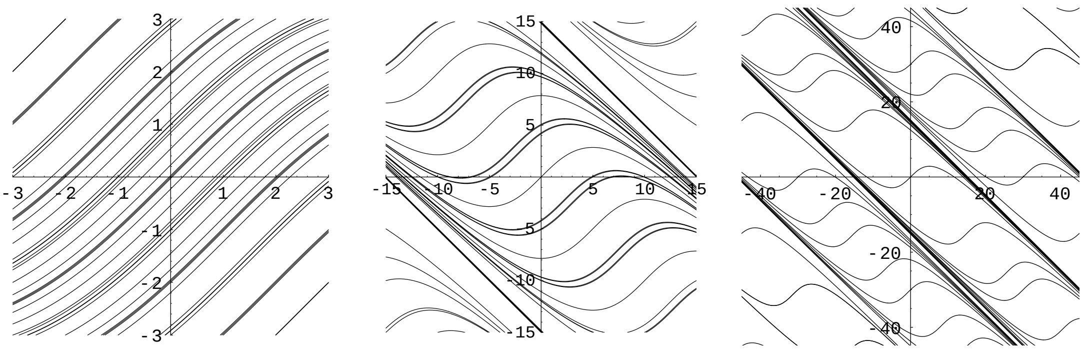
Intégrer les équations différentielles suivantes :

$$\text{a) } y' = \sqrt{\frac{y}{x}}\,; \quad \text{b) } y' = y \ln y\,; \quad \text{c) } x' = \frac{t}{2x} - \frac{x}{2t}\,; \quad \text{d) } y' = \cos \frac{x+y}{5}\,;$$

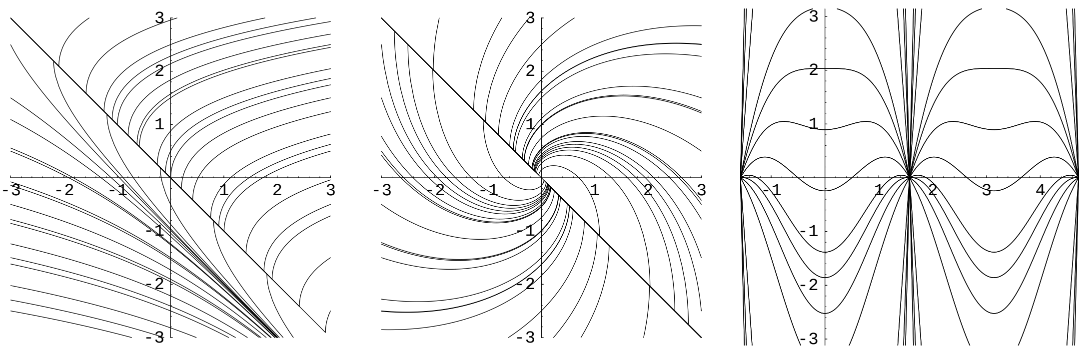
$$\text{e) } y' = \frac{1}{x+y}\,; \quad \text{f) } y' = \frac{y-x}{y+x}\,; \quad \text{g) } x' = \sin 2t - x \tan t.$$



Courbes intégrales des équations a, b, c



Courbes intégrales de l'équation d (à trois échelles)



Courbes intégrales des équations e, f, g

4.2 Équations de Bernoulli et de Riccati (Bernoulli 1697, Riccati 1724)

a) On appelle *équation de Bernoulli* une équation de la forme $x' = a(t)x + b(t)x^{\alpha}$, où a et b sont des fonctions continues sur un intervalle ouvert I et $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0, 1\}$. Vérifier qu'on peut se ramener à une équation linéaire en faisant le changement de fonction inconnue $y = x^{1-\alpha}$.

b) Résoudre le problème de Cauchy $x' = tx - tx^3$, $x(0) = 2$.

c) On appelle *équation de Riccati* une équation de la forme $x' = a(t)x^2 + b(t)x + c(t)$, où a, b et c sont des fonctions continues sur un intervalle ouvert I. Vérifier que, si on connaît une solution particulière x_0, on peut se ramener à une équation de Bernoulli en faisant le changement de fonction inconnue $y = x - x_0$. Comment se ramener directement à une équation linéaire ?

d) Résoudre le problème de Cauchy $x' = x^2 - 2e^t x + e^{2t} + e^t$, $x(0) = 2$ (vérifier que $x_0 = e^t$ est une solution particulière).

4.3 Étude qualitative d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle $x' = \sin(tx)$.

a) Expliquer pourquoi il suffit d'étudier les courbes intégrales dans le premier quadrant ($t > 0$ et $x > 0$).

b) Déterminer les isoclines. Tracer celles correspondant aux pentes -1, 0 et 1.

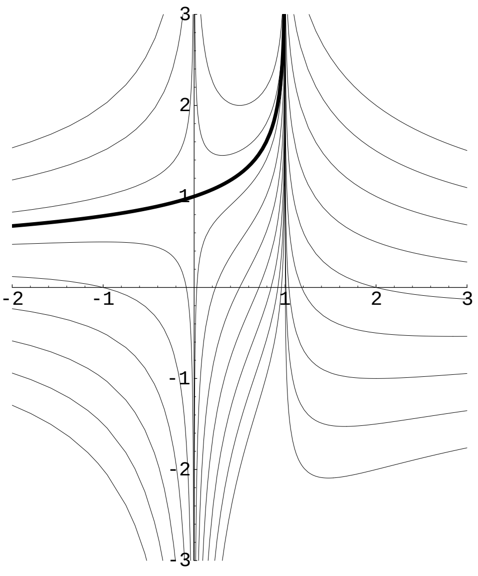
c) Montrer que lorsqu'une courbe intégrale traverse une isocline 0, elle reste ensuite au-dessus. De façon analogue, montrer que lorsqu'une courbe intégrale traverse une isocline -1 pour une valeur de t suffisamment grande, elle reste ensuite en-dessous.

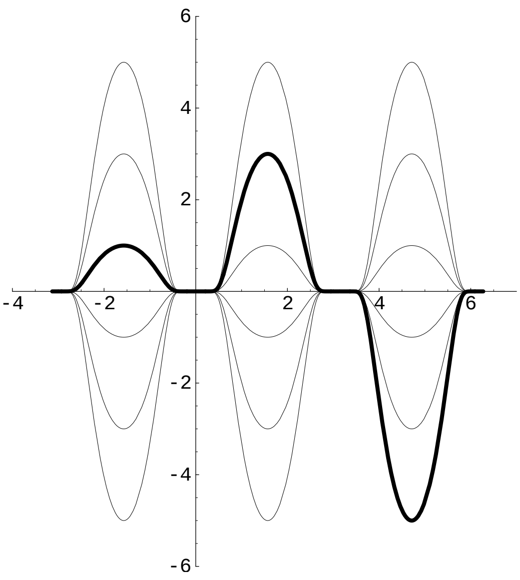
d) Dessiner l'allure des courbes intégrales.

4.4 Problèmes de raccordement

a) Intégrer l'équation $2x(1-x)y' + (1-x)y - 1 = 0$ sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$, $]0, 1[$, $]1, +\infty[$, $]-\infty, 1[$, $]0, +\infty[$, $\mathbb{R}$ (voir figure ci-dessous à gauche).

b) Montrer que l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y' \sin^3 x = 2y \cos x$ est un espace vectoriel de dimension infinie (voir figure ci-dessous à droite).





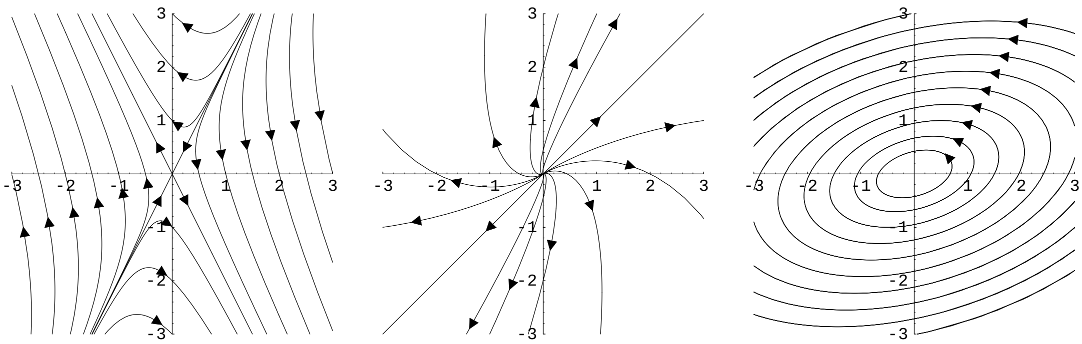
5 Systèmes d'équations différentielles

> Le problème de Cauchy pour les systèmes différentiels ordinaires a été, bien entendu, le plus important problème mathématique tant que l'artillerie a régi le monde, tant que la mécanique céleste a été la théorie scientifique principale et triomphante. (Jean Leray 1963)

5.1 Systèmes linéaires à coefficients constants en dimension 2

Intégrer les systèmes suivants, étudier et représenter graphiquement les trajectoires de leurs solutions réelles :

$$\text{a)} \begin{cases} x' = x - y \\ y' = y - 4x \end{cases} ; \qquad \text{b)} \begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 4y - x \end{cases} ; \qquad \text{c)} \begin{cases} x' = x - 5y \\ y' = 2x - y. \end{cases}$$



5.2 Systèmes linéaires à coefficients constants en dimension 3

Intégrer les systèmes suivants, en précisant dans chaque cas l'ensemble des solutions réelles et l'ensemble des solutions complexes :

$$\text{a)} \begin{cases} x' = 3x - y + z \\ y' = -x + 5y - z \\ z' = x - y + 3z \end{cases} ; \qquad \text{b)} \begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 2y + z \\ z' = 2z \end{cases} ; \qquad \text{c)} \begin{cases} x' = 8y \\ y' = -2z \\ z' = 2x + 8y - 2z. \end{cases}$$

5.3 Un système linéaire à coefficients non constants

Résoudre le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x' + tx - y = \sin t \\ y' + (t^2 - 1)x - ty = 0 \\ (x(0), y(0)) = (0, 1) \end{cases}$$

(chercher deux solutions indépendantes du système homogène ayant des coordonnées polynomiales, puis faire varier les constantes).

5.4 Équations scalaires du second ordre

a) Intégrer l'équation $y'' + 2y' + (1 - \lambda)y = e^{2x}$ en discutant suivant les valeurs du paramètre réel λ.

b) Intégrer sur tout intervalle de $\mathbb{R}$ l'équation $(x^2 + x)y'' - 2xy' + 2y = 0$ (chercher d'abord les solutions polynômes).

c) Résoudre le problème de Cauchy $2xx'' - 4x'^2 - x^2 = 0$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$ (se ramener à une équation linéaire à coefficients constants par le changement de fonction inconnue $y = 1/x$).

d) Résoudre le problème de Cauchy $x'' + 2x'^2 \tan x + \sin x \cos x = 0$, $x(0) = \pi/4$, $x'(0) = 1/2$ (se ramener à une équation linéaire à coefficients constants par le changement de fonction inconnue $y = \tan x$).

5.5 Le saut en parachute

Un parachutiste saute d'un hélicoptère immobile à l'altitude x_0. Il tombe vers le sol sous l'influence de la gravité, tout en étant freiné par la résistance de l'air, que l'on suppose proportionnelle à sa vitesse. On note $x(t)$ l'altitude du parachutiste à l'instant t, m sa masse, g la constante de gravitation, k le coefficient de résistance de l'air en l'absence de parachute, et l ce même coefficient lorsque le parachute est ouvert.

a) Si le parachute ne s'ouvre pas, le mouvement est décrit par le problème de Cauchy

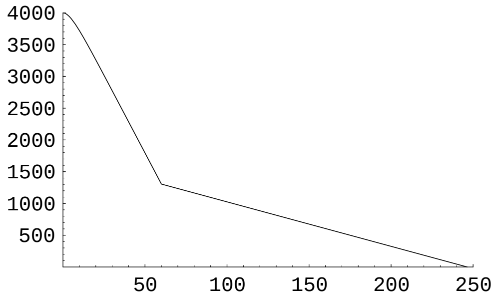
$$mx'' = -mg - kx', \quad x(0) = x_0, \quad x'(0) = 0.$$

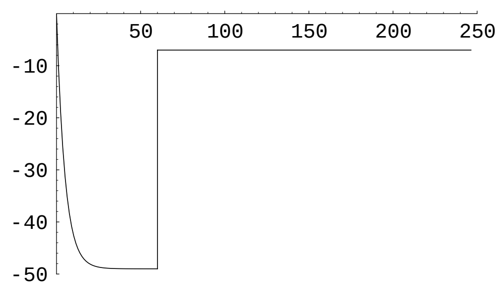
Résoudre ce problème.

Application numérique : $x_0 = 4000\ m$, $g = 9,8\ m/s^2$, $k/m = 0,2$; au bout de combien de temps et à quelle vitesse le parachutiste va-t-il s'écraser sur le sol ?

b) On suppose maintenant que le parachute s'ouvre au bout d'un temps T. Expliciter l'altitude du parachutiste en fonction du temps.

Application numérique : $x_0 = 4000\ m$, $g = 9,8\ m/s^2$, $k/m = 0,2$, $l/m = 1,4$, $T = 60\ s$; représenter graphiquement l'altitude et la vitesse du parachutiste ; au bout de combien de temps et à quelle vitesse va-t-il toucher le sol ?





Altitude et vitesse du parachutiste

5.6 Équations d'Euler (Euler 1769)

On appelle *équation d'Euler* une équation de la forme $ax^2y'' + bxy' + cy = 0$, où a, b et c sont des constantes réelles.

a) Vérifier que, sur $]0, +\infty[$, le changement de variable $x = e^t$ permet de ramener l'équation d'Euler à une équation linéaire homogène à coefficients constants. Intégrer de cette manière sur $]0, +\infty[$ les équations $x^2y'' + 2xy' - 6y = 0$, $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$ et $x^2y'' - xy' + 2y = x \ln x$.

b) À quelle condition sur k l'équation d'Euler admet-elle pour solution sur $]0, +\infty[$ la fonction $y = x^k$? En déduire une seconde méthode pour intégrer les trois équations précédentes.

6 Approximation uniforme

> Une chose étonnante, je trouve, c'est que Monsieur Weierstrass et Monsieur Kronecker peuvent trouver tant d'auditeurs — entre 15 et 20 — pour des cours si difficiles et si élevés. (Mittag-Leffler 1875)

6.1 Convergence uniforme et composition à gauche ou à droite

Soient A, B des parties de $\mathbb{R}$, et E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

a) Soit g une application de A dans B et soit (f_n) une suite d'applications de B dans E convergeant uniformément vers une application f de B dans E. Montrer que $(f_n \circ g)$ converge uniformément vers $(f \circ g)$.

b) Soit (f_n) une suite d'applications de A dans B, convergeant uniformément vers une application f de A dans B, et soit g une application uniformément continue de B dans E. Montrer que $(g \circ f_n)$ converge uniformément vers $g \circ f$. Le résultat subsiste-t-il si g est seulement continue ?

6.2 Critères de convergence uniforme sur un intervalle compact (Dini 1878)

Soit (f_n) une suite de fonctions réelles convergeant simplement vers une fonction f sur un intervalle compact $[a, b]$. Prouver que chacune des conditions suivantes est suffisante pour que la convergence soit uniforme :

a) Les f_n et f sont continues et, pour chaque x de $[a, b]$, la suite $(f_n(x))$ est croissante (*premier théorème de Dini*). (Indication : $\epsilon > 0$ étant donné, pour chaque x de $[a, b]$ on fixe un entier $N(x)$ tel que, pour tout $n \geq N(x)$, on ait $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$, et on pose $U(x) = \{y \in [a, b]/|f_{N(x)}(y) - f(y)| < \epsilon\}$; on obtient ainsi un recouvrement de $[a, b]$ par des ouverts.)

b) Les f_n sont croissantes et f est continue (*second théorème de Dini*).

c) Les f_n sont dérivables et la suite des dérivées est uniformément bornée (c'est-à-dire : il existe $M > 0$ tel que $|f'_n(x)| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [a, b]$).

6.3 Étude d'exemples

Pour chaque suite de fonctions, préciser les ensembles de convergence simple et de convergence uniforme :

$$\text{a) } f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto n^\alpha x\, e^{-nx} \quad (\alpha \geq 0)\ ; \quad \text{b) } f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sin\sqrt{x + 4n^2\pi^2}\ ;$$

$$\text{c) } f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto \left(\frac{1 + nx}{n + x^2}\right)^\alpha \quad (\alpha > 0)\ ; \quad \text{d) } f_n : [0, \pi/2] \to \mathbb{R},\ x \mapsto n^2 \cos x \sin^{2n} x\ ;$$

$$\text{e) } f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto \tan^{-1}\left(\frac{n + x}{1 + nx}\right)\ ; \quad \text{f) } f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto n\left(\exp\left(\frac{x}{x + n}\right) - 1\right).$$

6.4 Meilleure approximation affine uniforme

Trouver la meilleure approximation affine uniforme de la fonction $x \mapsto x^2$ sur $[0, 1]$ (autrement dit, chercher des réels α et β tels que $\sup\limits_{x \in [0,1]} |x^2 - \alpha x - \beta|$ soit minimum).

6.5 Une application du théorème de Weierstrass

Soit f une fonction complexe continue sur un intervalle compact $[a, b]$ et telle que $\int_a^b f(x)\, x^n\, dx = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $f = 0$.

6.6 Deux exemples d'approximation uniforme explicite par des polynômes

Soit (P_n) la suite de polynômes définie par $P_0 = 0$ et par $P_{n+1} = P_n + \frac{1}{2}(X - P_n^2)$.

a) Montrer que, pour tout $t \in [0, 1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$P_n(t) \geq 0 \quad \text{et} \quad 0 \leq \sqrt{t} - P_n(t) \leq \frac{2\sqrt{t}}{2 + n\sqrt{t}} \leq \frac{2}{n+2}.$$

b) En déduire que la suite de fonctions polynômes (P_n) converge uniformément sur $[0, 1]$ vers la fonction $t \mapsto \sqrt{t}$.

c) Construire une suite de fonctions polynômes convergeant uniformément sur $[-1, 1]$ vers la fonction $t \mapsto |\,t\,|$.

6.7 Le phénomène de Runge (Runge 1901)

Étant donné un réel λ strictement positif, on considère la fonction f définie sur $[-1, 1]$ par $f(x) = \frac{1}{x^2+\lambda^2}$. Pour $n \geq 1$, on note p_n le polynôme d'interpolation de Lagrange qui coïncide avec f en les points $x_k = -1 + \frac{2k-1}{2n}$, avec $1 \leq k \leq 2n$.

a) Montrer que, pour tout x,

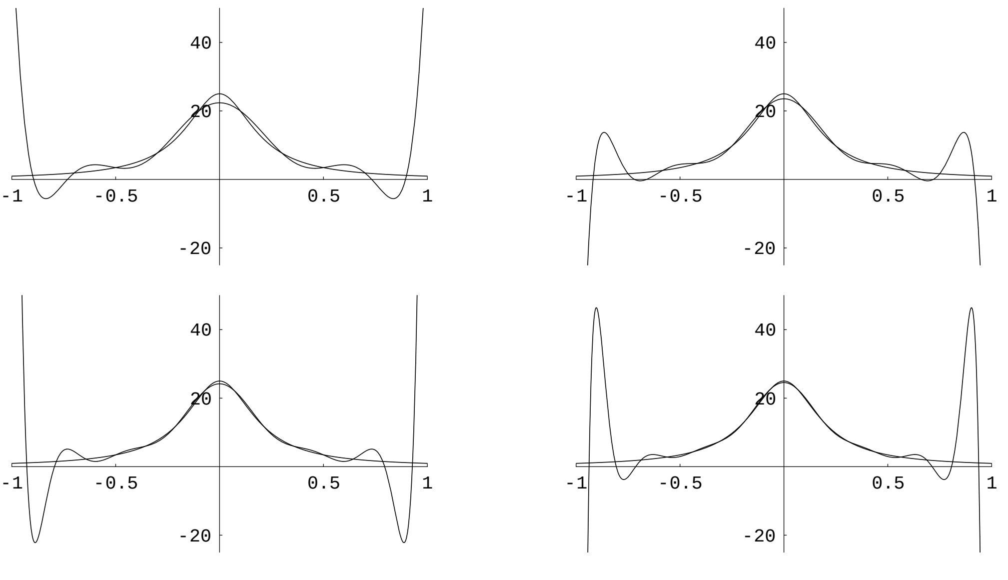
$$f(x) - p_n(x) = (-1)^n f(x) \prod_{k=1}^{n} \frac{x^2 - x_k^2}{x_k^2 + \lambda^2}.$$

b) Donner un équivalent du produit $\prod_{k=1}^{n}(1 - x_k^2)$ en utilisant la formule de Stirling.

c) Donner un équivalent du produit $\prod_{k=1}^{n}(x_k^2 + \lambda^2)$ en appliquant à la fonction $g : x \mapsto \ln(x^2 + \lambda^2)$ la formule d'erreur de la méthode du point milieu :

$$\left| \int_a^b g(x)\, dx - \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} g\left(a + (2k-1)\frac{b-a}{2n}\right) \right| \leq \frac{M_2}{24} \frac{(b-a)^3}{n^2}.$$

d) En déduire un équivalent de $f(1) - p_n(1)$ quand n tend vers l'infini. À quelle condition sur λ cette suite converge-t-elle vers 0 ? Étudier en détail le cas $\lambda = \frac{1}{5}$ (voir figures ci-dessous, où l'on a représenté f et p_n pour $n = 5, 6, 7, 8$).



7 Fonctions définies par une intégrale

> Lorsque, dans une intégrale relative à la variable x, la fonction sous le signe $\int$ renferme une autre quantité μ dont la valeur est arbitraire, on peut considérer cette quantité μ comme une nouvelle variable, et l'intégrale elle-même comme une fonction de μ. Parmi les fonctions de cette espèce, on doit remarquer celle que M. Legendre a désignée par la lettre Γ. (Cauchy 1823)

7.1 La fonction logarithme intégral (Gauss 1793)

a) Étudier et représenter graphiquement la fonction *logarithme intégral*, définie sur $]1, +\infty[$ par

$$\mathrm{li}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\ln t}.$$

b) Au voisinage de 1, montrer que $\frac{1}{\ln t} = \frac{1}{t-1} + \frac{1}{2} + \mathrm{o}(1)$. En déduire le développement asymptotique $\mathrm{li}(x) = \ln(x-1) + C + \frac{x-1}{2} + \mathrm{o}(x-1)$, où C est une constante à préciser.

c) Au voisinage de l'infini, procéder à des intégrations par parties pour obtenir le développement asymptotique $\mathrm{li}(x) = \frac{x}{\ln x} + \frac{x}{\ln^2 x} + \frac{2x}{\ln^3 x} + \mathrm{o}\left(\frac{x}{\ln^3 x}\right)$.

7.2 Calcul d'intégrales

a) Montrer que, pour $a > 1$, $\displaystyle\int_0^\pi \frac{dx}{a - \cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}$.

b) En déduire la valeur des intégrales $\displaystyle\int_0^\pi \frac{dx}{(5-\cos x)^2}$ et $\displaystyle\int_0^\pi \frac{dx}{(6-4\cos x)^3}$.

7.3 Intégrale de Gauss (ter)

Soit F la fonction définie par $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\, dt$.

a) Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que $\lim_{+\infty} F = 0$.

b) Montrer que, pour tout réel x,

$$F(x) = \frac{\pi}{4} - \left(\int_0^x e^{-t^2} dt\right)^2.$$

c) À partir de là, retrouver la valeur de l'intégrale de Gauss (voir exercices 2.6 et 3.8).

7.4 La fonction gamma (Euler 1781, Legendre 1793)

On considère la fonction *gamma*, définie par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt.$$

a) Montrer que Γ est définie sur $]0, +\infty[$ et que, pour tout $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. En déduire que $\Gamma(n+1) = n!$ pour tout entier naturel n.

b) Montrer que Γ est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$. Pour tout $x > 0$, calculer $\Gamma'(x)$ et $\Gamma''(x)$. En déduire les variations et la convexité de Γ.

c) Étudier le comportement de Γ au voisinage de 0 et de $+\infty$.

d) Donner l'allure du graphe de Γ.

7.5 Intégrale de Fresnel (bis)

Soit F la fonction définie par $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-tx} \frac{\sin t}{t}\, dt$.

a) Montrer que F est définie et continue sur $[0, +\infty[$, qu'elle est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que $\lim_{+\infty} F = 0$.

b) Montrer que, pour tout $x > 0$, $F(x) = \pi/2 - \tan^{-1} x$.

c) Retrouver ainsi la valeur de l'intégrale de Fresnel (voir exercice 2.7).

7.6 Du danger d'intervertir les signes d'intégration

La fonction $f(x, y) = (x - y)/(x + y)^3$ est continue sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$. Vérifier pourtant, après avoir justifié l'existence des intégrales, que

$$\text{a)} \int_1^{+\infty} \int_1^{+\infty} f(x, y)\, dx\, dy \neq \int_1^{+\infty} \int_1^{+\infty} f(x, y)\, dy\, dx\ ;$$

$$\text{b)} \int_0^1 \int_0^1 f(x, y)\, dx\, dy \neq \int_0^1 \int_0^1 f(x, y)\, dy\, dx.$$

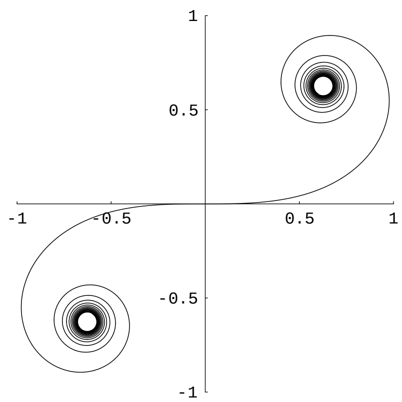
7.7 La clothoïde, ou spirale de Cornu

La *clothoïde*, ou *spirale de Cornu*, est la courbe paramétrée définie par

$$x(t) = \int_0^t \cos(u^2)\, du, \quad y(t) = \int_0^t \sin(u^2)\, du.$$

a) Montrer que $x(t)$ et $y(t)$ ont des limites finies lorsque t tend vers $+\infty$. On admettra que ces deux limites sont égales à $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

b) Étudier et représenter graphiquement la clothoïde (voir figure ci-dessous).



c) Calculer la longueur de l'arc qui va de l'origine au point $(x(t), y(t))$. Calculer le rayon de courbure au point $(x(t), y(t))$.

7.8 Une équation différentielle

Intégrer l'équation $y'' - y = |\sin t\,|$ en utilisant la méthode de variation des constantes. Vérifier que la solution telle que $y(0) = y'(0) = 0$ peut se mettre sous la forme $y(x) = \int_0^x |\sin t\,| \operatorname{sh}(x - t)\, dt$. Étudier et représenter graphiquement cette fonction.

8 Séries de fonctions

> On fait toute espèce d'opérations sur les séries infinies, comme si elles étaient finies, mais est-ce permis ? Jamais de la vie. Où cela est-il démontré que l'on obtient la dérivée d'une série infinie en prenant la dérivée de chaque terme ? (Abel 1826)

8.1 Les différents types de convergence

Pour chacune des séries de fonctions ci-dessous, préciser les ensembles de convergence simple, de convergence absolue, de convergence uniforme et de convergence normale :

$$\text{a) } \sum \frac{nx^2}{n^3+x^2}\ ; \qquad \text{b) } \sum e^{-n}\cos n^2 x\ ; \qquad \text{c) } \sum \frac{(-1)^n}{n+x}.$$

8.2 Application des théorèmes d'interversion de limites

a) Montrer que la fonction

$$f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\tan^{-1}(nx)}{n^2}$$

est définie et continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et étudier $\lim_0 f'$.

b) Montrer que la fonction

$$f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+n^2x^2}$$

est définie et continue sur $]0,+\infty[$, et que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f$ est convergente.

c) Calculer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} nxe^{-nx^2}.$$

d) Calculer $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-nx} dx$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et prouver que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3} = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{e^x-1}\, dx.$$

8.3 La fonction zêta de Riemann (Euler 1737, Riemann 1859)

a) Montrer que la *fonction zêta de Riemann*

$$\zeta : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

est définie et de classe C^∞ sur $]1,+\infty[$. Étudier ses variations, ses limites en 1 et en $+\infty$, et donner l'allure de son graphe.

b) Pour préciser le comportement de ζ au voisinage de 1, on introduit la fonction

$$f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n^x} - \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x} \right).$$

Montrer que f est définie et continue sur $]0,+\infty[$. En déduire que, au voisinage de 1, $\zeta(x) = \frac{1}{x-1} + \gamma + \mathrm{o}(1)$, où γ est la constante d'Euler.

8.4 Résolution d'une équation fonctionnelle par approximations successives

On définit une suite de fonctions (f_n) sur $[0,1]$ par

$$f_0(x) = 1 \quad \text{et} \quad f_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x f_n(t - t^2)\,dt.$$

a) Vérifier que, pour tout n, f_n est une fonction polynôme.
b) Montrer que la série $\sum(f_{n+1} - f_n)$ converge normalement sur $[0,1]$.
c) En déduire que la suite (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$ vers une fonction dérivable qui est solution de l'équation fonctionnelle $f'(x) = f(x - x^2)$.

8.5 Calcul de sommes de séries numériques

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [-1,1]$, on pose $f_n(x) = \dfrac{x^n \sin nx}{n}$.

a) Montrer que la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $[-1,1]$ vers une fonction continue f.
b) Montrer que f est dérivable sur $]-1,1[$, calculer f' et en déduire que

$$f(x) = \tan^{-1} \frac{x \sin x}{1 - x \cos x}.$$

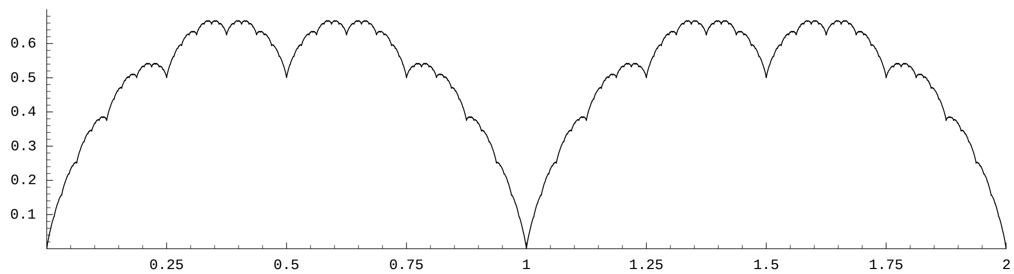
c) En déduire la somme des séries $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sin n}{n}$.

8.6 Une fonction continue nulle part dérivable (Takagi 1903, Tall 1982)

Soient φ la fonction périodique de période 1 définie sur $\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ par $\varphi(x) = |x|$, et f la fonction définie par

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\varphi(2^n x)}{2^n}.$$

a) Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$ (voir ci-dessous sa courbe représentative fractale).



b) Soit x_0 un point fixé. Étant donné un entier n, on désigne par x_1 le premier point de la forme $i/2^n$ à droite de x_0, puis on pose $x_2 = x_1 + 1/(3.2^n)$ et $x_3 = x_1 + 1/2^n$. Montrer que

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} = 2,$$

et en déduire que f n'est pas dérivable en x_0.

9 Séries entières

> La formule $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + etc.$, en ne prenant qu'un nombre fini de termes, ne peut représenter ni les fonctions fractionnaires, ni les fonctions irrationnelles de z ; néanmoins on cherche ordinairement pour les exprimer une suite de même forme, qu'on suppose composée d'une infinité de termes. D'ailleurs une semblable série, quoique infinie, paraît plus propre à faire connaître la nature des fonctions transcendantes. (Euler 1748)

9.1 Exemples de séries entières

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes et étudier leur comportement aux bornes de l'intervalle de convergence (dans les deux derniers exemples, φ désigne l'indicatrice d'Euler) :

$$\text{a) } \sum (\ln n) x^n \,; \quad \text{b) } \sum \mathrm{C}_{2n}^n x^n \,; \quad \text{c) } \sum \frac{x^{2n}}{2^n} \,; \quad \text{d) } \sum \left(\frac{\varphi(n)}{n} \right)^n x^n \,; \quad \text{e) } \sum \left(\frac{n}{\varphi(n)} \right)^n x^n.$$

9.2 Fonctions non développables en série entière (Cauchy 1823, Lerch 1888)

a) Montrer que la fonction f définie par

$$f(x) = e^{-1/x^2} \quad \text{si } x \neq 0, \qquad f(0) = 0$$

est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que sa série de Taylor à l'origine a un rayon de convergence infini, mais avec une somme distincte de $f(x)$ pour tout $x \neq 0$.

b) Montrer que la fonction f définie par

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\cos 2^k x}{k!}$$

est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, mais que sa série de Taylor à l'origine diverge pour tout $x \neq 0$.

9.3 Une condition suffisante pour qu'une fonction soit développable en série entière (Pringsheim 1893)

a) Soit f une fonction de classe C^∞ dans un voisinage $]-r, r[$ de 0. On suppose qu'il existe $k > 0$ et $M > 0$ tels que

$$|f^{(n)}(x)| \leq M k^n n!$$

pour tout x de $]-r, r[$ et tout entier naturel n. Montrer que f est développable en série entière en 0.

b) Retrouver à partir de là que les fonctions $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto (1+x)^\alpha$ sont développables en série entière en 0, en précisant le rayon de convergence de leurs développements.

9.4 Une application du théorème d'Abel (Abel 1826)

Montrer que si les séries $\sum_{i\geq 0} a_i$, $\sum_{i\geq 0} b_i$ et leur produit de Cauchy $\sum_{i\geq 0} c_i$ convergent, alors on a l'égalité

$$\sum_{i\geq 0} a_i \cdot \sum_{i\geq 0} b_i = \sum_{i\geq 0} c_i.$$

(introduire les fonctions $f(x) = \sum_{i\geq 0} a_i x^i$ et $g(x) = \sum_{i\geq 0} b_i x^i$).

9.5 Intégration d'équations différentielles par les séries

Intégrer les équations suivantes sur $]0,+\infty[$:

a) $xy'' + 2y' + xy = 0$ (chercher des solutions séries entières).

b) $2x^2y'' + (3x - 2x^2)y' - (x+1)y = 0$ (chercher des solutions sous la forme $y(x) = x^\lambda \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$, avec λ réel et $a_0 \neq 0$).

9.6 Calcul de sommes de séries trigonométriques

a) Soit $t \in]0, 2\pi[$. Montrer que, sauf pour $t = \pi$, la série entière $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} x^n \frac{\sin nt}{n}$ a pour rayon de convergence 1 et converge pour $x = \pm 1$.

b) Pour x fixé dans $]-1,1[$, on considère la fonction définie par $f_x(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} x^n \frac{\sin nt}{n}$. Montrer que f_x est dérivable dans $]0,2\pi[$ et que

$$f'_x(t) = \frac{x\cos t - x^2}{1 - 2x\cos t + x^2}.$$

c) En déduire que, pour $t \in]0,2\pi[$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nt}{n} = \frac{\pi - t}{2}$ et calculer de façon analogue $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sin nt}{n}$. Comparer avec les résultats de l'exercice 8.5.

9.7 Une équation fonctionnelle

On donne deux réels a et q, avec $|q| < 1$. Montrer qu'il existe une unique application continue f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $f(0) = a$ et, pour tout réel x, $f(x) = (1 - qx)f(qx)$. (Pour l'existence, chercher une solution sous forme de série entière.)

9.8 Une série divergente asymptotique (Euler 1754)

Soit l'équation différentielle

$$y' + y = \frac{1}{x} \qquad (1).$$

a) Montrer que l'équation (1) admet une unique solution f définie sur $]-\infty, 0[$ telle que $\lim_{-\infty} f = 0$.

b) Montrer que l'équation (1) est satisfaite formellement par une seule série de la forme $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k x^{-k}$. Pour quelles valeurs de x cette série converge-t-elle ?

c) Montrer que, pour tout réel $x < 0$ et tout entier $n \geq 1$, on a

$$\left| e^{-x} \int_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{t}\,dt - \sum_{k=1}^{n} \frac{(k-1)!}{x^k} \right| \leq \frac{n!}{|x|^{n+1}}.$$

En déduire une valeur approchée de $f(-10)$ à la précision 5.10^{-5}.

10 Séries de Fourier

> La série de Fourier est un instrument précieux dont l'analyse fait un usage continuel, c'est par ce moyen qu'elle a pu représenter des fonctions discontinues ; si Fourier l'a inventée, c'est pour résoudre un problème de physique relatif à la propagation de la chaleur. Si ce problème ne s'était posé naturellement, on n'aurait jamais osé rendre au discontinu ses droits ; on aurait longtemps encore regardé les fonctions continues comme les seules fonctions véritables (Poincaré 1905)

10.1 Fonction signal

Soit $\epsilon \in \,]0, \pi[$ et soit σ_ϵ la fonction 2π-périodique définie par $\sigma_\epsilon(t) = 1$ si $|t| \leq \epsilon$ et $\sigma_\epsilon(t) = 0$ si $\epsilon < |t| \leq \pi$.

a) Développer σ_ϵ en série de Fourier et en déduire l'identité $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin na}{n} = \frac{\pi - a}{2}$ pour tout $a \in \,]0, 2\pi[$ (comparer avec les exercices 8.5 et 9.6).

b) Utiliser la question précédente pour prouver que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

10.2 Fonction exponentielle apériodique

Soit $a \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$ et soit f la fonction 2π-périodique définie par $f(t) = e^{iat}$ si $-\pi \leq t < \pi$.

a) Développer f en série de Fourier et en déduire l'identité

$$\pi \cot \pi a = \frac{1}{a} + 2a \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a^2 - n^2}.$$

b) En utilisant un développement asymptotique de la fonction cotangente au voisinage de 0, prouver que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

10.3 Le phénomène de Gibbs (Gibbs 1899)

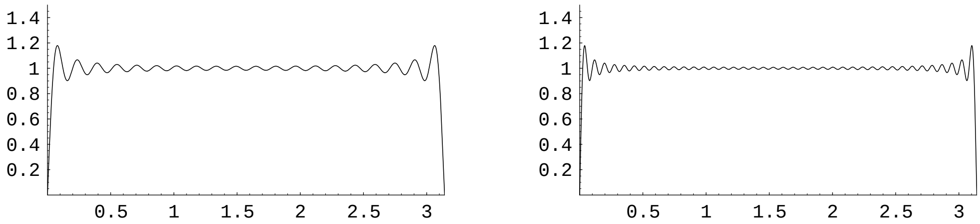
Soit f la fonction 2π-périodique et impaire définie par $f(0) = f(\pi) = 0$ et $f(t) = 1$ si $0 < t < \pi$.

a) Calculer la série de Fourier de f et montrer que ses sommes partielles d'indice impair vérifient

$$S_{2n-1}(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(2k-1)t}{2k-1} = \frac{2}{\pi} \int_0^t \frac{\sin(2nu)}{\sin u}\, du.$$

b) Étudier les variations de la fonction S_{2n-1} sur $[0, \pi]$. Montrer que son premier maximum (celui qui est atteint pour la plus petite valeur de t) est $M_n = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin u}{2n \sin\left(\frac{u}{2n}\right)}\, du$.

c) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} M_n = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin u}{u}\, du \approx 1{,}179$. Interpréter et illustrer ce résultat (sur la figure ci-dessous, voir les sommes partielles S_{39} et S_{79}).



10.4 Vitesse de convergence des coefficients de Fourier

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, 2π-périodique et de classe C^p ($p \geq 1$). Pour tout entier $n \geq 0$, on note $a_n(f)$ et $b_n(f)$ les coefficients de Fourier réels de f. Montrer que $a_n(f) = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^p}\right)$ et $b_n(f) = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^p}\right)$.

10.5 Séries de Fourier et convolution

Soient f et g deux fonctions continues et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. On appelle *produit de convolution* de f et g la fonction $f * g : x \mapsto \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)g(x-t)\,dt$.

a) Montrer que $f * g$ est continue et 2π-périodique, que $f * g = g * f$, et que si l'une des fonctions f et g est de classe C^k, alors $f * g$ l'est aussi.

b) Calculer les coefficients de Fourier de $f * g$ en fonction de ceux de f et g.

10.6 Une équation différentielle déjà vue

Intégrer l'équation $y'' - y = |\sin t\,|$. Pour trouver une solution particulière, on développera le second membre en série de Fourier et on cherchera une solution sous forme de série trigonométrique (comparer avec la méthode de l'exercice 7.8).

10.7 L'équation de la chaleur (Fourier 1822)

On décrit l'évolution de la température d'une tige homogène de longueur L et de section constante par une fonction $u(x,t)$ exprimant la température au point x à l'instant t. On suppose que les extrémités de la tige sont maintenues à 0°C et que la distribution de température à l'instant initial est donnée par une fonction $f(x)$. Tout revient alors à résoudre le système

$$\left\{\begin{array}{lll} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (0 < x < L, 0 < t) & (1) \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 & (0 \leq t) & (2) \\ u(x,0) = f(x) & (0 \leq x \leq L) & (3), \end{array}\right.$$

où a est une constante dépendant de la nature de la tige.

a) Fourier cherche d'abord une solution de (1) et (2) sous la forme $u(x,t) = X(x)\,T(t)$, avec X et T de classe C^2. Montrer qu'il existe une constante λ telle que

$$T' + a\lambda T = 0 \quad \text{et} \quad X'' + \lambda X = 0,$$

puis qu'il existe un entier naturel non nul k tel que

$$u(x,t) = \sin\frac{k\pi x}{L}\,\exp\left(-a\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 t\right).$$

b) Cette fonction est notée u_k. Pour satisfaire à la condition initiale (3), Fourier a alors l'idée de chercher une solution sous la forme $u(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k u_k(x,t)$ et, puisqu'il faut avoir $f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k \sin(k\pi x/L)$, il est amené à prendre

$$c_k = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,\sin\frac{k\pi x}{L}\,dx.$$

En faisant des hypothèses convenables sur la fonction f, vérifier qu'on obtient bien ainsi une solution de (1), (2) et (3).