Atelier « épreuve pratique » de l'IREM de la Réunion
Année 2007-2008

TP 8 : CALCUL GRAPHIQUE DES RACINES D'UNE ÉQUATION DU SECOND OU DU TROISIÈME DEGRÉ

1. FICHE RÉSUMÉ

Titre : Calcul graphique des racines d'une équation du second ou du troisième degré

Niveau : Première S ou Terminale S

Domaine : algèbre et géométrie, résolution graphique des équations

Durée : 2 heures

Matériel : instruments de géométrie (règle, compas, double-décimètre) ; logiciel GeoGebra

2. FICHE PROFESSEUR

2.1. Analyse mathématique

Dans le prolongement des travaux de Viète sur l'équation du troisième degré, dont l'un des buts était de traduire par des constructions géométriques simples les formules algébriques peu pratiques de Cardan, Descartes a établi, dans sa *Géométrie* de 1637, que les racines de toute équation du troisième ou du quatrième degré pouvaient être obtenues par l'intersection d'un cercle et d'une parabole fixe, tracée une fois pour toutes sur la feuille de dessin. Autrement dit, en fabriquant avec soin une parabole en cuivre ou en carton, on obtient un nouvel instrument de dessin qui, joint à la règle et au compas, permet de résoudre tous les problèmes jusqu'au quatrième degré. Jusque vers le milieu du XX[e] siècle, cette méthode graphique particulièrement simple a reçu les faveurs des ingénieurs, dans la mesure où ces derniers n'ont souvent besoin que de deux ou trois chiffres significatifs des racines cherchées.

Pour le second degré, on peut écrire :

$$ax^2+bx+c=0 \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, y \ \begin{cases} y=x^2 \\ ay+bx+c=0. \end{cases}$$

Les racines apparaissent donc comme les abscisses des points d'intersection de la parabole et d'une droite facile à tracer.

En ce qui concerne l'équation réduite du troisième degré, on obtient (sous réserve que $x \neq 0$, mais il est immédiat d'exclure la racine parasite $x = 0$ si nécessaire) :

$$\begin{aligned} x^3+px+q=0 \quad &\Leftrightarrow \quad x^4+px^2+qx=0 \\ &\Leftrightarrow \quad \exists\, y \ \begin{cases} y=x^2 \\ y^2+x^2+(p-1)y+qx=0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \exists\, y \ \begin{cases} y=x^2 \\ \left(x+\dfrac{q}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{p-1}{2}\right)^2=\dfrac{q^2+(p-1)^2}{4}. \end{cases} \end{aligned}$$

Les racines apparaissent alors comme les abscisses (autres que 0) des points d'intersection de la parabole et d'un cercle qui passe par l'origine et dont le centre est facile à construire à la règle et au compas.

Enfin, en généralisant de façon immédiate les calculs précédents, les racines de l'équation réduite du quatrième degré s'obtiennent encore comme les abscisses des points d'intersection de la parabole et d'un cercle, mais, cette fois, le cercle ne passe plus par l'origine.

2.2. Niveau du TP

Pré-requis : équations de droites et de cercles, fonction carré.

Le TP peut être abordé en début de Première S comme activité préparatoire à l'étude de l'équation du second degré, ou plus tard dans l'année comme une autre manière d'aborder cette même équation. Il peut également être traité en début de Terminale S. Dans ce cas, il est envisageable de le prolonger par un second TP de 2 heures à placer après le cours sur les nombres complexes, TP consacré à la construction graphique des racines imaginaires des équations du second, troisième et quatrième degrés (les grandes lignes d'une telle séance sont suggérées en 2.4 dans le scénario d'usage).

2.3. Objectifs

Introduire une perspective historique dans l'enseignement des équations.

Réactiver des connaissances géométriques élémentaires dans un cadre nouveau et motivant.

Consolider les points suivants du programme de Seconde : « Pour un même problème, on combinera les apports des modes de résolution graphique et algébrique. On précisera les avantages et les limites de ces différents modes de résolution. On pourra utiliser les graphiques des fonctions de référence et leurs positions relatives. »

Favoriser des changements de cadre entre algèbre et géométrie, entre méthodes numériques et graphiques de résolution des équations, entre constructions géométriques traditionnelles et constructions dans un logiciel de géométrie dynamique.

2.4. Scénario d'usage

Les élèves disposent de feuilles de papier sur lesquelles la parabole a déjà été imprimée (une telle feuille est fournie en annexe). À la fin de la construction, ils mesurent avec leur double-décimètre les longueurs des segments représentant les racines. La comparaison avec les valeurs fournies par la calculatrice leur permet, d'une part, de se convaincre de la validité et de l'intérêt de la construction, d'autre part, d'évaluer leur habileté de dessinateurs.

Pour le second degré, on constate, suivant les cas, qu'il y a deux, un ou zéro point(s) d'intersection. Une réflexion sur les limites de la méthode graphique permet de dégager des outils théoriques pour dépasser ces limites : somme et produit des racines lorsqu'une seule racine apparaît dans le cadre borné de la feuille de papier, changement d'inconnue et d'équation quand aucune des deux racines n'est directement accessible ($x = 10z$, $x = 100z$, etc.).

Dans un second temps, avec un logiciel de géométrie dynamique (cf. fig. 1), des curseurs variables correspondant aux coefficients de l'équation permettent de parcourir d'une autre manière tous les cas rencontrés précédemment et à en explorer d'autres. Les figures présentées ici ont été réalisées pour l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ et non pour l'équation réduite proposée aux élèves.

Plus tard, une fois que les élèves auront étudié les nombres complexes, il sera éventuellement possible de revenir sur cette construction en se demandant comment visualiser les racines imaginaires conjuguées dans le cas où la droite ne coupe pas la parabole. En notant $\alpha \pm i\beta$ ces racines, les relations entre coefficients et racines conduisent aux formules

$$\begin{cases} \alpha = -\dfrac{b}{2a} \\ \alpha^2 + \beta^2 = \dfrac{c}{a} = \left(\sqrt{\dfrac{c}{a}}\right)^2. \end{cases}$$

Il en résulte une construction aisée des racines imaginaires, grâce au théorème de Pythagore et à l'exploitation de la parabole fixe en tant que machine à extraire les racines carrées (cf. fig. 2).

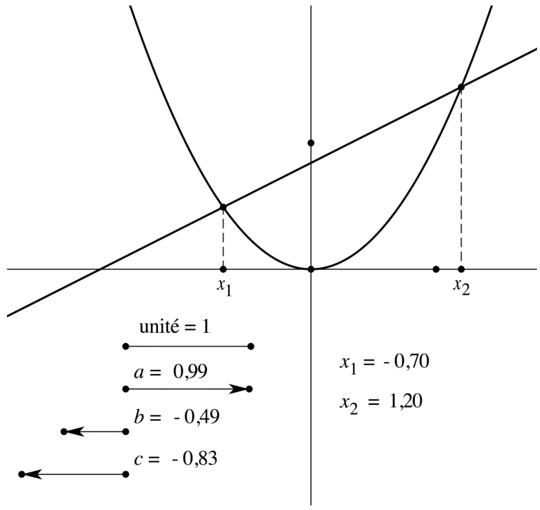


Figure 1. Équation du second degré, cas de deux racines réelles

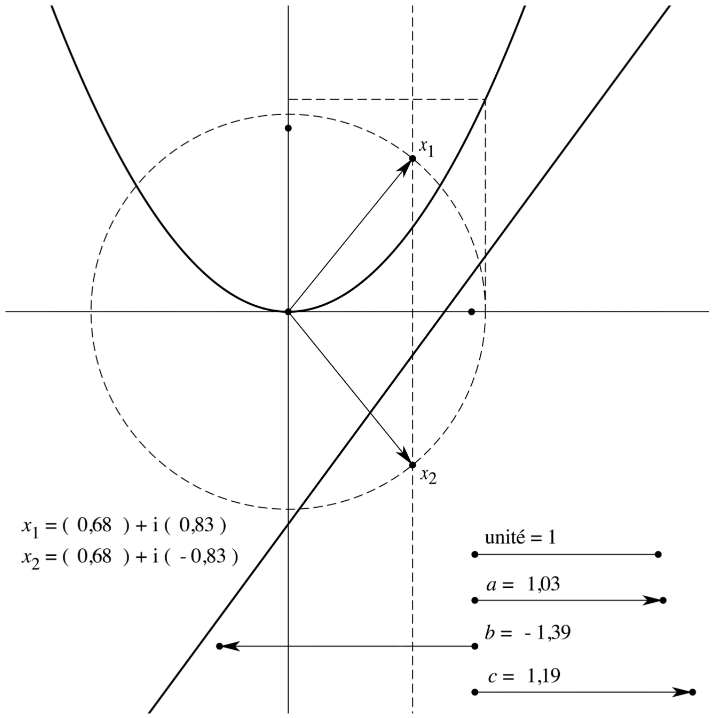


Figure 2. Équation du second degré, cas de deux racines imaginaires conjuguées

En ce qui concerne le troisième degré, le professeur peut éventuellement commencer par expliquer comment on se ramène à l'équation réduite ou demander aux élèves d'y réfléchir eux-mêmes. Les racines sont alors déterminées à partir de l'intersection de la parabole fixe et d'un cercle (cf. fig. 3). On constate qu'il y a entre un et trois points d'intersection (en excluant la solution parasite $x = 0$). Invités à justifier ce fait d'une autre manière, les élèves feront appel à l'étude de la fonction $f(x) = x^3 + px + q$ et à l'exploitation de son tableau de variation.

Là encore, les relations entre coefficients et racines conduiront, dans un possible prolongement ultérieur, à une construction des racines imaginaires conjuguées $\alpha \pm i\beta$ dans le cas où il n'y a qu'une seule racine réelle γ. On trouve les formules :

$$\begin{cases} \alpha = -\dfrac{\gamma}{2} \\ \beta^2 = p + 3\alpha^2 \end{cases}$$

qui permettent de construire α à partir de γ, puis β en exploitant la parabole pour construire le carré de α et la racine carrée de $p + 3\alpha^2$ (cf. fig. 4).

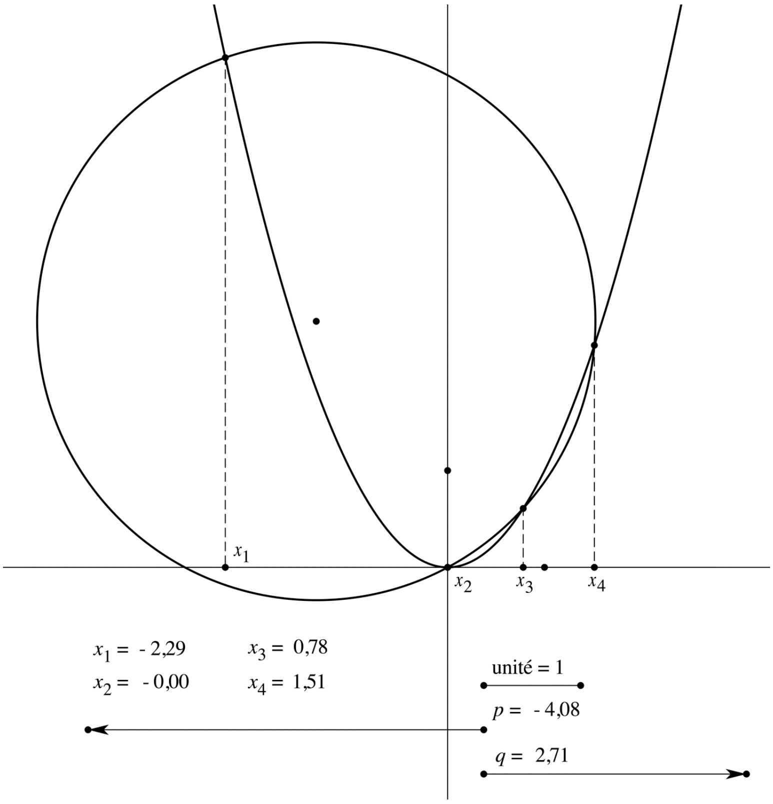


Figure 3. Équation du troisième degré, cas de trois racines réelles

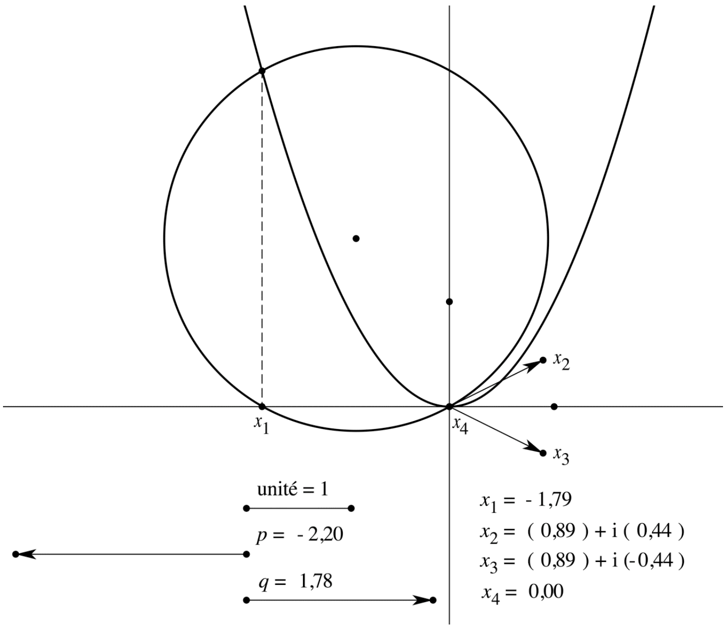


Figure 4. Équation du troisième degré, cas d'une racine réelle et de deux racines imaginaires conjuguées

Que l'on s'intéresse ou non au cas complexe, les élèves les plus motivés pourront être invités à se lancer dans un travail analogue pour le quatrième degré, toujours avec la règle, le compas et la parabole fixe.

3. Fiche élève

Le plan est rapporté à un repère orthonormé d'origine O. Pour les constructions, on prendra 2 cm comme unité de longueur et on travaillera sur la feuille fournie en annexe, sur laquelle est tracée la parabole d'équation $y = x^2$.

1. Équation du second degré

1.1. Soient p et q des nombres réels. Montrer que les racines de l'équation du second degré $x^2 + px + q = 0$ sont exactement les abscisses des points d'intersection de la parabole d'équation $y = x^2$ et de la droite d'équation $y + px + q = 0$.

1.2. Sur la feuille fournie en annexe, où est donnée la parabole d'équation $y = x^2$, construire à la règle et au compas les racines des équations suivantes. Les mesurer ensuite avec votre double-décimètre et comparer avec les valeurs approchées fournies numériquement par une calculatrice.

a) $x^2 + x - 3 = 0$;

b) $3x^2 - 5x + 1 = 0$;

c) $3x^2 - 2x + 1 = 0$;

d) $x^2 - 6x - 2 = 0$;

e) $x^2 + 2{,}2x - 19{,}1 = 0$.

1.3. Dans GeoGebra, tracer la parabole $y = x^2$, créer un point libre M de coordonnées p et q, et tracer la droite $y + px + q = 0$. Explorer à partir de là diverses équations du second degré $x^2 + px + q = 0$.

2. Équation du troisième degré

2.1. Soient toujours p et q des nombres réels. Déterminer une équation du cercle C passant par l'origine et ayant pour centre le point A de coordonnées $\left(-\frac{q}{2}, \frac{1-p}{2}\right)$. Montrer que les abscisses des points d'intersection de ce cercle et de la parabole d'équation $y = x^2$ sont exactement 0 et les racines de l'équation du troisième degré $x^3 + px + q = 0$.

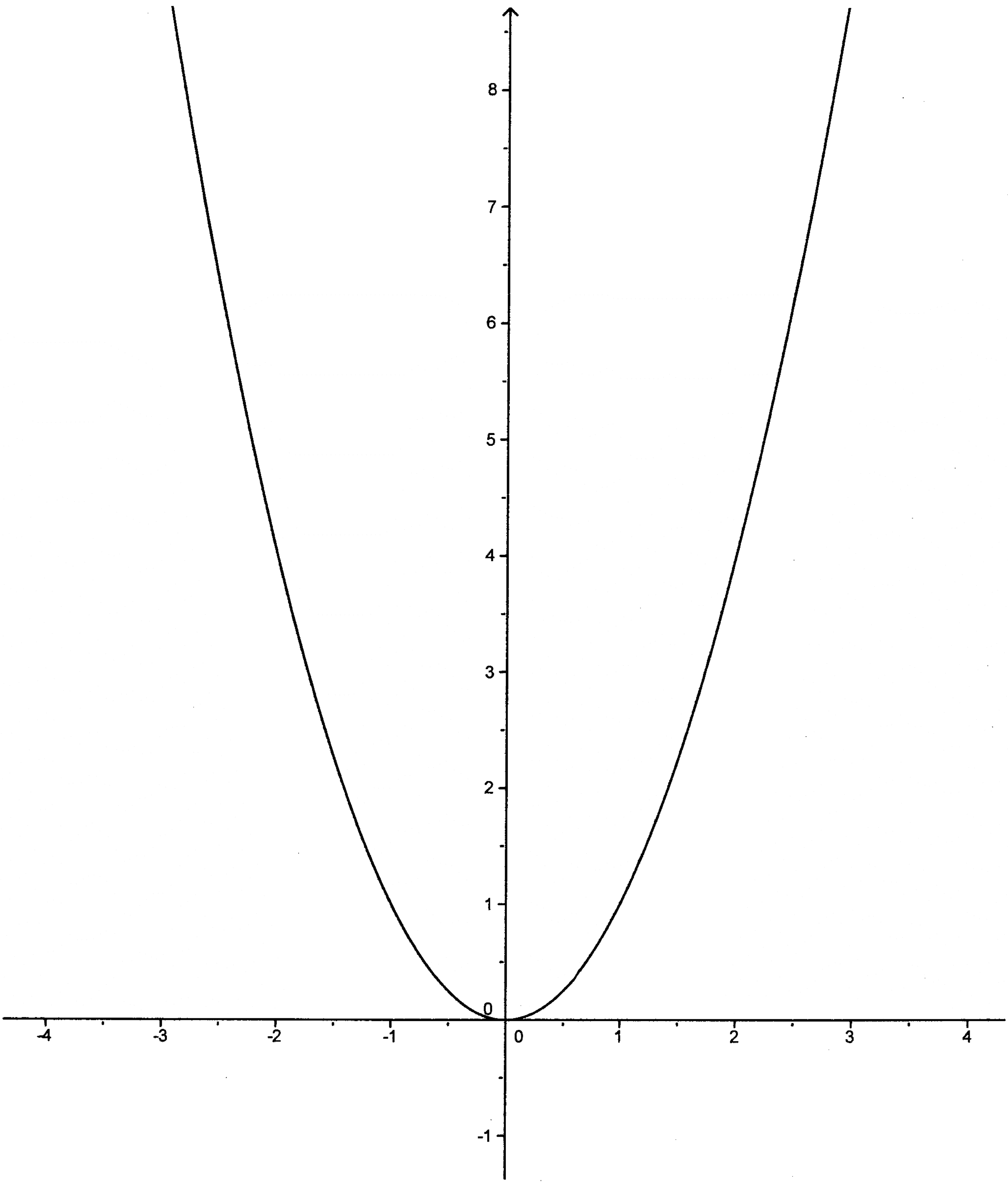
2.2. Sur la feuille fournie en annexe, calculer graphiquement les racines des équations suivantes :

a) $x^3 - 4x + 2 = 0$;

b) $x^3 - 3x + 3 = 0$.

2.3. Dans GeoGebra, reprendre la parabole $y = x^2$ et le point libre M de coordonnées p et q, et tracer le cercle C. Explorer à partir de là diverses équations du troisième degré $x^3 + px + q = 0$.

Echelle en cm: 2:1



4. Compte rendu d'expérimentation

Cette activité a été expérimentée dans une classe de terminale S. Elle a fait l'objet d'une séance de deux heures en début d'année. Elle avait été immédiatement précédée d'une autre séance de travaux pratiques consacrée à une introduction historique sur les liens entre algèbre et géométrie, et à l'apprentissage des rudiments du calcul graphique (une unité de longueur ayant été choisie, construction à la règle et au compas de la somme, de la différence, du produit et du quotient de deux nombres, et de la racine carrée d'un nombre). La séance a été suivie, plus tard dans l'année, d'une autre séance consacrée à la construction des racines imaginaires conformément à ce qui a été décrit plus haut.

Dans la construction de l'équation du second degré avec règle, compas et parabole, les élèves ont montré intérêt et motivation. Au départ, ils ont buté sur des connaissances élémentaires qu'il a fallu réactiver, comme la construction d'une droite à partir de deux points et le calcul des coordonnées d'un point d'une droite à partir d'une équation cartésienne de cette dernière. Les difficultés liées au choix de l'unité (2 cm), les imprécisions provenant de la maladresse manuelle des élèves et de la mauvaise qualité de leurs instruments, ont donné lieu à des débats intéressants lors de la comparaison avec les résultats fournis par les calculatrices. Au total, les changements de cadre entre géométrie et algèbre ont paru fructueux.

Sont fournis en annexe quatre fichiers Cabri Géomètre correspondant aux quatre figures reproduites plus haut. Ces figures, plus élaborées que celles qui sont demandées aux élèves, ont été utilisées pour la synthèse faite au tableau par le professeur en fin de séance.