

# La frontière entre les mathématiques mixtes et les mathématiques appliquées

## Présentation par les professeurs

Ce sujet a été retenu par un groupe de quatre élèves de terminale S, issus de deux classes du Lycée Sarda Garriga de Saint-André, île de la Réunion. Deux d'entre eux ont pu assister au début de l'année scolaire à une conférence d'histoire des mathématiques faite par Christian Gillain à l'Université de Saint-Denis. Ils ont pris des notes, puis ils ont résumé l'exposé dont le sujet était les mathématiques mixtes et les mathématiques pures chez d'Alembert et Condorcet. Les deux autres élèves ont découvert l'intérêt d'une réflexion sur le thème à partir de ces notes et des explications de leurs collègues.

Le projet initial a d'abord été conçu comme un approfondissement de ce qui pose problème quand on parle d'une opposition entre les mathématiques pures et celles qui ne le seraient pas. Du XVIII<sup>ème</sup> siècle, de d'Alembert et de Condorcet, les élèves sont bien vite passés à une interrogation plus générale concernant les mathématiques d'aujourd'hui, leur classification possible, les paradoxes engendrés par la manière dont les mathématiciens pratiquent et conçoivent leur science.

Le résultat est donc hybride. Ce n'est pas une enquête historique proprement dite. Ce n'est pas non plus une interrogation sur les représentations que nous avons aujourd'hui des mathématiques. C'est un peu des deux. On peut regretter que les élèves n'aient pas cherché parmi les applications actuelles des mathématiques lesquelles sont les plus insolites, au titre de recherches de mathématiques pures trouvant des applications inespérées (cas récent de la cryptanalyse et cas plus ancien de la modélisation de phénomènes physiques dans le cadre de géométries non-euclidiennes par exemple).

Malgré les conseils des professeurs redoutant une certaine dispersion et une tâche plus ardue car nécessitant le traitement d'une matière très abondante, les élèves ont tenu à parler aussi bien des mathématiques contemporaines que des mathématiques du XVIII<sup>ème</sup> siècle. Ils se sont, de fait, dispersés, comme cela arrive souvent sans doute. Ainsi, ils ont découvert sur Internet l'introduction du philosophe Hilary Putnam à *Qu'est ce que la vérité des mathématiques ?* dans laquelle est défendue l'idée du quasi-empirisme. Mais ils n'ont pas réussi à exploiter cette source ni à approfondir les liens entre la découverte empirique et la pure production des concepts par les mathématiciens. De même, ils ont voulu absolument représenter les mathématiques en prenant comme point de comparaison un arbre alors que cette image de l'arbre (comme dans les *Principes de philosophie* de Descartes !) ne convient guère à la représentation d'une discipline très diversifiée depuis le XIX<sup>ème</sup> siècle et qui a, en tant qu'ensemble, plutôt une apparence de filet ou de réseau. Cette image leur a permis de procéder à des analogies qui valent sans doute surtout pour penser le travail des mathématiciens jusqu'au XVIII<sup>ème</sup> siècle et non les recherches en équipes et travaux mathématiques contemporains.

Le dossier initial a été un peu revu. Pour mettre en ligne leur dossier, les élèves ont vérifié leurs informations et retravaillé des points indiqués par les professeurs pour être plus compréhensibles en certains passages.

## INTRODUCTION

**TPE d'Aurélie Chan-Fat, Vincent Léger, Aurélie Nourry et Florence Nualas (2004)**

En restant très général, on peut dire qu'une frontière est une limite séparant deux ensembles ayant des caractéristiques propres.

L'exemple qui vient tout de suite à l'esprit est celui des frontières géographiques. Chaque pays ainsi délimité est un ensemble qui est bien censé posséder ses caractéristiques propres. Or, certains croient dans l'existence de frontières naturelles, fleuves, mers, montagnes, marais, limites climatiques. Ces frontières délimiteraient des territoires qui se distingueraient par leur géomorphologie mais aussi bien par leur culture, leur histoire, souvent par leur langue... On peut se poser la question de la réalité de ces frontières en se demandant, à partir de contre-exemples, en quoi elles s'imposent aux peuples et déterminent des histoires séparées. Les Pyrénées sont la limite de la France et de l'Espagne, mais le Pays Basque est situé des deux côtés de cette frontière ! En quoi ces frontières sont-elles donc naturelles ? De plus, l'Europe tend à abolir progressivement les différences entre les modes de vie sur les deux versants de la chaîne de montagnes. Des frontières en remplacent d'autres. Des frontières se superposent à d'autres. Les seules frontières géographiques qui semblent valables seraient ainsi les limites géopolitiques, et cela seulement tant que les États les respectent ! Celles-ci délimitent des aires de souveraineté, des territoires où règnent certaines lois. Elles peuvent certes apparaître comme arbitraires, mais elles ont la force pour elles.

Dans le domaine scientifique, il y a aussi des compartiments et des séparations. On peut dire métaphoriquement qu'il y a des territoires et des frontières.

Comme le montrent les expressions de langue française, on a pris l'habitude de séparer les mathématiques en deux groupes : les "mathématiques pures" et les "mathématiques appliquées" (parfois encore appelées "mathématiques mixtes"). Donc, par définition, la frontière délimitant ces deux types de mathématiques le ferait par rapport aux caractéristiques propres et aux définitions de chacune d'elles. Ainsi, dit-on effectivement, les mathématiques pures pourrait se résumer aux mathématiques théoriques. On désigne par cet adjectif des disciplines qui seraient abstraites et, pourrait-on penser, purement intellectuelles, bref des mathématiques qui n'existeraient que pour elles-mêmes.

C'est aujourd'hui une sorte de lieu commun – même si cela ne l'a pas toujours été – que les mathématiques pures se font uniquement pour l'honneur de l'esprit humain. On évoque la "beauté" des mathématiques, comme on parle de la beauté d'un geste. Cela veut dire que le mathématicien serait alors un chercheur qui travaille sans rechercher d'applications particulières. En revanche, les mathématiques dites "appliquées" sont censées être des mathématiques utiles aux ingénieurs ou à d'autres professions...

Nous pourrions imaginer les mathématiques mixtes comme une énorme trousse à outil pour les autres sciences. En mathématiques mixtes, tout ce qui est recherché et tout ce qui est fait, avec de l'argent public ou privé, est recherché et fait pour pouvoir modéliser des phénomènes, mettre en application des théorèmes, exprimer simplement des lois de la nature, calculer des probabilités...

Ainsi, il semblerait pour l'opinion que la différence entre ces deux domaines soit très tranchée. Mais aussi évidente que semble être la différence entre ces deux sortes de mathématiques, la frontière les séparant vraiment, elle, semble très difficile à cerner lorsqu'on entre dans le détail. Car, en effet, depuis plus de trois siècles selon nos recherches et peut-être depuis encore plus loin, beaucoup ont essayé de s'atteler à la tâche de définir quelle pourrait être exactement cette frontière et où se situerait-elle. La tâche s'est avérée être dure, voire redoutable. Il n'est peut-être pas exagéré d'affirmer que, encore aujourd'hui, personne n'a encore réussi à résoudre cette énigme.

A présent, nous ne pouvons que nous demander si déterminer cette frontière entre mathématiques pures et mathématiques appliquées est finalement possible. Pourquoi cela est-il aussi difficile de séparer le théorique et le pratique, le pur et l'impur ? Cette première série de questions amène à douter des évidences à propos des recherches fondamentales. Quels sont les véritables enjeux de cette sorte de recherche ? Sont-ils cachés ? Une dernière question vient alors à l'esprit. On peut se demander s'il est juste de s'obstiner à opposer des domaines qui se chevauchent partiellement. Qui sont ceux qui souhaitent maintenir l'idée d'une opposition réelle et non seulement apparente ? Qui, aujourd'hui, essaie toujours de préciser cette frontière ? Pourquoi ?

## I Délimiter la frontière : une tâche ardue qui pose de nombreux problèmes

Commençons par clarifier ce qu'est réellement une frontière en présentant ses différents types dans un tableau.

| <u>Les différents types de frontières.</u>   |  |
|--|--|
| <p><u>Frontière naturelle.</u><br/>Une frontière naturelle est imposée par la nature. Elle ne dépend pas de l'homme. Ex: les chaînes de montagnes de l'Oural, frontière entre l'Europe et l'Asie.</p>                        | <p><u>Frontière conventionnelle.</u><br/>Une frontière conventionnelle est une frontière imposée par l'homme. Ex: les bornes et clôtures des agriculteurs séparant les différents champs ; les frontières rectilignes séparant les États d'Amérique.</p>   |
| <p><u>Frontière hermétique.</u><br/>Dans le cas des frontières hermétiques, il n'y a pas d'échanges. Les ensembles sont isolés l'un de l'autre. Ex: le ballon qui sépare deux milieux qui ont des pressions différentes.</p> | <p><u>Frontière poreuse.</u><br/>Dans le cas des frontières poreuses, les échanges sont possibles. Des éléments de chacun des deux ensembles peuvent traverser la frontière. Ex: le placenta qui est une frontière entre la mère et l'enfant mais qui permet des échanges d'air par exemple.</p> |
| <p><u>Frontière linéaire.</u><br/>Cette frontière se résume à une ligne. Ex: l'Équateur.</p>   | <p><u>Frontière étendue.</u><br/>Cette frontière est un espace. Ex: les marges d'un empire, de l'empire romain.</p>  |
| <p><u>Frontière continue.</u><br/>Une frontière continue est une frontière ininterrompue. Ex: Frontière franco-italienne.</p>  | <p><u>Frontière discontinue.</u><br/>Une frontière discontinue est une frontière "coupée". Ex: la frontière européenne séparant les pays qui font partie de l'Union Européenne et ceux qui n'en font pas partie.</p>   |

On est parti avec le problème d'établir la frontière entre deux espèces constituant un même genre, les mathématiques, et ce tableau nous fait réfléchir. Il y a au moins quatre questions à se poser. Est-ce que la frontière qui sépare les mathématiques pures et les mathématiques appliquées est naturelle ou conventionnelle ? Est-elle hermétique ou bien poreuse ? Est-elle si nette qu'aucune recherche n'est à cheval, ni suffisamment pure ni suffisamment appliquée pour basculer d'un côté plutôt que de l'autre ? Peut-on dire que c'est une frontière continue ou discontinue ?

On peut partir de l'idée qu'il y a bien une frontière que tout le monde reconnaît, celle qui oppose par exemple le travail du mathématicien réfléchissant ce qu'est un angle droit et le travail du menuisier qui pour construire quelque chose doit dessiner un angle droit et couper une planche à peu près suivant cet angle. Cet exemple est donné par Aristote au début de la *Métaphysique*, livre A. Le philosophe en tire pour leçon qu'il faut distinguer les arts en fonction de leur précision et de la méthode qui leur convient. Pour un travail intellectuel donné il existe un degré de précision qui est requis. Celui qui fournit un résultat avec plus ou moins de précision est dans l'erreur. On ne va demander au menuisier la précision du géomètre ! Alors il apparaît que les mathématiques pures sont celles qui réclament le plus haut degré de précision tandis que les mathématiques appliquées en demandent moins, sans toutefois cesser d'être plus intellectuelle que pratiques. L'opposition des mathématiques pures et des mathématiques appliquées serait celle des mathématiques très rigoureuses et de celles qui le sont moins, parce qu'elles sont plus empiriques.

Dans un premier temps, la différence entre les mathématiques pures et les mathématiques appliquées semble donc plus ou moins claire, qu'on se contente de déclarations d'intentions ou qu'on se mette à la tâche de préciser systématiquement cette limite. Il en ressort que la différence majeure n'est peut-être pas ce qu'on croit. Ce n'est peut-être pas une différence notable d'objets, ni même de rigueur ou de méthodes. C'est peut-être seulement une différence au niveau de la finalité des travaux, aux yeux du public, ou bien pour les mathématiciens eux-mêmes. Est-ce que l'une n'existe que dans la perspective d'une finalité pratique et l'autre en n'ayant, tout au contraire, comme finalité que la beauté des mathématiques ?

De nombreux mathématiciens se sont succédés en s'attelant eux-mêmes à la tâche allant parfois même jusqu'à se contredire...

Que pourrions-nous tirer comme conclusion du fait que personne n'a, jusqu'à aujourd'hui, réussi à situer la frontière entre ces deux mathématiques ? Nous n'aurions en fait aucune conclusion définitive, étant placés devant une alternative. Soit la différence des domaines est artificielle, en droit. Soit, dans les faits, la détermination est seulement très difficile à réaliser d'une manière qui soit acceptable par tous, en particulier par ceux qui pourraient ne pas vouloir être relégués dans la classe des mathématiques appliquées. D'où des polémiques qui peuvent enfler.

Dans un premier temps nous verrons quelques exemples de classification qui sont apparues tout au long de l'histoire des mathématiques. Nous verrons aussi, dans un second temps, que même dans le langage courant les "maths pures" et "appliquées" s'opposent. L'opinion publique attend d'ailleurs, plus que les mathématiciens, que la différenciation entre ces deux sortes de mathématiques soit bien définie. Pour l'opinion, les mathématiques pures sont en effet les seules vraies mathématiques.

## **II Les mathématiciens se sont eux-mêmes attelés à la tâche.**

Très tôt, en Grèce, un classement des mathématiques a été réalisé.

On note à partir du XVII<sup>ème</sup> siècle une spécialisation et une professionnalisation du métier de mathématicien<sup>1</sup>. En effet, par la création de la *Royal Society of London*, en 1662<sup>2</sup>, les scientifiques et les mathématiciens voient leurs travaux pris en compte comme tels par l'État. L'Europe des savants est au seuil d'une révolution nationale. Paris puis Berlin imitent Londres. En 1666 l'Académie des Sciences de Paris est officiellement créée. Mieux, pour l'opinion, la figure du mathématicien change peu à peu. Être mathématicien n'est progressivement plus vu comme un loisir parmi d'autres, un simple luxe pour personnes ayant les moyens de se cultiver. Cela peut devenir un métier honorable. De plus, en 1699, Louis XIV édite un décret qui organise très précisément la tâche des académiciens et rétribue leurs services. Les savants sont alors payés par l'État pour leurs études et leurs expériences. Certains, comme Jean le Rond d'Alembert, qui ne font pas partie de la noblesse ou n'ont pas une fortune personnelle, peuvent donc obtenir le financement de leurs travaux.

On voit alors apparaître dans ces Académies deux grands domaines, les mathématiques et les sciences physiques. Et ces disciplines sont toutes les deux divisées en différentes classes. Le schéma est le suivant :

- la Géométrie  
- l'Astronomie            **Mathématiques**  
- la Mécanique

- la Chimie  
- la Botanique            **Les Sciences Physiques**  
- l'Anatomie

La même année, Fontenelle, secrétaire de l'Académie des Sciences de Paris célèbre pour ses discours, déclare que les mathématiques sont des sciences singulières. Ce sont elles qui permettent à la science en général d'avancer. Ainsi les mathématiques seraient des sciences vraiment fondamentales. Mais, d'après cette façon de voir les choses, on pourrait penser qu'elles ne seraient en fait qu'utilitaires. Fontenelle ajoute donc que les mathématiques paraissent inutiles parce qu'elles ne sont pas comprises. De ce fait, étant donné que les mathématiques sont essentiellement abstraites, il apparaît difficile et aussi inutile de chercher une frontière pour tenter de les classer. C'est l'opposition aux sciences physiques qui est à retenir. En face de la Géométrie pure, il y a par exemple l'optique, la balistique, etc. qui sont des branches de la Physique.

Plus tard, approfondissant ce jugement, d'Alembert écrivit un article expliquant que les mathématiques sont en réalité composées de deux sous-groupes : les mathématiques pures comprenant la géométrie et l'arithmétique, et les mathématiques appliquées, regroupant tout le

---

<sup>1</sup> Dans sa conférence faite à la Faculté de la Réunion, a insisté sur l'importance de cette professionnalisation pour l'histoire des mathématiques, pour le développement du savoir mathématique. C'est la fin des mathématiciens amateurs, comme Pascal, Leibniz, Pierre de Fermat etc. Les éléments d'histoire de ce TPE sont largement puisées dans cette conférence suivie par deux élèves du groupe.

<sup>2</sup> Sur les débuts de cette institution, voir le site suivant :

[http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Societies/Royal\\_Society.html](http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Societies/Royal_Society.html)

reste. D'après Diderot, qui est le promoteur de l'*Encyclopédie* avec d'Alembert, l'opposition des deux sortes de mathématiques est très assurée :

« *Quelques divisions comme celles des mathématiques en pures et en mixtes, qui nous sont communes avec Bacon, se trouvent partout, et sont par conséquent à tout le monde.* »  
*Observations sur la division des sciences du chancelier Bacon.*

Dans l'*Explication détaillée du système des connaissances humaines* de l'*Encyclopédie*, Diderot précise néanmoins quelles est la grande différence entre les mathématiques pures et les mathématiques appliquées. Selon lui les mathématiques sont les sciences de la quantité. Certains mathématiciens étudient la quantité abstraite, les géomètres qui étudient la quantité abstraite étendue et les arithméticiens qui étudient la quantité abstraite nombrable. Ce sont les deux parties de la science pure. Les mathématiques mixtes en revanche n'étudient pas la quantité « *seule ou indépendamment des individus réels et abstraits* », elles ont donc « *autant de divisions et sous-divisions qu'il y a d'êtres réels dans lesquels la quantité peut être considérée* ». Autrement dit, elles comprennent non pas ce qui est calculable et mesurable dans l'abstrait mais des théorèmes sur les grandeurs concrètes telles que la force des corps pour la mécanique, la lumière pour l'optique. La vraie géométrie ne se base que sur des axiomes, postulats et axiomes. Les sciences physiques, même très proches de la mathématique, comme l'astronomie, font intervenir d'autres données tirées du réel. Les mathématiques mixtes (mécanique, astronomie géométrique, optique, acoustique, pneumatique, art de conjecturer) sont hybrides, entre les deux sciences de la nature.

En 1793, dans sa classification du savoir, l'académicien Condorcet parle de la catégorie *Analyse* en la qualifiant de « *mémoire des mathématiques pures* ». L'Analyse est en fait une méthode de résolution de problèmes en les réduisant à des équations. Mais un problème se pose alors qu'on peut résumer dans la question : "Où se place l'Analyse dans la classification précédemment faite qui ne lui réserve pas de place ?"

En 1783, fut publiée l'*Encyclopédie méthodique*, œuvre monumentale qui de fait sépare les différentes disciplines en leur assignant une fonction spécifique et une valeur particulière. On note déjà la présence de cette nouvelle catégorie, l'Analyse. Mais on a du mal à bien déterminer sa place, vu l'importance rapide qu'elle acquiert. Appartient-elle aux mathématiques ou constitue-t-elle à elle seule une science ? Condorcet fit de l'Analyse une catégorie. Elle qui était précédemment une méthode va devenir un domaine des mathématiques. Selon Condorcet, l'Analyse regroupe les mathématiques pures qui ne sont pas la géométrie. En effet, il allait de soi que la géométrie appartient aux mathématiques pures, mais par l'importance que prend rapidement l'Analyse, la géométrie cesse alors d'être purement et simplement synonyme de "mathématique", pour devenir elle aussi un de ses domaines parmi d'autres. Elle est concurrencée par l'Analyse, science des fonctions, qui apparaît comme une sorte de double de la science des figures ou des structures qu'est la géométrie. Se pose alors en arrière-plan le problème de la valeur de la géométrie, qui perd de son prestige, comme si ses démonstrations avaient perdu leur privilège d'incarner la raison théorique.

À la fin du XVIII<sup>ème</sup> siècle, le recueil encyclopédique d'articles scientifiques de Jeremias David Reuss, (1750-1837), *Repertorium Commentationum a Societatibus Litterariis Editarum, Secundum Disciplinarum Ordinem*<sup>3</sup>, regroupe dans un même volume une série de disciplines que

---

<sup>3</sup> Recueil disponible sur le site Internet :

<http://www.scholarly-societies.org/history/reuss.html>

nous appellerions les sciences dures liées aux mathématiques, à côté des autres sciences dures, la biologie, la physique, l'astronomie, l'économie, la chirurgie et la médecine. Il s'agit du groupement suivant :

« *Mathesis, Mechanica, Hydrostatica, Hydraulica, Hydrotechnia, Aerostatica, Pneumatica, Technologia, Architectura civilis, Scientia navalis, Scientia militaris* »

Voici donc dix disciplines mixtes à côté des mathématiques pures. *Scientia navalis* par exemple c'est l'utilisation du sextant et les calculs de trigonométrie pour déterminer la position d'un bateau. Or, dans la « *Mathesis* » proprement dite Reuss met diverses sous-disciplines :

« *Historia literaria Matheseos, Utilitas Matheseos, Arithmetica, Geometria, Stereometria, Trigonometria plana, Trigonometria sphaerica, Geometria Practica, Analysis, Fractionum theoria generalior, De Quantitatibus imaginariis, Theoria Aequationum, De Seriebus, De Logarithmis, Tabulis Logarithmicis et Quantitatibus exponentialibus, De Combinationibus, De Analyysi indeterminatarum et problematis Diophantei, De Calculo infinitesimali Generalia, De Calculo integrali, Geometria Linearum curvarum* ».

Ainsi, au moment où la séparation du mixte et du pur semble réalisée avec la séparation des mathématiques et de l'astronomie ou de la physique, mais aussi de la mécanique, l'opposition demeure problématique, puisque les mathématiques regroupent un ensemble assez hétéroclite où les mathématiques utilitaires, la géométrie pratique et les tables de logarithmes côtoient la trigonométrie, la théorie des équations et l'art combinatoire (le calcul des probabilités)...

Finalement, on a l'impression, sur cette période du XVIII<sup>ème</sup> siècle, que le fait que les mathématiciens ont cherché à classer les sciences a posé de nouveaux problèmes. Il semble que les efforts isolés des mathématiciens les plus en vue à leur époque n'aient pas été couronnés de succès, comme s'ils avaient généré plus de problèmes qu'ils n'en ont résolus, avec surtout la géométrie qui a changé de sens, l'apparition d'une nouvelle catégorie qui s'est avérée difficile à classer : l'Analyse, si riche d'applications et si intéressante théoriquement.

### **III Les deux mathématiques vues par l'opinion**

Selon l'opinion, on devrait pouvoir dissocier les maths pures des maths appliquées. La différence devrait être bien tranchée. En effet, pour l'opinion, les maths pures sont des mathématiques des plus abstraites, qui ne servent à "rien" au quotidien, d'un point de vue pragmatique. De plus, en général, on imagine les maths pures comme se situant à un niveau supérieur de réflexion, comme quelque chose de destiné à des génies<sup>4</sup> ou à l'"élite intellectuelle" comme on entend dire parfois. Lorsque l'on imagine un mathématicien, n'imagine-t-on pas un savant un peu décalé de la réalité, vivant dans son petit monde, sa tour d'ivoire ? Un mathématicien serait nécessairement un homme ne travaillant que dans l'abstrait et que personne de "normal" ne peut et ne pourra jamais comprendre. N'est-ce pas là un cliché que n'importe qui pourrait avoir depuis l'antiquité ? Platon rapporte en effet l'anecdote de Thalès qui tombe au fond d'un puits parce qu'il ne regarde pas où il met les pieds et se fait moquer par une servante. Les mathématiques pures seraient réservés aux meilleurs et aucune personne "normale", ordinaire, ne

---

<sup>4</sup> Des films ont par exemple contribué à asseoir cette idée d'un lien entre talent mathématique et folie, comme *Rain man* présentant un autiste calculateur prodige ou *Un homme d'exception*, centré sur la vie du professeur Nash, génie des mathématiques et schizophrène.



pourrait comprendre les découvertes des mathématiciens purs et leurs centres d'intérêts. D'ailleurs, il est important de remarquer que les maths pures sont, dès le départ, comme mises sur un piédestal et ce, à travers le qualificatif même de « pures » qui s'est imposé, comme à travers le mot même de « *mathémata* » qui en grec veut dire "la connaissance". Ainsi, les maths pures seraient des mathématiques débarrassées de toute réflexion parasite, de toute impureté formelle, bref de toute imperfection et de tout défaut au regard de la science. En un mot, nous pouvons dire que, selon sa dénomination, les mathématiques pures nous apparaissent comme étant par extension les mathématiques parfaites.

L'opposition et le problème qui se posent à présent tout naturellement à nous concernent les mathématiques appliquées. On oppose, généralement, maths pures et maths appliquées. Si les maths pures sont les maths parfaites, les maths appliquées, par opposition, sont donc les maths imparfaites. Peut-on cependant parler de mathématiques imparfaites ? Une dévalorisation des mathématiques appliquées se met insidieusement en place. Mais il est bien évident que dans l'opinion, les mathématiques mixtes n'apparaissent pas non plus comme moins importantes et inférieures. Elles apparaissent plutôt comme plus accessibles. Car, en effet, les mathématiques appliquées se distinguent des mathématiques pures par leur caractère concret. En effet, les mathématiques mixtes travaillent avec les phénomènes observables et quantifiables, avec la réalité. La recherche dans le cadre des mathématiques mixtes serait donc facilitée puisque l'on ne travaillerait qu'avec des situations bien concrètes. Et, par là même, les mathématiques appliquées deviennent des maths plus accessibles par leur niveau de réflexion moins élevé que les mathématiques pures. De plus, les mathématiques mixtes servent à quelque chose : on peut voir leur utilité dans la réalité. Il nous apparaît, dès lors, plus facile de comprendre un mathématicien appliqué avec ses théories qu'un mathématicien pur. On arrive toujours à appliquer ses propos à une situation.

Il faut aussi remarquer que les mathématiques pures et les mathématiques appliquées s'opposent dans plusieurs situations de la vie courante. Par exemple, au niveau de la recherche scientifique, les mathématiques pures sont financées par l'État alors que la recherche en mathématiques appliquées est financée par des entreprises. Il y aurait ainsi une distinction : les maths pures appartiendraient au domaine public alors que les mathématiques mixtes seraient plus du domaine privé. On peut remarquer que les découvertes appliquées sont brevetées. De plus, du point de vue des motivations, les recherches des deux types de mathématiques sont différentes : en mathématiques pures, la recherche se fait pour le plaisir et la beauté des mathématiques alors que les motivations de la recherche en mathématiques mixtes a pour but la résolution de problèmes pratiques.

Cette opposition est aussi notable au niveau des études. En effet, lorsqu'un étudiant veut étudier les mathématiques, un choix se posera obligatoirement à lui : veut-il étudier les mathématiques pures ou seulement des mathématiques appliquées ? Dans des filières de technicien, l'étudiant n'apprend que les procédés mathématiques dont il peut avoir besoin (calcul vectoriel, probabilités, ...) C'est ailleurs qu'il peut apprendre les bases modernes de cette science, dans des filières longues. Tout en sachant que les mathématiques pures amènent à l'enseignement (CAPES ou agrégation), à la recherche (le doctorat et l'Université) mais aussi à une école d'ingénieur ! Les possibilités de faire de longues études en étudiant les mathématiques pour elles mêmes restent assez restreintes. Quant aux mathématiques mixtes, couplées ou non à

l'informatique, elles aboutissent plus vers l'industrie (avec ou non un passage dans un école d'ingénieur) et la recherche.

Nous pouvons donc remarquer qu'il existe une opposition dans le langage et dans la vie courante entre les mathématiques pures et les mathématiques appliquées. C'est pourquoi l'opinion attend une réponse de la part des mathématiciens : où se situe la frontière séparant ces deux types de mathématiques ?

#### **IV Illustration simplifiée des mathématiques, l'image de l'arbre**

Nous allons à présent essayer de vous présenter par l'intermédiaire de la représentation d'un arbre les mathématiques pures et les mathématiques appliquées ainsi que les relations qu'elles entretiennent.

Sur ce schéma, les mathématiques appliquées sont représentées par les branches. Dans la réalité, les branches d'un arbre sont toujours utilisés par d'autres éléments, d'autres êtres vivants. De même, les mathématiques appliquées utiles et essentielles à d'autres domaines scientifiques ! Ainsi, exactement comme un nid d'oiseau a besoin des branches comme base, comme une ruche a besoin de la branche pour garder son équilibre et rester suspendue, la physique, la chimie, l'astronomie, la botanique, ... ont comme base fondamentale les mathématiques appliquées. En effet, dans ces domaines, l'équilibre et la réussite sont possibles grâce au mathématiques, ne serait-ce que par le fait que tous ces domaines utilisent continuellement des procédures de calcul.

A l'opposé des branches se trouvent les racines. Leur utilité par rapport à d'autres éléments ou êtres vivants est beaucoup moins évidente et marquée. Si elles ont une utilité, c'est bien sûr pour la plante elle-même et il s'agit d'une utilité interne. Les racines servent à alimenter le "reste" de l'arbre en eau et sels minéraux. Les mathématiques pures, symbolisées par ces racines, agissent exactement de la même façon pour les mathématiques appliquées en leur fournissant non seulement des théorèmes mais encore des manières de raisonner. En effet les mathématiques pures ne servent apparemment à rien, sauf à enrichir les mathématiques en général. Elles sont produites par des chercheurs qui n'essaient pas d'être utiles à d'autres disciplines.

La partie de l'arbre qui relie les branches et les racines est le tronc. Il symbolise ici la frontière séparant les mathématiques pures et les mathématiques mixtes. Tout comme le tronc est formé de canaux qui permettent les échanges entre racines et les branches, la frontière séparant les deux mathématiques est comme nous l'avons déjà vu, poreuse et permet des échanges entre les mathématiques pures et mathématiques appliquées. Si on pose les mathématiques pures comme racines de l'arbre, et les mathématiques appliquées comme branches de ce même arbre, on peut alors dire qu'il demeure un espace assez complexe, celui du tronc, représentant la frontière entre les deux types de mathématiques. Cette partie constitue un espace d'échanges réciproques.

C'est un point important. En effet, pour l'arbre, l'eau et les sels minéraux sont amenés des racines vers les branches grâce aux xylèmes du tronc. De la même façon, il peut exister un transfert d'éléments de mathématiques pures dans les mathématiques mixtes. Et, à l'inverse, des éléments de mathématiques pures peuvent avoir pour origine des recherches conduites par des mathématiciens cherchant à produire des résultats ou des procédures utiles. Tout comme il existe

un échange de matières organiques allant des branches jusqu'aux racines, grâce aux phloèmes du tronc.

Ainsi, de même qu'au sein d'un arbre, les multiples échanges sont essentiels à sa survie, au sein des mathématiques, les échanges sont nécessaires non seulement à l'enrichissement des mathématiques mais aussi à celui des sciences en général. Bien malin celui qui dit où s'arrêtent les racines... peut-être seulement aux feuilles ! L'opposition du supérieur et de l'inférieur n'a rien d'évident, ni pour un arbre particulier, comme le banyan avec ses racines aériennes, ni pour un arbre en général puisque tronc et racines ainsi que tronc et branches sont en continuité sans qu'on puisse discerner clairement d'endroit où l'un s'arrête et où les autres commencent.

Il est certes à noter que tout comme pour les racines et les branches, au sein des mathématiques pures et mixtes, il y a des divisions, des séparations suivant les différentes notions et théories. Et, comme pour un vrai arbre, de nouvelles branches ne cessent de se développer.

## Conclusion

Dans ce TPE nous nous sommes demandés si cette frontière supposée entre les "mathématiques pures" et les "mathématiques appliquées" est réellement nécessaire. Cette interrogation renvoie à une interrogation plus fondamentale, comme si l'on changeait d'échelle. Il s'agit de la question portant sur la validité de l'opposition entre différents types de sciences et différents domaines de recherche. On croit savoir de quoi on parle quand on parle de science pure et de science appliquée. Mais ce n'est pas du tout sûr. Car dans l'exemple des mathématiques qui semblent offrir le meilleur exemple de science pure, le partage entre la science appliquée et la science pure ne se fait pas facilement. Il est possible de soutenir que le partage se fait même toujours en introduisant une coupure arbitraire d'un certain point de vue (celui du chercheur le plus souvent, puisqu'il ne segmente pas ainsi ses centres d'intérêt et son activité). Dès qu'on cherche à dépasser les préjugés ordinaires, on voit qu'il y a du théorique dans toute technique. On comprend alors qu'il y a une sorte d'interdépendance. Une nouvelle question peut apparaître sur le sens de cette interdépendance. Voyons le problème d'un point de vue philosophique.

Si l'on applique ici la méthode de la dialectique hégélienne, qui consiste à faire la négation du négatif (car la négation est considérée par Hegel comme moteur de l'évolution des idées) pour aboutir à la vérité, à la connaissance objective et au savoir, on remarque que cette fameuse frontière ne peut être fixée définitivement. En effet, ces deux domaines forment un "tout", c'est-à-dire un être dont les parties seraient réellement indissociables. Posée comme étant le négatif cette frontière qui oppose théorie et pratique est importante, capitale même pour que se développe, comme à l'abri d'influences extérieures, un type de savoir particulier. Le savoir désintéressé, le savoir pour le savoir, celui qui est fondé dans l'horreur de l'ignorance, dans la détestation de l'erreur, dans le désir de s'élever au-dessus des autres. Mais le négatif n'agit pas indéfiniment. Sa puissance protectrice s'affaiblit peu à peu. Sa vertu s'épuise en même temps que la raison d'être de la frontière perd sa pertinence originare. Progressivement oubliée, peu à peu contredite, elle doit donc être un jour dépassée. C'est le moment où il est possible de voir que le pur et le mixte sont intimement liés. D'ailleurs ils ont toujours gardé le pouvoir de s'appliquer aux "mathématiques", comprises comme totalité.

Par ailleurs, on peut dire que la recherche de cette limite a posé plus de problèmes qu'elle n'en a résolu. Ceci laisse alors à penser que cette étude sur la frontière entre les mathématiques pures et les mathématiques appliquées est une sorte de casse-tête impossible à reconstituer après qu'on l'a démonté.

Ainsi, la détermination de cette frontière nous apparaît alors comme une véritable source de polémiques. Certains en déduiront qu'il ne s'agit pas d'un problème vraiment intéressant. Toutefois nous n'avons pas eu l'impression que nos réflexions étaient une perte de temps, bien au contraire.

Certes, de près ou de loin, ce type d'interrogations ne permet pas l'avancée des mathématiques. Mais le travail de réflexions sur nos représentations de la science est indispensable. En effet, même si cette frontière est déterminée arbitrairement au bout du compte, quelque chose est acquis : l'idée qu'une science doit toujours être jugée à sa démarche qui matérialise ses vraies intentions et non à ses résultats qui contiennent une connaissance figée.

Rien ne nous permet de penser que la compréhension des mathématiques sera plus facile à l'avenir pour l'opinion ou pour les mathématiciens eux-mêmes ; le fait est que de nombreuses disciplines se sont créées depuis le XIX<sup>ème</sup> siècle (multiples branches de l'algèbre, topologie, géométries non euclidiennes, étude des fractales, mathématiques expérimentales...). Le problème est plus ardu à l'ère de l'informatique qu'à l'époque de la découverte du calcul des probabilités ou de l'invention du calcul infinitésimal. Que la frontière reste floue dans les esprits n'est pas forcément un mal. Psychologiquement, cela permet de ne pas créer une opposition de statut entre les personnes, ce qui serait peut-être l'élément déclencheur de la fin des échanges, les mathématiciens pures et mixtes se considérant comme frères ennemis et ne cherchant plus à s'entraider. La frontière, position de repli, mur d'une prison, ne délivrerait ainsi aucune réelle protection pour ce (et ceux) qui seraient à l'intérieur. Et pour les autres, elle interdirait même le progrès.

S'il faut continuer de parler d'une frontière entre les "mathématiques pures" et les "mathématiques appliquées", il faut bien insister sur le fait que cette frontière est et doit être poreuse !

## Biographies

ALEMBERT (*Jean le Rond d'*) 1717-1783

Mathématicien et philosophe français. Collaborateur de Diderot pour la *Grande Encyclopédie*, il a eu une activité mathématique importante autour de 1750, d'où son élection à l'Académie des Sciences. Également membre de l'Académie française depuis 1754, il en devint le secrétaire perpétuel en 1772. Ses apports mathématiques principaux concernent les équations aux dérivées partielles, les nombres complexes et la théorisation de la mécanique.

CONDORCET (*Marie Jean Antoine de CARITAT, marquis de*) 1743-1794

Mathématicien, philosophe, économiste et homme politique français, lié à d'Alembert, à Voltaire et à Turgot. Il fut un secrétaire actif de l'Académie des Sciences et collabora lui aussi à l'*Encyclopédie*. Bien informé des mathématiques, il voulut appliquer le calcul des probabilités à l'analyse des problèmes politiques, juridiques et moraux.

FONTENELLE (*Bernard le Bovier de*) 1657-1757

Écrivain français. Neveu de Thomas Corneille, il se fit une réputation de bel esprit et dut sa célébrité à ses traités de vulgarisation scientifique. Auteur de nombreuses comédies, tragédies, il préféra employer sa prose à exposer des aspects nouveaux de la science et de la pensée. En 1697 il fait son entrée à l'Académie des Sciences.

## Références

### Discours :

Conférence de C. Gillain :

« *Mathématiques pures, mathématiques mixtes au siècle des Lumières.* »

Dans la série « Les mots de la philosophie » d'Arté, l'intervention de Bernard Bourgeois sur la dialectique.

### Au CDI :

*Le Petit Larousse Grand Format*

ARISTOTE. *Sur le savoir philosophique, Métaphysique.* Classiques Hachette φ.

*Mathématiques au fil des âges.* Textes choisis et commentés par J. Dhombres, A. Dahan-Dalmedico, R. Bkouche, C. Houzel et M. Guillemot.

### Sur Internet :

Extrait de *Qu'est ce que la vérité des mathématiques ?* de Hilary Putnam

### Dans le recueil de textes philosophiques Magnard :

Extrait des *Règles pour la direction de l'esprit* de R. Descartes.

Extrait de *Leçon inaugurale au Collège de France* de J. Monod.