Atelier « épreuve pratique » de l'IREM de la Réunion
Année 2007-2008

TP 7 : TRAJECTOIRE D'UN RAYON LUMINEUX RÉFLÉCHI PAR UN RÉFLECTEUR PARABOLIQUE

1. FICHE RÉSUMÉ

Titre : Trajectoire d'un rayon lumineux réfléchi par un réflecteur parabolique

Niveau : Première S ou Terminale S

Domaine : géométrie plane

Durée : 1 heure

Matériel : un logiciel de géométrie dynamique (GeoGebra ou Geoplan par exemple)

2. FICHE PROFESSEUR

2.1. Analyse mathématique

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$, on considère P une parabole (d'axe (O*y*) et de sommet O) d'équation $y = ax^2$, (d) une droite d'équation $x = k$ et M le point de P d'abscisse *k*.

Il s'agit de démontrer que la droite (d') symétrique de (d) par rapport à la normale à P en M passe par un point fixe (indépendant du paramètre *k*), la normale à une courbe en un point étant la perpendiculaire à la tangente en ce point.

Prolongements :

En faisant varier l'équation de la parabole, on peut conjecturer puis établir les coordonnées du foyer dans le cas général. On peut également mettre en évidence un deuxième objet intrinsèque à une parabole, sa directrice, puis entreprendre la définition d'une parabole par foyer et directrice.

Pour cela, on peut s'intéresser au lieu Δ des symétriques du foyer F par rapport à la tangente en M à P lorsque M varie, puis montrer que P est l'ensemble des points du plan équidistants de F et Δ. Ce lieu Δ est appelé *directrice* de P.

2.2. Niveau du TP

Pré-requis informatique : Maîtrise des fonctions de base d'un logiciel de géométrie dynamique. Selon les stratégies, il convient de savoir créer un paramètre, un point à partir de ses coordonnées ou un point variable libre sur une droite, une courbe à partir de son équation, la tangente à une courbe en un point et le symétrique d'un objet par rapport à un axe.

Remarque : Le choix du logiciel est une variable didactique essentielle dans cette activité. Le travail demandé est très différent selon que l'on dispose d'un logiciel à *engagement direct* comme Cabri-géomètre et GeoGebra, ou d'un logiciel comme Géoplan qui exige un programme de construction hiérarchisé et qui ne possède pas de menu « tangente à une courbe ».

Pré-requis mathématiques : Notions de nombre dérivé, tangente à une courbe, équation réduite d'une droite et une condition analytique d'orthogonalité de deux droites.

Ce TP peut être envisagé en première S après le cours sur la dérivation.

2.3. Objectifs

Il s'agit de découvrir un objet mathématique, le *foyer* d'une parabole, après l'observation d'un phénomène d'optique modélisé et décrit par des lois géométriques. On peut, dans un deuxième temps, découvrir la notion de *directrice* d'une parabole, puis montrer que le foyer et la directrice constituent deux éléments caractéristiques de la courbe.

2.4. Scénarios d'usage

La motivation première de ce TP pourrait naître d'une question : pourquoi les surfaces paraboliques (paraboloïdes de révolution) sont privilégiées pour la réalisation des récepteurs d'ondes ?

En optique, les lois de la réflexion expriment que le rayon réfléchi par une surface est le symétrique du rayon incident par rapport à la normale à la surface au point d'impact, la *normale* à une surface en un point étant la droite perpendiculaire au plan tangent en ce point.

Une fois les lois d'optique rappelées, le TP permet de découvrir expérimentalement l'existence d'un point particulier lié à chaque parabole, le foyer. Sur un réflecteur parabolique, le foyer est le point où se concentrent tous les rayons réfléchis des rayons incidents parallèles à l'axe du réflecteur. Ce point joue un rôle fondamental en optique mais est aussi un objet mathématique intrinsèque à chaque parabole.

La démonstration peut faire l'objet d'un devoir en temps libre (voir document joint).

3. Fiche élève

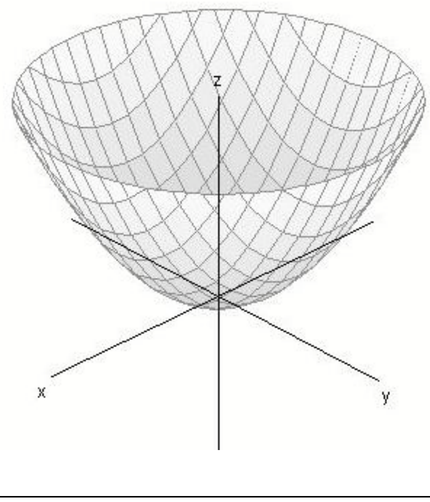
Trajectoire d'un rayon lumineux réfléchi par un réflecteur parabolique

En optique, la loi de la réflexion exprime que le rayon réfléchi par une surface est le symétrique du rayon incident par rapport à la *normale* à la surface au point d'impact ; la *normale* à une surface en un point étant la droite perpendiculaire au plan tangent en ce point.

Soit Π un plan contenant l'axe d'un réflecteur parabolique. On admet qu'un rayon incident contenu dans Π est réfléchi dans Π et on suppose que dans ce plan Π rapporté à un repère orthogonal, la section du réflecteur parabolique est une parabole P d'équation $y = \frac{1}{4}x^2$.

À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique :

- représenter la courbe P et un point mobile M sur P ;
- tracer la tangente T au point M puis la normale N à P en M ;
- construire un rayon incident (IM] parallèle à l'axe de symétrie de P ayant pour impact M, puis construire son rayon réfléchi [MR) ;
- conjecturer une propriété des rayons réfléchis.



4. Compte rendu d'expérimentation

Cette activité a été expérimentée en salle informatique avec deux groupes de 15 et 16 élèves d'une classe de Terminale S lors d'une séance de travaux dirigés (55 min).

Certains élèves se sont très vite engagés dans les constructions sans avoir complètement lu le texte et ont posé des questions naïves, d'autres ont eu du mal à s'approprier la situation, notamment dans le passage des données dans l'espace à une vision dans un plan : « Comment fait-on pour dessiner la perpendiculaire à une courbe ? » ; « C'est quoi le *point d'impact* ? ». Deux questions techniques : « Comment tracer les demi-droites ? » ; « Comment cacher certains objets ? ». En dehors de ces petites mises au point, renvois au texte et aux menus des logiciels, les constructions ont été réalisées avec succès et dans des temps raisonnables.

En revanche, conjecturer une propriété commune aux rayons réfléchis a été très laborieux. Il faut croire que le fait que les droites passent par un point fixe n'est pas en soi une propriété pour de nombreux élèves. Pourtant, certains élèves ont eu l'idée de tracer plusieurs rayons réfléchis, d'autres ont même pensé à demander la trace du rayon réfléchi construit et ont obtenu de beaux faisceaux de droites. Il a fallu discuter sur ce que pouvait être une propriété commune à plusieurs droites.

Après une petite synthèse, nous avons admis le résultat (la démonstration est proposée en devoir à la maison), puis exploré diverses situations pour conjecturer un lien entre l'équation de P et la position de F. Certains élèves ont conjecturé assez vite la relation entre l'ordonnée de F et le coefficient de x^2 ; les autres ont eu besoin des coups de pouces variés allant de faire noter les valeurs dans un tableur à demander de faire le produit des valeurs observées de a et x_F ! Ensuite, j'ai juste eu le temps de proposer la recherche du lieu des symétriques de F par rapport à la tangente T en M lorsque M décrit P.

Les devoirs à la maison ont été corrects dans l'ensemble. Pour la partie I, la mise au point a porté essentiellement sur la rédaction, notamment celle de la conclusion générale, question I.c, souvent confuse. Dans la partie II, c'est la question 2.b qui a souvent été mal traitée. Peut-être aurait-il fallu indiquer d'élever au carré.