

## Liste de thèmes pour les TPE maths-philosophie

La liste complète des thèmes pouvant être abordés dans le cadre des Travaux Pratiques Encadrés est sans doute impossible à réaliser. Il faudrait une véritable culture encyclopédique et la liste n'en finirait pas de s'allonger. Beaucoup de thèmes se recouperaient. De plus, les thèmes deviendraient de plus en plus techniques, dépassant bientôt les capacités de traitement des élèves... et des professeurs. En présentant cette liste composée de 22 thèmes nous souhaitons seulement ouvrir quelques horizons, et montrer combien le choix est vaste, à défaut de le démontrer.

Pour que la consultation de la liste soit plus aisée, deux parties ont été distinguées. Certains pourront donc s'arrêter à la lecture de la première, volontairement succincte.

D'abord, nous présentons successivement les thèmes auxquels nous avons pensé en les classant, par commodité, en trois rubriques : thèmes abordant des points clés d'épistémologie générale, puis thèmes relevant de l'épistémologie des mathématiques enfin thèmes plus particuliers permettant de soulever des questions plus pointues.

Une telle liste serait en quelque sorte morte si nous ne précisions quels types de sujets peuvent être abordés par leur intermédiaire. Aussi la première liste est reprise et développée dans une seconde partie. De même qu'il ne s'agit pas de relever tous les thèmes, il ne s'agit pas alors de présenter tous les sujets possibles mais seulement de donner quelques indications. Cette deuxième partie est sans doute encore plus discutable que la première, que ce soit pour les omissions que certains ne manqueront pas de remarquer ou pour les difficultés de classement qui sont inévitables. À chacun donc de compléter, voire de déclasser et de reclasser les sujets à sa guise. Puisqu'il fallait encore rendre parlant ces sujets, donner un titre ou poser une question sans fournir d'explications est apparu insuffisant. La solution retenue a été de proposer une citation pour amplifier la résonance du titre du sujet.

De sujet en sujet on passe ainsi de remarques étonnantes en formules très adroitement ciselées, par des maîtres de la philosophie et des mathématiques. Nous espérons que ce travail permettra à certains de découvrir ou redécouvrir de grands auteurs.

Une dernière remarque : les éléments de ces listes de thèmes et de sujets ne sont pas toujours mis dans un ordre particulier, parfois seulement juxtaposés, sans considération d'importance relative par conséquent.

### I<sup>ère</sup> partie : Présentation des thèmes

Les thèmes plus généraux ont sans doute une portée proprement philosophique plus marquée tandis que les thèmes plus spécifiques ou particuliers ont davantage une portée scientifique. Dans notre esprit il ne s'agit toutefois pas d'opposer des thèmes qui devraient d'abord intéresser des professeurs de mathématique et des thèmes qui intéresseraient d'abord des professeurs de philosophie. Une telle opposition est vraiment naïve dès lors que le but des TPE est conçu comme d'éveiller l'esprit des élèves de terminale à l'enjeu que représente en général la rigueur de la science, l'intérêt du travail du scientifique, la nécessité d'adopter un point de vue critique sur le monde en général, en incluant les différents savoirs produits par les différentes cultures.

#### **A Thèmes généraux d'épistémologie**

On peut remarquer que ces thèmes généraux recourent pour une large partie le programme de philosophie des séries générales, qui est un programme de notions de fait très peu déterminé. Nous

avons même retenu une de ces notions « la démonstration » comme thème possible pour les TPE, ne prenant pas parti dans la question de savoir s'il convient ou non de faire se recouper les recherches menées dans le cadre des TPE et le travail à fournir en vue du baccalauréat. Rien ne s'y oppose *a priori*. Il revient aux professeurs eux-mêmes de voir s'ils veulent que leurs cours et les TPE se recourent ou se correspondent de manière plus lâche, plus libre aussi en un sens. Un thème comme « l'intelligence », s'il est bien compris comme relevant de l'épistémologie et non d'une vague et incertaine psychologie, permet aux élèves d'aborder certaines questions qu'ils se sont posées antérieurement en opérant un dépassement de leurs préjugés (au sens propre du terme). En comparaison, les premiers thèmes de la liste apparaissent plus scolaires, mais ils ne sont sans doute pas moins intéressants ni formateurs.

- Le savoir et la sagesse**
- La science et la vérité**
- La démonstration contre la croyance**
- La nécessité**
- L'égalité**
- L'intelligence**

## **B Thèmes d'épistémologie des mathématiques et de la logique**

À tout seigneur tout honneur ! Le premier thème abordé est celui des mathématiques suivant un type de problématique qui reste encore assez général. Les autres thèmes recouvrent des questions plus techniques, soulèvent des paradoxes concernant une région de l'univers mathématique. Le savoir mathématique n'étant pas désincarné, deux thèmes sont relatifs à la personne même du mathématicien et à son immersion dans une communauté, voire plus largement dans une culture. Le dernier thème vient en quelque sorte clore le parcours en renvoyant à une question fondamentale, celle de l'être propre et de l'existence des êtres mathématiques.

- La mathématique**
- La logique**
- La géométrie**
- Le nombre**
- Les notions de probabilité et de hasard**
- Les méthodes des mathématiciens**
- L'histoire des mathématiques**
- Les figures du mathématicien**
- L'être des objets mathématiques, questions d'ontologie**

## **C Autres thèmes**

Cette dernière catégorie un peu fourre-tout a été conçue dans le souci de n'oublier aucun thème, de prendre en considération même les thèmes que d'aucuns penseront comme étant accessoires. Il nous semble qu'il fournissent de nombreux sujets intéressants et qu'il faut les présenter.

Les thèmes qui sont regroupés dans cette dernière section sont en effet des thèmes qui à la fois abordent une région déterminée de l'activité scientifique et renvoient aux mathématiques comme outil, comme langage, comme libre activité. Ainsi même des questions pouvant être qualifiées de para-scientifiques pourront alors être soulevées.

De nombreuses classes peuvent se passionner pour des sujets interdisciplinaires faisant appel à leur culture générale ou à leur sensibilité artistique. Face à l'un de ces thèmes, des groupes d'élèves trouveront peut-être l'occasion d'exprimer ce qui en eux relève du « *besoin métaphysique* », suivant la formule de Schopenhauer.

**L'ordinateur**  
**La modélisation**  
**Les révolutions scientifiques**  
**Éthique et esthétique**  
**L'infini**  
**Les sophismes**  
**Les expériences de pensée**

Référence sur Internet très utile pour avoir une idée d'ensemble des mathématiques, une conférence donnée par D. Tournès aux Amis de l'université le 29 juin 1999:

[http://amis.univ-reunion.fr/Conference/Complement/124\\_tournes/](http://amis.univ-reunion.fr/Conference/Complement/124_tournes/)

LES MATHÉMATIQUES AUJOURD'HUI

## **II<sup>nd</sup>e partie : Quelques indications de sujets et pistes de réflexion pour formuler des sujets**

Comment faire émerger des sujets relatifs aux thèmes ?

Au sein de la classe, il est sans doute possible de faire émerger des sujets à partir d'une discussion libre. Mais certains thèmes peuvent sembler hermétiques à beaucoup d'élèves, qui n'en verront pas d'emblée l'extension. Il peut donc être nécessaire de stimuler les imaginations ou de relancer une discussion qui tourne en rond en fournissant des indications, voire quelques sujets dont il est relativement facile de percevoir le caractère problématique.

Pour montrer l'extension des thèmes, nous nous sommes efforcés de livrer quelques titres de sujets, dont la portée problématique est précisée par une citation, extraite de l'œuvre d'un mathématicien ou d'un philosophe. Ces différentes citations sont extraites principalement de plusieurs sources, trois recueils de textes philosophiques et deux ouvrages de vulgarisation de l'histoire des mathématiques.

DUMONT Jean-Paul. 1993. *Éléments d'histoire de la philosophie antique*. Paris : Nathan, collection « réf. », 773 p.

MÉDINA José, MORALI Claude, SÉNIK André. 1985. *La Philosophie comme débat entre les textes*. Paris : Magnard, 614 p.

HANSEN-LØVE Laurence, sous la direction de. 2001. *Philosophie terminale S*. Paris : Hatier, 457 p.

KLIN Morris. 1989. *Mathématiques : la fin de la certitude*. Paris : Christian Bourgeois éditeur, collection "Épistémè essai", 664 p.

LE LIONNAIS François, sous la direction de. 1998. *Les grands courants de la pensée mathématique*. 1<sup>ère</sup> édition 1946. Paris : Hermann, collection "Histoire de la pensée", 533 p.

Une dernière précision, l'entretien en français de John Searle pour *Le Débat* est disponible sur le site de l'Université de Berkeley :

<http://ist-socrates.berkeley.edu/~jsearle/html/ledebat.html>

Le choix des citations répond à un double objectif.

Pour certains sujets il a paru nécessaire de fournir des éléments d'information, des bases pour raisonner, tandis que pour d'autres, il a semblé préférable de faire réagir l'élève voire de le provoquer en lui proposant un avis qui en peut qu'être radicalement à l'opposé de son épistémologie naïve.

Pour les citations qui sont assez longues, une sorte d'explication de texte peut amener à la position de problèmes précis. L'utilité des secondes, parfois très brèves, est plutôt de permettre à l'élève de construire des oppositions conceptuelles, oppositions dont il peut alors entrevoir l'importance même s'il ne s'était pas donné la peine de les réfléchir auparavant.

### Remarque : la pratique du *brainstorming*

Certains professeurs trouveront peut-être qu'il est contre-productif de fournir aux élèves et les thèmes et une liste de sujets. Ils préféreront alors faire travailler les élèves à la découverte de sujets. Alors, le TPE peut débuter par la pratique du *brainstorming*, comme le montre cet exemple de TPE philosophie/biologie rapporté par Jocelyne Decompoix :

« Pour le point de départ, nous nous sommes inspirées des conseils donnés par des formateurs de l'I.U.F.M de Grenoble. Nous avons proposé le thème : « l'être parfait », et avons demandé à chaque élève d'écrire cinq noms ou adjectifs suggérés par cette expression. Nous les avons inscrits au tableau en les regroupant par catégories de sens ; à partir de cela les élèves ont commencé à chercher des sujets pouvant entrer dans le thème général.

Parallèlement, pour aider les élèves à la compréhension des problèmes et à la perception de leur dimension philosophique, j'ai commencé mon cours de l'année par le thème de l'Enjeu des progrès techniques (...) » **Jocelyne DECOMPOIX**

© Côté Philo, février 2003

## **II A Les thèmes généraux d'épistémologie**

« Réfléchissez donc, ô vous qui êtes doués de clairvoyance » Coran, verset LIX, 2, verset préféré d'Averroès

### **Le savoir et la sagesse**

#### **Thalès, l'archétype du savant ?**

« Thalès observait les astres et, comme il avait les yeux au ciel, il tomba dans un puits. Une servante de Thrace, fine et spirituelle, le railla, dit-on, en disant qu'il s'évertuait à savoir ce qui se passait dans le ciel, et qu'il ne prenait pas garde à ce qui était devant lui et à ses pieds. » Platon, *Théétète*, 174 a, (- 368)

#### **Le savoir, est-ce une richesse comme une autre ?**

« J'accuse les hommes de science d'avoir souvent, trop souvent, entretenu cette confusion. D'avoir menti sur leur véritable dessein, invoquant la puissance pour, en réalité, nourrir la connaissance qui seule leur importe. » Jacques Monod, *Leçon inaugurale au Collège de France* (1967)

#### **Abstrait et concret, lequel préférer ?**

« Les sciences les plus exactes sont celles qui sont le plus sciences des principes, car celles qui partent de principes plus abstraits sont plus exactes que celles qui se tirent de principes plus complexes : l'arithmétique par exemple est plus exacte que la géométrie. » Aristote, *Métaphysique*, livre A, 2. 982 a 4 (vers -330)

### **Vulgariser le savoir, est-ce vraiment utile ?**

T. D. - Dans le manuel de *Physique* de Nathan destiné aux Terminales scientifiques, et édité en 1999, le dernier en date, on trouve ce paragraphe: « *Les astronomes se préoccupent des origines et de la création de notre monde ; l'expansion de l'univers suggère l'idée d'une explosion originelle: le Big Bang, qui aurait engendré l'ensemble des galaxies.* »

J.-C. C. - Et tout est faux ?

T. D. - Pire ! Comme disait le grand physicien Wigner, parlant de travaux scientifiques sans aucun intérêt : « *Ce n'est même pas faux !* » (*It's not even wrong !*)

Extrait des *Entretiens sur la multitude du monde*, Thibault Damour, Jean-Claude Carrière (2002)

### **Dépasser la certitude**

« *Nous disons "Je sais" chaque fois que nous sommes certains, sans réfléchir à la fiabilité. Mais si nous réfléchissions effectivement, alors nous devrions rester certains si, et seulement si, nous jugions notre procédure fiable.* » Frank P. Ramsey, *Knowledge* (1929)

### **Le mythe d'un savoir rationnel qui représente la nature et s'impose à tous**

« *La seule chose qui rende la science exemplaire c'est qu'elle est un modèle de la solidarité humaine.* » Richard Rorty, *La science comme solidarité* (1987)

### **La science et la vérité**

#### **Toute vérité n'est pas bonne à dire**

« *Il y a des vérités qu'il faut manier avec des précautions infinies* » Vladimir Jankélévitch, *L'Ironie* (1964)

#### **Contempler la vérité ?**

« *L'acte de contemplation [thêôria] est le plus agréable et le plus excellent* », Aristote, *Métaphysique*, livre Λ, 7. 1072 b 13 (vers -330)

#### **« savoir ce que je dois faire et non ce que je dois connaître »**

« *Quel profit pour moi qu'une vérité qui se dresserait, nue et froide, sans se soucier que je la reconnusse ou non, productrice plutôt d'un grand frisson d'angoisse que d'une confiance qui s'abandonne ?* » Sören Kierkegaard, *Journal* (1835)

#### **Le scientisme, un totalitarisme ?**

« *Organiser scientifiquement l'humanité, tel est donc le dernier mot de la science moderne, telle est son audacieuse mais légitime prétention* » Ernest Renan, *L'Avenir de la science* (1890)

#### **La science est-elle le produit le plus élevé de la culture ?**

« *La science représente la dernière tape du développement intellectuel de l'homme et peut être considérée comme la réalisation la plus haute et la plus caractéristique de la culture humaine. C'est un produit très tardif et très raffiné qui ne pouvait se produire que dans des conditions particulières.* » Ernst Cassirer, *Essai sur l'homme* (1975)

#### **La science prend-elle une importance trop importante dans nos vies ?**

« (...) *si un Américain peut bien aujourd'hui choisir la religion qu'il veut, on ne lui permet pas jusqu'à nouvel ordre d'exiger que ses enfants apprennent à l'école la magie plutôt que la science. Il n'y a pas de séparation entre l'État et la Science.* » Paul Feyerabend, *Contre la méthode* (1975)

### **Sciences de la nature et sciences de l'homme, y a-t-il vraiment une opposition ?**

*« Il n'y a aucune raison pour que celui qui prend pour thème l'esprit comme esprit, exige de ce monde une explication autre que purement spirituelle. Et il en va ainsi en général : c'est un contresens que de vouloir appréhender la nature comme étant en soi étrangère à l'esprit, et ensuite d'asseoir la science de l'esprit sur la science de la nature en prétendant la rendre exacte. »* Edmund Husserl, *La Crise de l'humanité européenne et la philosophie* (1935)

### **La démonstration contre la croyance**

#### **La démonstration, le droit chemin de la vérité !**

*« Démontrer n'est pas autre chose que résoudre les termes d'une proposition et substituer au terme défini sa définition ou une de ses parties pour dégager une sorte d'équation. »* Leibniz, *De la liberté* (1707)

#### **Raison et sentiment, deux facultés complémentaires ?**

*« Je sens qu'il y a trois dimensions dans l'espace, et que les nombres sont infinis ; et la raison démontre ensuite, qu'il n'y a point deux nombres carrés, dont l'un soit double de l'autre. Les principes se sentent ; les propositions se concluent ; le tout avec certitude, quoique par différentes voies. Et il est aussi ridicule que la raison demande au sentiment, et à l'intelligence des preuves de ces premiers principes pour y consentir, qu'il serait ridicule que l'intelligence demandât à la raison un sentiment de toutes les propositions qu'elle démontre. »* Pascal, *Pensées* (1670)

#### **La raison démonstrative, un progrès sur l'expérimentation ?**

*« Les Géomètres ont toujours jugé que ce qui ne se prouve que par induction ou par les exemples en Géométrie ou en Arithmétique, n'est jamais parfaitement prouvé. Par exemple l'expérience nous apprend que les nombres impairs ajoutés ensemble continuellement par ordre, produisent par ordre les nombres carrés, c'est-à-dire qui viennent en multipliant un nombre par soi-même. Ainsi 1 et 3 fait 4, c'est-à-dire 2 fois 2, et 1 et 3 et 5 fait 9, c'est-à-dire 3 fois 3. Et 1 et 3 et 5 et 7 fait 16, c'est-à-dire 4 fois 4. Et 1 et 3 et 5 et 7 et 9 fait 25, c'est-à-dire 5 fois 5. Et ainsi de suite.*

*Cependant quand on l'aurait expérimenté cent mille fois, en continuant le calcul bien loin, on peut bien juger raisonnablement que cela réussira toujours ; mais on n'en a point pour cela de certitude absolue, à moins qu'on n'en apprenne la raison démonstrative, que les Mathématiciens ont trouvée il y a longtemps. Et c'est sur ce fondement de l'incertitude des inductions, mais un peu trop poussé, qu'un Anglais a voulu soutenir dernièrement, que nous pourrions nous empêcher de mourir. Parce que (dit-il) la conséquence n'est pas bonne ; mon père, mon aïeul, et mon bisaïeul sont morts et tous les autres qu'on a vus avant nous : donc nous mourrons aussi. Car leur mort n'a point d'influence sur nous. Le mal est que nous leur ressemblons un peu trop, en ce que les causes de leur mort subsistent aussi en nous. Car la ressemblance ne suffirait pas pour tirer des conséquences certaines, sans la considération des mêmes raisons. »* Leibniz, *Lettre touchant ce qui est indépendant des sens et de la matière* (1702)

#### **Éloge de l'art de démontrer**

*« (...) personne ne peut distinguer le vrai du faux, si la capacité de démontrer ne lui est pas familière. Or, nous avons montré ailleurs que la science de la démonstration concernait la seule Géométrie. »* Discours prononcé à Poitiers par Jacques Peletier, 1579, in *Plot*, n°74

#### **L'apanage des savants, des seuls hommes aptes à pratiquer l'examen rationnels ?**

*« Ce que doivent faire les chefs politiques des Musulmans, c'est interdire ceux de ses livres qui contiennent la science à qui n'est pas homme à pratiquer cette science, tout comme il leur incombe d'interdire les livres de démonstration à tous ceux qui ne sont hommes à les pratiquer, quoique les*

*dommages survenant aux gens du fait de ces derniers soient bien moins graves (...) » Averroès, Discours décisif § 46 (vers 1179)*

### **Démontrer pour s'abstenir de réfléchir ?**

*« La démonstration suit une voie qui commence en un point quelconque sans qu'on sache encore le rapport de ce commencement au résultat qui doit en sortir. Le cours de la démonstration compte telles déterminations et tels rapports, et en écarte d'autres sans qu'on puisse se rendre compte immédiatement selon quelle nécessité cela a lieu ; une finalité extérieure régit un tel mouvement. L'évidence de cette connaissance défectueuse dont la mathématique est fière, et dont elle fait parade contre la philosophie, repose seulement sur la pauvreté de son but et sur la défectuosité de sa matière. » Hegel, La Phénoménologie de l'Esprit (1806)*

### **La nécessité**

#### **Percevoir la nécessité ?**

*« Ils se servent de figures visibles et ils raisonnent sur ces figures, quoique ce ne soit point à elles qu'ils pensent, mais à d'autres auxquelles celles-ci ressemblent. Par exemple c'est du carré en soi, de la diagonale en soi qu'ils raisonnent, et non de la diagonale telle qu'ils la tracent, et il en faut autant de toutes les autres figures. Toutes ces figures qu'ils modèlent ou dessinent, qui portent des ombres et produisent des images dans l'eau, ils les emploient comme si c'étaient aussi des images, pour arriver à voir ces objets supérieurs qu'on n'aperçoit que par la pensée. » Platon, La République, livre VI, 510c-510e (vers -380)*

#### **Nier le relativisme, à quoi bon ?**

Socrate à Hermogène : *« Si toutes choses ne sont pas pareilles à la fois et toujours pour tout le monde, et si d'autre part chacune n'est pas propre à chacun, il est clair que les choses ont en elles-mêmes une essence fixe, qu'elles ne sont ni relatives à nous, ni dépendantes de nous, qu'elles ne sont point tirées dans tous les sens au gré de notre imagination, mais qu'elles existent par elles-mêmes selon l'essence qui leur est naturelle. » Platon, Cratyle, 386 d (vers -385)*

#### **Démonstration et nécessité**

*« C'est par la Lumière naturelle que l'on reconnaît aussi les Axiomes de Mathématique ; par exemple que, si de deux choses égales on retranche la même quantité, les choses qui restent sont égales ; item que si dans une balance tout est égal de part et d'autre, rien ne penchera, ce qu'on prévoit bien sans l'avoir jamais expérimenté. Et c'est sur de tels fondements qu'on établit l'Arithmétique, la Géométrie, la Mécanique et les autres sciences démonstratives, où à la vérité les sens sont bien nécessaires pour avoir certaines idées des choses sensibles, et les expériences sont nécessaires pour établir certains faits, et même utiles pour vérifier les raisonnements comme par une manière d'épreuve. Mais la force des démonstrations dépend des notions et vérités intelligibles, seules capables de nous faire juger de ce qui est nécessaire, et même capables, dans les Sciences conjecturales, de déterminer démonstrativement le degré de la probabilité sur certaines suppositions données, pour choisir raisonnablement entre les apparences opposées, celle qui est la plus grande. Quoique cette partie de l'art de raisonner n'ait pas encore été aussi cultivée qu'elle le devrait être. » Leibniz, Lettre touchant ce qui est indépendant des sens et de la matière (1702)*

#### **Le déterminisme métaphysique**

*« Il est bien vrai qu'il y a une connexion universelle entre tout ce qui est dans la Nature, tant dans le physique que dans le moral : chaque événement lié à celui qui le précède, et à celui qui le suit, n'est qu'un des anneaux de la chaîne qui forme l'ordre et la succession des choses : s'il n'était pas placé comme il est, la chaîne serait différente, et appartiendrait à un autre Univers. » Pierre Louis Moreau de Maupertuis, Lettre sur la Comète (1742)*

### **Où mène l'impatience du génie**

« (...) les mathématiciens se sont trouvés entraînés, sans s'en apercevoir, bien loin des règles originaires » Maine de Biran, *Mémoire sur les rapports de l'idéologie et des mathématiques* (1802)

### **Pourquoi une règle plutôt qu'une autre ? Est-ce pour rien, dès lors que l'important serait de fixer une règle ?**

« Considérée de l'extérieur, la nécessité ou la validité que nous reconnaissons à une règle ne peut échapper à la contingence. » Jean-Pierre Cometti, *Philosopher avec Wittgenstein* (1996)

### **L'égalité**

#### **Le vrai partage**

Match de football sur l'île Nulle :

« La rencontre oppose l'équipe de l'Est à celle de l'Ouest, deux villes de l'île. Superbe, dramatique, élégante, elle s'achève sur le résultat de trois buts à un, au bout de quatre-vingt-dix minutes. Les matelots se lèvent alors pour quitter le spectacle et rentrer dormir. C'était le soir. Mais non, mais non, clame la foule, ce n'est pas fini.

La partie reprend de plus belle et, sous des torches vives, se prolonge dans la nuit. Le temps passe et les anciens matelots ne comprennent plus : exténués, hors de souffle, les joueurs tombent les uns après les autres, jambes dévorées de crampes. Mais, têtue, la rencontre continue. Chaque équipe marque et, vers les petites heures de l'aube, on en est à huit à sept. Cela devient ennuyeux.

Tout à coup, la population se lève, agite bras et mains hurle sa joie, tout prend fin : (...) » Michel Serres, *Le Tiers-Instruit* (1991)

#### **À chacun la même part ou à chacun selon son mérite ?**

« La société prétendument généreuse et aveugle aux différences est non seulement inhumaine (parce qu'elle supprime les identités), mais aussi hautement discriminatoire par elle-même, d'une façon subtile et inconsciente. » Charles Taylor, *Multiculturalisme. Différence et démocratie* (1992)

#### **À mi-chemin entre la vérité et l'erreur, la suspension du jugement**

« La formule "je suspend mon jugement" signifie pour nous que le sujet est incapable de dire à quelle chose il convient d'accorder ou de refuser créance. Nous entendons par là que les objets nous procurent des représentations également dignes et indignes de foi. Remarquons bien que nous n'affirmons rien touchant leur égalité effective ; mais que cette égalité porte seulement sur notre représentation, telle qu'elle vient nous affecter. » Sextus Empiricus, *Hypotyposes pyrrhoniennes I*, 196 (II<sup>ème</sup> siècle)

#### **2+2=4**

« À la question "Deux plus deux font-ils quatre ?", un Allemand répondrait non : "deux et deux ne font pas quatre" ; en allemand, on dit "zwei und zwei ist vier", deux et deux est quatre. Et en espagnol, "dos y dos son cuatro" : deux et deux sont quatre. L'allemand met l'accent sur l'opération d'addition, l'espagnol sur la juxtaposition, le français sur leur action mutuelle. » Didier Nordon, *Deux et deux font-ils quatre ? Sur la fragilité des mathématiques* (1999)

#### **L'adégalité**

« (...) je le compare au premier solide, comme s'ils étaient égaux, quoiqu'en fait ils ne le soient. C'est cette comparaison que j'appelle adégalité pour parler comme Diophante, car on peut ainsi traduire le mot grec *παρισότης* dont il se sert » Pierre de Fermat à Descartes, *Methodus ad disquir. max. et min.*, cité par G. Guilbaud, *Leçons d'à peu près* ()



### **Les équations, s'agit-il de pseudo-propositions vides de sens ?**

« Si deux expressions sont combinées à l'aide du signe d'égalité, cela veut dire qu'elles sont substituables l'une à l'autre. Mais si cela est le cas, cela doit se montrer dans les deux expressions elles-mêmes. C'est une caractéristique de la forme logique de deux expressions, qu'elles puissent être substituées l'une à l'autre. » Ludwig Wittgenstein, *Tractatus Logico-Philosophicus*, 6.23 (1918)

### **L'intelligence**

#### **« L'intelligence est à l'esprit ce que le mouvement est au corps »**

« Enfermer l'intelligence dans une formule, c'est la faire souffrir. Donc par définition, l'intelligence ne souffre pas de définition. Ce qui n'empêche pas d'en parler, voire de décider pour autrui de son niveau, de très bas à très haut, de sa forme, de manuelle à intellectuelle en passant par politique, de sa consistance, de molle à dure. » Stella Baruk, propos recueilli par Alain Chouffan pour un dossier sur l'intelligence du *Nouvel Observateur* (1998)

#### **« La quantification de l'intelligence est détestable »**

« Je trouve détestable qu'on essaie de quantifier cette notion par individu en la mesurant par un paramètre. Les tests imaginés pour y parvenir mesurent une aptitude assez particulière, celle de deviner ce que les auteurs du test croient être la manifestation de l'intelligence. On ne peut réduire une notion multiforme à un paramètre. » Alain Connes, propos recueilli par Alain Chouffan pour un dossier sur l'intelligence du *Nouvel Observateur* (1998)

**Réfléchir, à défaut de voir, comme le peuvent les bienheureux, les choses dans leur lumière naturelle...**

« Cette lumière même de l'intelligence qui est en nous n'est rien d'autre qu'une certaine ressemblance par participation à la Lumière incréée, en laquelle sont contenues les raisons éternelles. » Thomas d'Aquin, *Somme théologique* (1273)

#### **Une intelligence bornée**

« L'homme est un être raisonnable ; et, comme tel, il reçoit de la science sa nourriture et son aliment, mais les frontières de l'entendement humain sont si resserrées qu'on ne peut espérer sur ce point que peu de satisfaction pour l'étendue et pour la sécurité de ses acquisitions. » David Hume, *Enquête sur l'entendement humain* (1758)

#### **« Si vous ne pouvez pas gagner, trichez »**

« De belles histoires d'amour peuvent être bâties sur un mensonge, mais elles tendent à se défaire lorsqu'elles sont confrontées à l'atroce vérité. De la même manière, des mathématiques d'apparence magnifique peuvent être fondées sur un mensonge et elles aussi peuvent se défaire lorsqu'elles sont confrontées à la dure réalité. » Ian Stewart, *Dieu joue-t-il aux dés ?* chapitre 5 « Un pendule à sens unique » (1992)

#### **La crainte suscitant la bêtise**

« Nous voyons que les plus adonnés à tout genre de superstition ne peuvent manquer d'être ceux qui désirent sans mesure des biens incertains ; tous alors surtout qu'ils courent des dangers et ne savent trouver aucun secours en eux-mêmes, implorent le secours divin par des vœux et des larmes de femmes, déclarent la Raison aveugle (incapable elle est en effet de leur enseigner aucune voie assurée pour parvenir aux vaines satisfactions qu'ils recherchent) et traitent la sagesse humaine de vanité ; au contraire, les délires de l'imagination, les songes et les puérides inepties leur semblent être des réponses divines ; bien mieux, Dieu a les sages en aversion ; ce n'est pas dans l'âme, c'est dans les entrailles des animaux que sont écrits ses décrets, ou encore ce sont les insensés, les

déments, les oiseaux qui, par un instinct, un souffle divin, les font connaître. Voilà à quel point de déraison la crainte porte les hommes. » Spinoza, Préface du *Traité théologico-politique* (1670)

## **II B Thèmes plus particuliers d'épistémologie des mathématiques et de la logique**

### **1. La mathématique**

#### **La *mathesis universalis***

« Le mot de mathématique ne signifiant rien de plus que science, toutes les disciplines mériteraient d'être appelées mathématiques, non moins que la géométrie elle-même. » Descartes, quatrième des *Règles pour la direction de l'esprit* (1628)

#### **Le « dualisme logique »**

« Il semble que la Science soit double, que la mathématique et la science de la nature, partant, pour ainsi dire des deux pôles extrêmes de la connaissance, marchent en sens inverse et aillent à la rencontre lune de l'autre. » Edmond Goblot, *Essai sur la classification des sciences* (1898)

#### **À quoi servent les mathématiques ?**

« Celui qui ne connaît pas les mathématiques ne peut apprendre aucune science, et ne peut même pas prendre conscience de sa propre ignorance. » Francis Bacon, *La Nouvelle Atlantide* (1627)

#### **L'inutile rigueur des mathématiques**

« C'est un bon mathématicien, dira-t-on, - Mais je n'ai que faire de mathématiques ; il me prendrait pour une proposition. » Pascal, *Pensées* (1670)

#### **Les mathématiques "modernes", un non-sens ?**

« (...) l'accent mis par les modernistes sur l'axiomatique est une aberration, non seulement pédagogique (ce qui est assez évident), mais aussi proprement mathématique. On n'a pas, je crois, tiré de l'axiomatique hilbertienne la vraie leçon qui s'en dégage ; c'est celle-ci : on n'accède à la rigueur absolue qu'en éliminant la signification ; l'absolue rigueur n'est possible que dans et par l'insignifiance. Mais s'il faut choisir entre rigueur et sens, je choisirai sans hésitation le sens. » René Thom, « Mathématiques modernes, mathématiques de toujours » (1974) in *Pourquoi la Mathématique ?*

#### **Les propositions mathématiques sont-elles analytiques ou synthétiques ?**

« Il faut remarquer d'abord que les propositions mathématiques proprement dites sont toujours des jugements a priori et non empiriques [...] la proposition arithmétique est toujours synthétique [...] un axiome quelconque de géométrie pure n'est pas davantage analytique. » Kant, *Prolégomènes à toute métaphysique future* (1783)

« Les lois de l'arithmétique sont des jugements analytiques et par conséquent a priori. » Gottlob Frege, *Les Fondements de l'arithmétique* (1901)

#### **Esprit de géométrie versus esprit de finesse ?**

« La vérité n'est pas une, au bout d'une chaîne logique rigide ; elle n'est pas indéterminée dans toutes les directions du discours ; elle est une plage délimitée par des axes privilégiés : reconnaître ces axes, éclairer cette plage, c'est explorer les possibles et préciser les probables, c'est appliquer aux choses la puissance de clarté et d'ordonnance de l'esprit, en un mot c'est comprendre. » Jean Ullmo, « La position moderne du début : esprit géométrique, esprit de finesse » (1946) in *Les grands courants de la pensée mathématique*

## 2.La logique

### **Qu'est-ce qu'une déduction ?**

« Déduire, c'est construire une icône ou un diagramme dont les relations des parties présenteront une analogie complète avec celle des parties de l'objet du raisonnement, faire des expériences en imagination sur cette image, et observer le résultat de manière à découvrir des relations cachées et qui étaient passées inaperçues entre les parties. » Charles S. Peirce, *Sur l'algèbre de la logique* (1885)

### **Les paradoxes logiques**

D'après Bertrand Russell, *Principles of Mathematics* § 349 (1901-1903) et *Introduction à la philosophie mathématique* chapitre XII (1921), un paradoxe exposé sous une forme triviale : dans un village, un barbier rase exactement tous les hommes qui ne se rasent pas eux-mêmes. Est-ce que le barbier se rase lui-même ?

### **La ou les logiques ?**

« Tout comme des langues comme le grec et le sanscrit sont des faits historiques et non des nécessités logiques absolues, il est raisonnable de supposer que la logique et les mathématiques sont elles aussi des formes d'expression historiques accidentelles. » John Von Neumann, *L'Ordinateur et le cerveau* (1956)

### **Un délire: refuser le principe de non-contradiction ?**

« Un des principaux préjugés de la Logique, telle qu'elle a été comprise jusqu'ici, et de la représentation, consiste à voir dans la contradiction une détermination moins essentielle et immanente que l'identité ; alors que s'il pouvait ici être question de hiérarchie et s'il fallait persister à maintenir ces deux déterminations isolées l'une de l'autre, c'est plutôt la contradiction qui serait la détermination la plus profonde et la plus essentielle. C'est que l'identité est, comparativement à elle, détermination du simple immédiat, de l'Être mort ; mais elle, la contradiction, est la racine de tout mouvement et de toute manifestation vitale ; c'est seulement dans la mesure où elle renferme une contradiction qu'une chose est capable de mouvement, d'activité, de manifester des tendances ou des impulsions. » Hegel, *Science de la logique* (1812-1816)

### **Au nom du principe de précaution, ne plus s'appuyer sur le principe du tiers-exclu ?**

« Définissons, par exemple, le nombre  $x$  de la manière suivante : dans le développement décimal de  $\pi$ , nous remplaçons le milliardième chiffre par un zéro ; donc si ce chiffre est un zéro,  $x$  sera égal à  $\pi$ , sinon  $x$  diffère de  $\pi$ . Les adeptes de la logique brouwérienne diraient que nous sommes dans un cas où ne s'applique pas le principe du tiers-exclu et qu'aucune des deux propositions " $x$  égale  $\pi$ " et " $x$  diffère de  $\pi$ ", n'est ni vraie ni fausse. » Émile Borel, « La définition en Mathématiques » (1946) in *Les grands courants de la pensée mathématique*

### **Les différents systèmes axiomatiques, des systèmes qui n'auraient pas la même valeur...**

« Nous devons être satisfaits si un système axiomatique répond au test de nos expériences mathématiques... Une véritable mathématique réaliste devrait être conçue, sur le modèle de la physique, comme une branche de la construction théorique du monde réel, et devrait adopter le même sérieux et la même attitude prudente envers les extensions hypothétiques de ses fondations que ce que l'on rencontre en physique. » Hermann Weyl, *Philosophy of Mathematics and Natural Science* (1949)

### **3. La géométrie**

#### **La conceptualisation, quelles sont ses étapes ?**

« *Insistons d'abord sur le fait qu'un concept n'a pas une forme donnée une fois pour toutes et un contenu ne varie pas. Ainsi la notion de droite nous est apparue trois fois sous des aspects de plus en plus dépouillés : une première fois comme représentation intuitive accessible même à l'esprit resté vierge de culture mathématique et telle que l'évoquent les expressions : "droit devant soi" ou "sans incliner ni à droite ni à gauche". Le second avatar peut être placé sous le signe de la géométrie grecque, tandis que le troisième est celui de la relation logique. Il n'est pas vrai que le dernier remplace les précédents et les détruit. Il ne peut exister sans eux, sans y fonder son sens, sans en recevoir sa substance.* » Ferdinand Gonseth, *Les Mathématiques et la réalité, Essai sur la méthode axiomatique* (1936)

#### **L'espace**

« *C'est quand on a voulu introduire la mesure dans le continu que nous venons de découvrir que ce continu est devenu l'espace et que la géométrie est née.* » Henri Poincaré, *La Science et l'Hypothèse* (1892)

#### **La mise en perspective**

« (...) *et, comme une ville regardée de différents côtés paraît tout autre, et est comme multipliée perspectivement ; il arrive de même, que par la multitude infinie des substances simples, il y a comme autant de différents univers, qui ne sont pourtant que les perspectives d'un seul selon les différents points de vue de chaque monade* » Leibniz, *Monadologie*, § 57 (1714)

#### **S-A+F=2**

« *Les polyèdres ordinaires sont parfois appelés polyèdres eulériens. Il serait plus approprié de trouver un nom particulier pour ceux qui ne sont pas d'authentiques polyèdres.* » Baltzer (1862) cité par Imre Lakatos, *Preuves et réfutations* (1984)

#### **Les géométries non-euclidiennes**

« (...) *si Dieu existe et s'il a vraiment créé la terre, alors, comme nous le savons positivement, il l'a faite selon la géométrie euclidienne et a créé le cerveau humain avec la seule notion des trois dimensions de l'espace. Cependant il s'est trouvé et il se trouve encore des géomètres et des philosophes, même parmi les plus éminents, pour douter que tout l'univers ou, dans un sens encore plus vaste, toute existence n'ait été créée que selon la géométrie euclidienne, ils osent même rêver que deux lignes parallèles qui, d'après Euclide, ne peuvent jamais se rencontrer sur terre, pourraient se rencontrer quelque part dans l'infini.* » Dostoïevsky, *Les Frères Karamazov* (1860)

#### **Les principes du géomètre, des principes révisibles ?**

« *On voit que l'expérience joue un rôle indispensable dans la genèse de la géométrie ; mais ce serait une erreur d'en conclure que la géométrie est une science expérimentale.* » Henri Poincaré, *La Science et l'Hypothèse* (1892)

#### **Les fractales**

« *Disons pour simplifier qu'on appelle une fractale un objet dont la géométrie peut être décrite par une dimension non entière.* » Bernard Sapoval, *Universalités et fractales* (1997)

#### **4. L'idée de nombre**

##### **Qu'est-ce donc qu'un nombre ?**

À propos du temps : « *Est-il notion plus familière et plus connue dans nous usions en parlant ? Quand nous en parlons, nous comprenons sans doute ce que nous disons. Nous comprenons aussi, si nous entendons un autre en parler. Qu'est-ce donc que le temps ? Si personne ne me le demande, je le sais ; mais si on me le demande et que je veuille l'expliquer, je ne le sais plus.* » Augustin, *Les Confessions* (400)

##### **Dénombrer, un sacrilège ?**

« *Dénombrement* : compte et détail par le menu. *David fut puni pour avoir fait le dénombrement de son peuple.* » première édition du *Dictionnaire* de l'Académie (1694)

##### **Penser le continu**

« *C'est seulement au moyen de la quantité discrète, c'est-à-dire du nombre, que l'esprit peut mesurer la quantité continue* » Jeremy Bentham, *De l'Ontologie* (1814)

##### **Le zéro**

« (...)  *dans l'Arithmétique, les zéro joints aux unités font des nombres différents comme 10, 100, 1000, et un homme d'esprit ayant mis plusieurs zéro de suite mit au dessus : unum autem necessarium. [...] Vous m'avouerez que toutes les créatures sont limitées, et que leurs limites, ou si vous voulez leur non plus ultra est quelque chose de négatif [...], par le principe de la Négation ou du Néant qu'elles renferment, par le défaut d'une infinité de perfections qui ne sont qu'un Néant à leur égard.* » Leibniz, *Dialogue effectif sur la liberté de l'homme et sur l'origine du mal* (1695)

**L'usage des quantités négatives et des quantités imaginaires, un usage dénué de scrupules ?**

« *L'expression imaginaire  $\sqrt{-1}$  et l'expression négative  $-b$  se ressemblent en cela que chacune d'entre elles, lorsqu'elle apparaît comme la solution d'un problème indique qu'il y a là quelque inconsistance ou absurdité. Pour ce qui relève de la réalité de leur signification, toutes deux sont également imaginaires, puisque  $0 - a$  est aussi inconcevable que  $\sqrt{-1}$ .* » de Morgan, *Sur l'étude et les difficultés des mathématiques* (1831)

##### **L'idée de la triade, une idée nécessaire pour générer tous les nombres**

« *Une route avec seulement un embranchement à trois voies peut avoir n'importe quel nombre d'issues, mais quel que soit le nombre de routes droites, on n'aura jamais que deux issues. Ainsi on peut construire n'importe quel nombre, aussi grand soit-il, avec des triades ; et par conséquent un nombre ne peut impliquer aucune idée radicalement différente de l'idée de trois.* » Charles S. Peirce, *Écrits sur le signe* (1.363)

##### **Enfin, la définition du nombre !**

« *Un nombre est quoi que ce soit qui est le nombre d'une classe.* » Bertrand Russell, *Introduction à la philosophie mathématique* (1921)

#### **5 Probabilité et hasard**

##### **Le déterminisme universel, une certitude universelle ?**

« *Il n'y a nul hasard dans la nature. Si l'on a compris ce qu'est la mathématique au sens philosophique, on la décèlera, désormais en toutes ses œuvres. La rigueur, l'exactitude sont les moyens de la solution, la cause du caractère, la raison de l'harmonie.* » Vernon S. Hood,

«L'architecture et l'esprit mathématique» (1946) in *Les grands courants de la pensée mathématique*

### **Parier, pourquoi pas ?**

« *La fortune incertaine est si bien maîtrisée par l'équité du calcul qu'à chacun des joueurs on assigne toujours exactement ce qui s'accorde avec la justice.* » Pascal, présentation de la « *géométrie du hasard* », « À la très illustre Académie parisienne des sciences » (1654)

### **L'ignorance des causes, cause du hasard ?**

« *Quand le hasard fait constamment échouer une entreprise, c'est peut-être la meilleure preuve qu'elle n'échoue pas au hasard.* » Antoine-Augustin Cournot, *Considérations sur la marche des idées et des événements dans les temps modernes*, tome II (1872)

### **La Loi unique du Hasard**

« *pour que l'application d'un calcul de probabilité à un phénomène concret soit possible et contrôlable par l'expérience, il suffit d'accepter une règle unique (...) la Loi unique du Hasard : "Un événement de probabilité suffisamment petite ne se produit jamais (ou plus exactement : nous devons agir comme s'il ne pouvait pas se produire)".* » Robert Fortet, « Opinions modernes sur les fondements du calcul des probabilités » (1946) in *Les grands courants de la pensée mathématique*

### **Le calcul des probabilités, un usage universel ?**

« *Les notions de combinaison et de chance, de cause et de hasard sont supérieures dans l'ordre des abstractions à la géométrie et à la mécanique, et s'appliquent aux faits de la nature vivante, à ceux du monde intellectuel et moral, comme aux phénomènes produits par les mouvements de la matière inerte.* » Antoine-Augustin Cournot, *Exposition de la théorie des chances et des probabilités* (1843)

### **Turbulences, flottements, bifurcations, le réel est-il chaotique ?**

« *Le chaos se produit effectivement dans la nature. En fait, je suis étonné de voir à quel point la Nature semble être au courant des mathématiques du chaos.* » Ian Stewart, *Dieu joue-t-il aux dés ?* (1992)

## **6. Réfléchir aux méthodes employées par le mathématicien**

### **La méthode de fausse position**

Un exemple de problème posé par Francesco Ghaligai : « *Trouve un nombre qui, ajouté à ses deux tiers, plus quatre, donne seize. Je demande quel est ce nombre.* »

Le mathématicien du XVI<sup>ème</sup> siècle pose un nombre quelconque comme solution du problème, afin, par une règle connue de découvrir le nombre qu'il cherche. Voici son propre commentaire : « *Notons que la position est un concept assimilé à la chose et qui est dénommé selon le savoir de l'esprit mais en parlant d'une chose inconnue. On fait comme si on la connaissait et on appelle alors position une quantité posée selon le cas. Bien qu'elle soit dite des Deux Positions, souvent, avec une seule position on résout le cas, c'est-à-dire qu'avec une on trouvera ce dont on a besoin.* » Ghaligai cité par Maryvonne Spiesser, *Équations du premier degré, méthode de fausse position* (Irem de Toulouse, 1983)

### **Partir du principe que la solution est trouvée !**

« *Deux récipients contiennent l'un 9 litres, l'autre 4 litres. Nous n'en connaissons que le volume total, aucune marque sur les bords ne nous donne d'autres indications. Comment pouvons nous les utiliser pour prélever exactement 6 litres d'un grand tonneau ?* » problème imaginé par Vicente Ibanez Orts pour illustrer la réflexion de George Polya, *Tangente* n°49 « Et si on cherchait à l'envers »

### **Le calcul infinitésimal dans sa version newtonienne**

« Je ne considère pas les grandeurs mathématiques comme formées de parties si petites qu'elles soient, mais comme décrites d'un mouvement continu. Les lignes sont décrites et engendrées, non par juxtaposition de leurs parties, mais par le mouvement continu de points ; les surfaces, par les mouvements de lignes ; les solides par le mouvement de surfaces ; les angles, par la rotation de leur côtés ; les temps par un flux continu ; et ainsi des autres. Considérant donc des grandeurs qui croissent dans des temps égaux sont plus grandes ou moindres, suivant qu'elles croissent avec une vitesse plus grande ou plus petite, je cherchais une méthode pour déterminer les grandeurs d'après les vitesses des mouvements ou accroissements qui les engendrent ; et nommant fluxions les vitesses de ces mouvements ou accroissements, tandis que les grandeurs engendrées prendraient le nom de fluentes, je suis tombé sur la méthode des fluxions. » Isaac Newton, *Principes mathématiques de la philosophie naturelle* (1685)

### **La méthode des fluxions sévèrement critiquée**

« Comment la fausseté des fluxions est-elle compatible avec la vérité mathématique, présentée comme la vérité par excellence ? Nous ne voulons pas dire qu'il ne faille pas recourir à de telles fictions ; mais que, chaque fois qu'on les utilise et à cette occasion, il faut avertir qu'on s'en sert ou qu'il est nécessaire d'y recourir. » Jeremy Bentham, *Chrestomathia* (1817)

### **Le raisonnement par récurrence**

Poincaré présente au livre I de *La Science et l'Hypothèse* (1894) le raisonnement de l'induction mathématique, qui est celui de la démonstration par récurrence, il en conclut « Nous [les mathématiciens] ne pouvons nous élever que par l'induction mathématique, qui seule peut nous apprendre quelque chose de nouveau. Sans l'aide de cette induction, différentes à certains égards de l'induction physique, mais féconde comme elle, la construction serait impuissante à créer la science. »

### **L'importance des symboles**

« Sans symboles, il n'y aurait pas de généralité dans les énoncés, car ce sont les seuls signes généraux ; et la généralité est essentielle au raisonnement [...]. Mais les symboles seuls n'énoncent pas ce qui est le sujet du discours ; et cela ne peut pas, en fait, être décrit en termes généraux ; cela ne peut qu'être indiqué. Aucune description ne permet de distinguer le monde réel du monde de l'imagination. D'où le besoin de pronoms et d'indices : et plus est compliqué le sujet, plus grand en est le besoin. » Charles S. Peirce, *Écrits sur le signe* (3.363)

## **7. L'histoire des mathématiques**

### **Quelles questions les mathématiciens se posent-ils ?**

Un exemple, parmi tant d'autres : *Les Arithmétiques* de Diophante (III<sup>ème</sup> siècle) premier problème du Livre IV : « Problème 1. Trouver deux nombres cubiques dont la somme soit un nombre carré. »

### **Un étrange paysage**

« Il est difficile de donner une idée de la vaste étendue des mathématiques modernes. Le mot étendue n'est pas le bon ; je veux dire une étendue fourmillant de beaux détails, non point une étendue uniforme, comme une plaine nue, mais une région d'un beau pays, vue d'abord à distance, mais qui mérite d'être parcourue d'un bout à l'autre, étudiée jusque dans ses moindres détails, vallées, cours d'eau, rochers, bois et fleurs. » Arthur Cayley cité par François Le Lionnais (1946) in *Les grands courants de la pensée mathématique*

### **Une découverte décisive de Cantor**

« Cantor a prouvé que, de quelques façons qu'on essaie de numéroter ainsi tous les nombres réels, il en restera toujours : l'ensemble des nombres réels est non dénombrable. C'était là une découverte considérable, qui a été l'origine de toute une théorie ; la théorie des ensembles, dont l'influence c'est fait sentir dans toute la mathématique. » Maurice Fréchet, « Le nombre naturel et ses généralisations » (1946) in *Les grands courants de la pensée mathématique*

### **Être ou ne plus être cartésien, brûler Euclide après l'avoir adoré ?**

« Le non-cartésianisme de l'épistémologie contemporaine ne saurait nous faire méconnaître l'importance de la pensée cartésienne, pas plus que le non-euclidisme ne peut nous faire méconnaître l'organisation de la pensée euclidienne. » Gaston Bachelard, « L'épistémologie non-cartésienne » in *La Philosophie du non* (1940)

### **Mathématique, société et idéologie**

« On ne saurait porter un jugement valable sur le développement des mathématiques en isolant arbitrairement ce développement de son contexte, de son environnement. » Jacques Chapelon, *Les Mathématiques et le développement social* » (1946) in *Les grands courants de la pensée mathématique*

### **La démonstration du théorème de Fermat**

« "Monsieur Fourier avait l'opinion que le but principal des mathématiques était l'utilité publique et l'explication des phénomènes naturels, mais un philosophe comme lui aurait dû voir que le but unique de la science, c'est l'honneur de l'esprit humain, et que sous ce titre, une question de nombres vaut autant qu'une question de système du monde", Jacobi, *Lettre à Legendre*.

*C'est donc pour l'honneur de l'esprit humain qu'Andrew Wiles a consacré quelques années de sa vie à bâtir une démonstration du théorème de Fermat – et a su trouver l'énergie inouïe de repartir à l'attaque quand il s'est avéré que la première démonstration contenait un "trou".* » Jean-Michel Kantor, « À quoi servent les mathématiques ? » in *La Recherche* (1996)

## **8. Les figures du mathématicien**

**Du trouble comportemental bénin à la folie : le mathématicien dans les fictions, un être à part !**

Cf. mathématicien comme héros schizophrène de

### **L'esprit calculateur : un esprit pervers ou la prouesse de calculer au plus juste ?**

« nous appelons aussi prudents ceux qui le sont en un domaine déterminé, quand ils calculent avec justesse en vue d'atteindre une fin particulière digne de prix, dans des espèces où il n'est pas question d'art ; il en résulte que, en un sens général, sera un homme prudent celui qui est capable de délibération. » Aristote, *Éthique à Nicomaque*, livre VI, 1140 a 25 (vers –320)

### **La bosse des maths, faut avoir un don pour faire des mathématiques ?**

« si un enfant est capable de distinguer un train d'un autobus, de fermer la porte si on lui demande et de raconter ce qu'il a fait à la récréation, il est susceptible de manier l'"abstraction" puisqu'il la manie déjà, et donc apte à faire "des mathématiques". **Il faut donc proscrire tout soupçon d'inaptitude**, soupçon qui équivaut à un poison qu'on inoculerait à un enfant et qui petit à petit le paralyserait au point de justifier ce qu'on croira alors être un jugement pertinent. » Stella Baruk, *Comptes pour petits et grands* (1997)



### **Les femmes et les mathématiques**

Hypatie, Marie-Gaëtanne Agnesi, Sophie Germain, Mary Fairfax, Sophie Kovalewski, Emmy Noether : « *Les femmes qui ont laissé un nom en mathématiques sont fort peu nombreuses, trois, quatre, cinq peut-être. Est-ce à dire, comme un préjugé courant tendrait à le faire croire, que les mathématiques, trop abstraites, sont peu conformes à l'esprit féminin ?* » Marie-Louise Dubreil-Jacotin, « Figures de mathématiciennes » (1946) in *Les grands courants de la pensée mathématique*

### **Les mathématiciens à l'abri des régimes politiques pervers ?**

Contre Hobbes qui affirme qu'un despote ne peut jamais forcer la conscience à adhérer à une idée fausse comme  $2+2=5$ , Norbert Schappacher soutient que l'idéologie nazie a pu influencé la pensée de mathématiciens, à l'instar de Teichmüller, « Questions politiques dans la vie des mathématiciens en Allemagne 1918-1935 » (1993) in *La science sous le III<sup>ème</sup> Reich*

### **Psychologie et mathématiques**

« *L'univers n'est connu de l'homme qu'au travers de la logique et des mathématiques, produits de son esprit, mais il ne peut comprendre comment il a construit les mathématiques et la logique qu'en s'étudiant lui-même psychologiquement et biologiquement, c'est-à-dire en fonction de l'univers entier.* » Jean Piaget, *Introduction à l'épistémologie génétique* (1957)

## **9 Questions d'ontologie**

### **Tenir compte de l'ubiquité des entités mathématiques**

« *Le statut de ces objets [qui sont des entités mathématiques fondamentales] est évidemment quelque chose de très difficile à expliciter parce qu'on hésite entre une situation que l'on dirait purement psychique (tout cela est dans nos cerveaux, nos synapses, et s'ils n'existaient pas ces entités n'existeraient pas) et une autre qui relèverait de la réalité objective. Je pense personnellement que c'est une vision erronée et qu'il faut donner à ces entités une existence qui est peut-être déduite par abstraction des objets concrets, mais que, néanmoins, elles ont une telle ubiquité qu'on est obligé de reconnaître qu'elles sont présentes en quelque sorte partout dans le réel.* » René Thom, *Prédire n'est pas expliquer* (1991)

### **Les parallèles n'ont-elles qu'un être hypothétique ?**

« *La droite étant telle, il est nécessaire que le triangle ait ses angles égaux à deux droits ; mais la vérité de la conséquence n'entraîne pas celle de l'hypothèse ; toutefois si la conséquence n'est pas vraie, la droite n'existe plus.* » Aristote, *Physique*, livre II, 9, 200 a 16-18 (vers -330)

### **Les concepts mathématiques sont-ils de simples abstractions ?**

« (...) *la connaissance mathématique est une connaissance rationnelle par construction des concepts. Mais construire un concept, c'est représenter a priori l'intuition qui lui correspond.* » Kant, *Critique de la raison pure* (1781)

### **Toutes les propositions mathématiques sont-elles réductibles à des énoncés de la logique ?**

« *Toute la mathématique pure, arithmétique, analyse et géométrie, s'édifie par combinaison des idées primitives de la logique ; et ses propositions se déduisent des axiomes généraux de la logique, tels que syllogisme et autres règles d'inférence.* » Bertrand Russell, *Mysticisme et Logique* (1970)

### **Le constructivisme, synthèse du platonisme et du formalisme ?**

« *Selon la pensée constructiviste, il n'y a pas de mathématique sans mathématicien.* » Roger Apéry, « Mathématique constructive » in *Penser les mathématiques* (1982)

## II C Autres thèmes

### Les ordinateurs

#### **Le cerveau est-ce un ordinateur ?**

« Il y a assurément des processus dans le cerveau qui sont intrinsèquement computationnels, par exemple lorsque nous effectuons des calculs, mais ces calculs n'ont rien d'intrinsèque, il ne s'agit de calculs que pour la conscience » « Langage, conscience, rationalité : une philosophie naturelle », entretien avec John Searle *Le Débat* (2000)

#### **La pensée du mathématicien sera-t-elle un jour parfaitement imitée par un ordinateur ?**

« Il ne peut pas y avoir d'algorithme pour l'intuition mathématique » Robert Penrose, *Les ombres de l'esprit*

#### **L'Intelligence Artificielle, est-ce un mythe ?**

« Les calculs sont relatifs à notre interprétation tout autant que les autres "productions" de l'ordinateur. La seule chose qui ait effectivement lieu dans un ordinateur qui est en train de fonctionner, ce sont des flux électriques. Nous, nous pouvons leur associer des symboles mais, la machine, elle, n'en contient pas. Le cerveau est aussi un mécanisme, mais un mécanisme causal. Il a cette propriété extraordinaire de produire la conscience. L'ordinateur en revanche ne produit rien du tout, sinon l'état suivant d'exécution du programme. En ce sens il ne s'agit pas d'un mécanisme causal. » « Langage, conscience, rationalité : une philosophie naturelle », entretien avec John Searle, *Le Débat* (2000)

#### **Un ordinateur peut-il produire une démonstration ?**

1976, démonstration du théorème des quatre couleurs par Kenneth Appel et Wolfgang Haken.

« Ma première réaction fut : "formidable ! mais comment ont-ils fait ?", j'attendais quelque intuition géniale, une démonstration dont l'idée centrale serait d'une élégance capable d'enseigner ma journée. Lorsque je connus la réponse, le fait qu'ils avaient simplement découpés la difficulté en milliers de morceaux, pour les faire tous examiner par l'ordinateur l'un après l'autre, je fus totalement déconcerté, et ma réaction fut : "si c'est cela alors ce n'était pas vraiment un bon problème". » Davis et Hersh, cités par Darce & C°, « Le théorème des quatre couleurs » (1991) in *Plot*, n°91

#### **La cryptographie**

« Si j'invente une méthode de codage dont la clé est, par exemple, une suite de chiffres situés à plus de 6 milliards de décimales de  $\pi$ , il n'existe que deux solutions pour qui voudrait décrypter mes messages : me voler la clé ou la découvrir par le calcul. Et là, eh, eh ! c'est plus facile à dire qu'à faire... » Professeur Kanada, cité in *Science & Vie junior*, (1996) dossier hors-série « Les nombres ».

### La modélisation

#### **La nature en langage mathématique**

« On doit à Huygens, sinon la première invention des horloges à pendules, du moins les vrais principes de la régularité de leurs mouvement, qu'il déduisit d'une géométrie sublime. » Voltaire, *Le Siècle de Louis XIV* (1751)

### **Des simulations presque parfaites**

Chapitre « La percolation d'invasion et l'extraction pétrolière dans les roches poreuses. Les feux de forêt et la corrosion par points. Les fractales comme forme d'équilibre » de Bernard Sapoval, *Universalités et fractales* (1997)

### **L'incroyable efficacité des mathématiques**

« *L'efficacité des mathématiques (ou son inefficacité qu'on oublie trop souvent de prendre en considération), selon les divers sens que nous lui avons donnés, ne semble ni déraisonnable ni mystérieuse. En tout cas, elle ne paraît pas plus mystérieuse que la réussite (ou l'échec) de la perception usuelle ou du processus d'acquisition de connaissances en général. L'activité mathématique significative nous apparaît, au fond, comme une sorte d'extension de la capacité perceptive, trouvant son expression spécifique dans un langage formalisé.* » Dominique Lambert, « L'incroyable efficacité des mathématiques » (1999) in *La Recherche* n°316

### **Peut-on tout modéliser ?**

« *Je m'oppose seulement à une sorte de vulgate moderne qui nous vient essentiellement de l'informatique, et qui consiste à dire que tout s'exprime en bits. Prenez n'importe quel objet dans l'univers : vous pourrez toujours fabriquer une modélisation mathématique de l'objet, et le représenter par un objet mathématique de caractère algébrique.* » René Thom, *Prédire n'est pas expliquer* (1991)

### **Faut-il toujours préférer le modèle le plus simple ?**

« *La règle de parcimonie n'exclut pourtant pas les dépenses - en l'occurrence en matière d'introduction de principes - mais celles-ci doivent être strictement nécessaires car la règle de parcimonie est - et n'est que - une stratégie d'élimination du superflu. Elle est, en fait, indissociable d'une règle d'ordre qui énonce qu'on doit chercher à épuiser la puissance explicative d'un modèle avant d'en introduire un autre. Mais cette règle n'exclut pas que, si l'on veut rendre compte du réel dans toute sa complexité, il faille, au bout du compte, un nombre considérable de principes. Cette règle d'ordre conduit à commencer par des modèles simples et abstraits et à les complexifier étape par étape pour les rapprocher du concret.* » Alban Bouvier

## **Les révolutions scientifiques**

### **Le physicien, aussi libre de créer que le mathématicien ?**

« *Les concepts physiques sont des créations libres de l'esprit humain et ne sont pas, comme on pourrait le croire, uniquement déterminés par le monde extérieur.* » Albert Einstein et Léopold Infeld, *L'Évolution des idées en physique* (1936)

### **Réviser la science, modifier la charpente théorique : science et dépassement dialectique**

« *Nous en arrivons alors à nous demander si la psychologie de l'esprit scientifique n'est pas purement et simplement une méthodologie consciente. La véritable psychologie de l'esprit scientifique serait ainsi bien près d'être une psychologie normative, une pédagogie en rupture avec la connaissance usuelle. D'une manière plus positive, on saisira l'essence de la psychologie de l'esprit scientifique dans la réflexion par laquelle les lois découvertes dans l'expérience sont pensées sous forme de règles aptes à découvrir des faits nouveaux. C'est ainsi que les lois se coordonnent et que la déduction intervient dans les sciences inductives. Au fur et à mesure que les connaissances s'accroissent, elles tiennent moins de place, car il s'agit vraiment de connaissance scientifique et non d'érudition empirique, c'est toujours en tant que méthode confirmée qu'est pensée l'expérience. Ce caractère normatif est naturellement plus visible dans la psychologie du mathématicien qui ne pense réellement que le correct, en posant une différence psychologique fondamentale entre connaissance entrevue et connaissance prouvée. Mais on en sent l'intervention*

*dans la conception essentiellement organique des phénomènes qui incruste la pensée logique dans le Monde. De toute manière, dans les essais expérimentaux, on commence par ce qu'on croit logique. Dès lors un échec expérimental, c'est tôt ou tard un changement de logique, un changement profond de la connaissance. Tout ce qui était emmagasiné dans la mémoire doit se réorganiser en même temps que la charpente mathématique de la science. Il y a endosmose de la psychologie mathématique et de la psychologie expérimentale. Peu à peu, l'expérience reçoit les dialectiques de la pensée mathématique ; l'évolution méthodologique joue exactement autour des articulations des divers thèmes mathématiques.» Gaston Bachelard, « L'épistémologie non-cartésienne » in *La Philosophie du non* (1940)*

**« la science d'aujourd'hui n'est plus la science classique »**

*« L'ambition de ramener l'ensemble des processus naturels à un petit nombre de lois a elle-même été abandonnée. Les sciences de la nature décrivent désormais un univers fragmenté, riche de diversités qualitatives et de surprises potentielles. » Ilya Prigogine et Isabelle Stengers, *La Nouvelle Alliance. Métamorphoses de la science* (1979)*

**Physiques et mathématiques**

*« Il faut rompre avec ce poncif cher aux philosophes sceptiques qui ne veulent voir dans les mathématiques qu'un langage. Au contraire, la mathématique est une pensée, une pensée sûre de son langage. Le physicien pense l'expérience avec cette pensée mathématique. » Gaston Bachelard, *L'Activité rationaliste de la physique contemporaine* (1951)*

**L'invention mathématique**

*« La métamathématique de Cantor a ouvert à la pensée l'éblouissante perspective de son propre Infini. » Henri Eyraud, « Transfinis et alephs » (1946) in *Les grands courants de la pensée mathématique**

**Un cas de gödelite virulente ?**

*« D'une part, les avancées de la micro-physique atteignaient un type de réalité devant laquelle défailait le principe de non-contradiction. D'autre part, le théorème de Gödel établissait l'indécidabilité logique au sein des systèmes formalisés complexes. Dès lors, ni la vérification empirique ni la vérification logique ne sont suffisantes pour établir un fondement certain à la connaissance. Celle-ci se trouve du coup condamnée à porter en son cœur une béance irréfermable. » Edgar Morin, *La Méthode. 3. La Connaissance de la connaissance* (1986)*

**Réflexions éthiques et esthétiques**

**Le pouvoir de créer**

*« L'Essence des Mathématiques, c'est leur liberté. » Georg Cantor cité par François Le Lionnais (1946) in *Les grands courants de la pensée mathématique**

**Les mathématiques sévères, les mathématiques saintes**

*« Arithmétique ! Algèbre ! Géométrie ! Trinité grandiose ! Triangle lumineux ! [...] Vos pyramides modestes dureront davantage que les pyramides d'Égypte, fourmillières élevées par la stupidité et l'esclavage. La fin des siècles verra encore, debout sur les ruines du temps, vos chiffres cabalistiques, vos équations laconiques et vos lignes sculpturales siéger à la droite vengeresse du Tout-puissant, tandis que les étoiles s'enfonceront, avec désespoir, comme des trombes, dans l'éternité d'une nuit horrible et universelle, et que l'humanité grimaçante songera à faire ses comptes avec le jugement dernier. » Lautréamont, *Les chants de Maldoror*, deuxième chant (1868)*

### **Quitter sa tour d'ivoire ?**

« *L'idée d'une éthique mathématique n'a guère de sens.* » Alain Connes in *Matière à pensée*, entretiens avec Jean-Pierre Changeux (2000)

### **La beauté des mathématiques**

« *Les mathématiques, à les bien comprendre, possèdent non seulement la vérité, mais la suprême beauté* » Bertrand Russell cité par François Le Lionnais « *La beauté en mathématiques* » (1946) in *Les grands courants de la pensée mathématique*.

### **Quand les artistes font des mathématiques ...**

« *Envisageant ainsi la perspective et la représentation de l'espace comme la manifestation concrète d'un état spécifique de la civilisation, j'ai été amené à me demander si la fortune du système plastique élaboré par le Quattrocento n'était pas aussi bien liée au déclin d'une certaine forme matérielle et intellectuelle de l'activité des hommes qu'à son apparition.* » Pierre Francastel, *Peinture et Société* (1956)

### **Les jeux mathématiques**

Titre d'un ouvrage imprimé et publié à Lyon en 1669 « *Récréations mathématiques, composées de plusieurs problèmes plaisans et facétieux d'Arithmétique, Géométrie, Astrologie, Optique, Perspective...* Et d'un recueil de plusieurs gentilles & récréatives inventions de feux d'artifices » par J. Laurechon

### **La signification ultime des mathématiques**

« *La question des fondements et de la signification ultime des mathématiques reste ouverte ; nous ne savons pas dans quelle direction elle trouvera sa direction ultime et même si une réponse finale objective peut être attendue. Mathématiser pourrait bien constituer une activité créatrice de l'homme, comme le langage ou la musique, dont l'originalité est tout à fait fondamentale, et dont les décisions historiques défient la rationalisation objective complète.* » Hermann Weyl *Philosophy of Mathematics and Natural Science* (1949)

### **L'infini**

#### **L'infini, un piège pour le bon sens ?**

« *Il y a des Infinis plus grands que d'autres Infinis [...] La collection de tous les nombres tant pairs qu'impairs est infinie ; et elle est donc plus grande que la collection de tous les nombres pairs, et elle est néanmoins infinie.* » Robert Grosseteste (XIII<sup>ème</sup> siècle)

#### **Pourquoi opposer ce qui est *infini* et ce qui est *indéfini* ?**

« *Il y a cette différence entre infini et indéfini, que dans l'idée d'infini on fait abstraction de toutes bornes, et que dans celle d'indéfini on fait abstraction de telle ou telle borne en particulier.* » D'Alembert, article « *Infini* » de l'*Encyclopédie* (1751)

#### **L'infini peut-il être un concept positif ?**

« *Connaissons donc notre portée. Nous sommes quelque chose et ne sommes pas tout. Ce que nous avons d'être nous dérobe la connaissance des premiers principes qui naissent du néant, et le peu que nous avons d'être nous cache la vue de l'infini* » Pascal, *Pensées* (1670)

#### **L'infiniment grand et l'infiniment petit : des façons de parler qui cachent un défaut de rigueur ?**

« *Rappelons-nous que nous traitons d'infinis et d'indivisibles, inaccessibles à notre entendement fini, les premiers à cause de leur immensité, les seconds à cause de leur petitesse. Pourtant nous*

constatons que la raison humaine ne peut s'empêcher de sans cesse y revenir. » Galilée, *Discorsi* (1638)

### **Combien y a-t-il de choses dans le monde ?**

« La question de savoir combien il y a de choses dans le monde me paraissait une question purement empirique, je ne pensais pas que le logicien, en tant que tel, pouvait se permettre d'avoir une opinion sur le sujet. » Bertrand Russell, *Histoire de mes idées philosophiques* (1959)

## **Les sophismes**

### **Le sophisme paresseux**

Si tu es malade, il est fatal, ou que tu guérisses ou que tu meures, quel que soit ton destin, il est inutile que tu te soignes. (formulation tirée du *De Fato* de Cicéron, XII, 28 et XIII, 30)

### **Le cornu**

« S'il est une chose que tu n'as pas perdue, tu la possèdes ; or tu n'as pas perdu de cornes ; tu as donc des cornes. » Ebulide de Milet, cité par Diogène Laërce, *Vie et sentences des philosophes illustres*, VII, 187

### **Le menteur**

« Si tu dis que tu mens et si tu dis vrai, est-ce que tu mens ou est-ce que tu dis vrai ? » Cicéron, *Premiers Académiques*, XXIX, 95 (- 45)

### **Une explication du syllogisme par l'exemple**

« Le Vieux Monsieur : C'est très beau la logique.

Le Logicien, au Vieux Monsieur : À condition de ne pas en abuser...

*Autre syllogisme : tous les chats sont mortels. Socrate est mortel. Donc Socrate est un chat.*

Le Vieux Monsieur : Et il a quatre pattes. C'est vrai, j'ai un chat qui s'appelle Socrate.

Le Logicien, au Vieux Monsieur : Vous voyez... »

Eugène Ionesco, *Rhinocéros* (1959)

### **Achille et la tortue, un sophisme ?**

Article Zénon, note G, du *Dictionnaire historique et critique* de Pierre Bayle (1<sup>re</sup> éd. 1695-1697)

« "Joyau" (...) Je ne connais pas de meilleure qualificatif pour le paradoxe d'Achille, si indifférent aux réfutations décisives qui l'anéantissent depuis plus de vingt-trois siècles que nous pouvons bien le saluer comme immortel. » Jorge Luis Borges, « La course perpétuelle d'Achille et la tortue » in *Discussion* (1932)

## **Les expériences de pensée**

À ce dernier thème, nous réservons un traitement complet. Il peut en effet apparaître très différent des précédents qui ont sans doute immédiatement une résonance dans l'esprit des élèves. Il s'agit maintenant d'un thème pour lequel il semble difficile de faire partir des représentations et préjugés ordinaires des élèves. Bien peu connaissent l'existence des expériences de pensée. Le plus approprié semble donc de fournir directement aux élèves des expériences de pensée, sous la forme de leur scénario de base en proposant aussi bien des expériences imaginées par des philosophes que des scientifiques.