Atelier « épreuve pratique » de l'IREM de la Réunion
Année 2007-2008

TP 4 : SUITES DÉFINIES DE FAÇON ITÉRATIVE

1. FICHE RÉSUMÉ

Titre : Suites définies de façon itérative

Niveau du TP : Première S ou Terminale S

Domaine : Suites numériques : suites définies de façon itérative. Observations sur l'influence de la valeur du premier terme ; nature des points fixes des fonctions associées.

Durée : 2 h sur poste informatique (à défaut calculatrice de type TI 89).

2. FICHE PROFESSEUR

2.1. Niveau du TP

Pré-requis : Leçon sur les différents modes de génération des suites numériques et sur la convergence des suites.

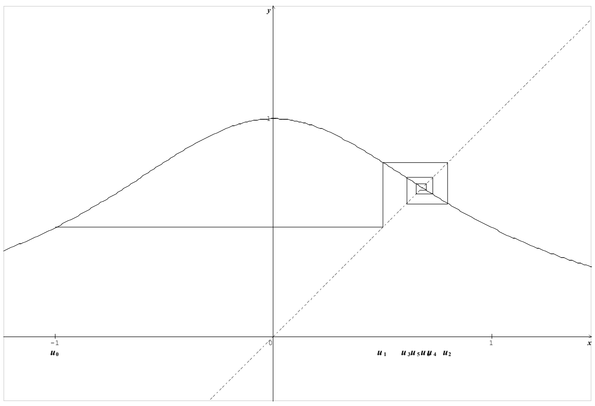
Le TP peut être abordé dès le cours sur les suites fait en première S et trouvera un prolongement naturel en terminale S.

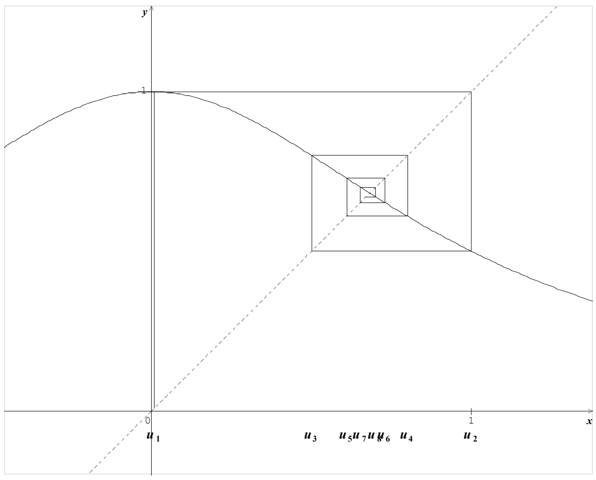
2.2. Objectifs

Le but est de mener une expérimentation sur des suites numériques définies de façon itérative par

$$\begin{cases} U_n = f(U_{n-1}), n \geq 1 \\ U_0 = a, a \in \mathbb{R} \end{cases},$$

pour observer et conjecturer leur comportement en fonction du choix de *a*.



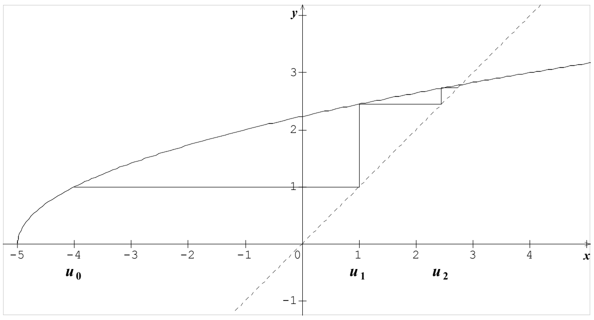


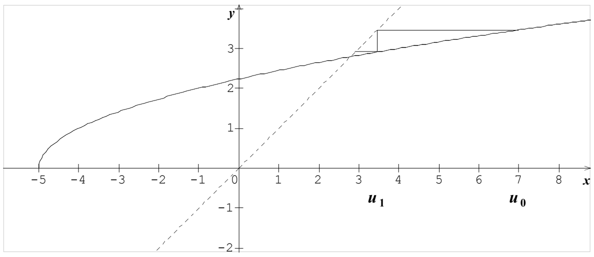
Ce travail d'observation d'un grand nombre de cas doit être fait pour que l'élève puisse s'approprier la problématique de la convergence **<u>ou non</u>** des suites permettant d'approcher les solutions des « équations à point fixe ». Ce thème, jadis peut-être trop prisé à l'examen, reste encore aujourd'hui une source de questionnement au baccalauréat (cf. bac S Île Maurice 2007). Le travail à faire sans avoir recours aux moyens informatiques, soit en classe soit à la maison, serait trop gourmand en temps et ne pourrait être raisonnablement envisagé. Il trouve donc naturellement sa place dans un TP associant l'informatique aux savoir-faire usuels.

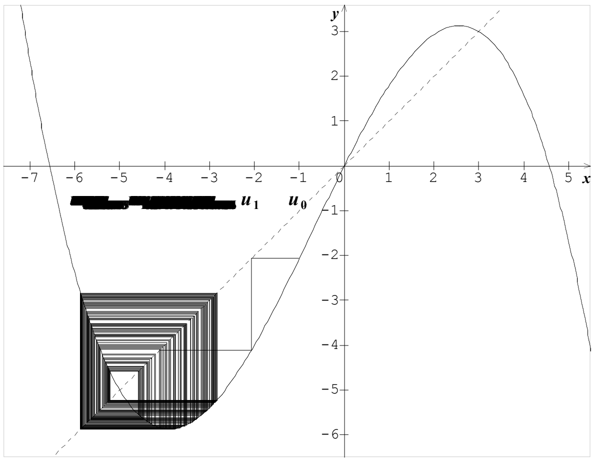
En première S on peut se contenter de rester au stade des conjectures (même si certaines preuves peuvent être envisagées en devoir maison par exemple) ; en terminale on dispose des outils pour montrer certaines convergences, les divergences restant au stade de l'intime conviction.

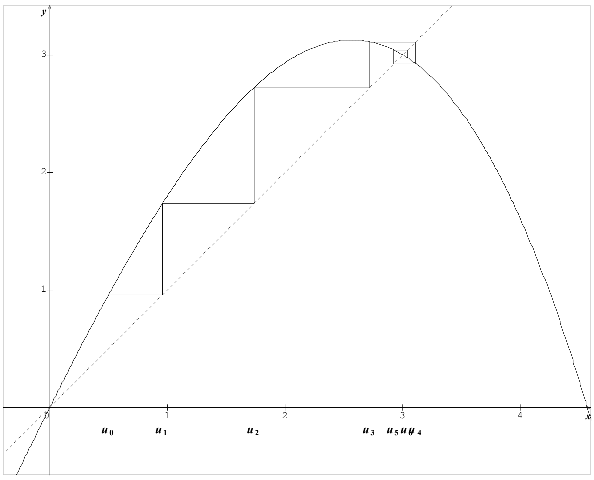
Enfin un dernier objectif est de dégager le critère permettant de prévoir la convergence de la suite vers un point fixe (cas non stationnaire) ou au contraire la divergence. La richesse du sujet en fait un terrain particulièrement adapté aux conjectures et à la mise en œuvre des savoirs.

Dans les études proposées on rencontre les différents cas de convergence (lente, rapide, en escalier, en spirale...) et une divergence.









2.3. Scénario d'usage

En présence du professeur ; devant ordinateur ; logiciels : grapheur permettant la construction des termes d'une suite définie de façon itérative (sinequanon (gratuit) ; graphe Easy (quelques euros)), tableur ; logiciel de calcul formel pour la résolution des équations $f(x) = x$. Les élèves disposent d'une dizaine de jours pour rédiger un compte rendu.

REMARQUE IMPORTANTE : l'usage de logiciels gratuits permet dans les classes où les élèves disposent de machines à la maison de demander une installation personnelle ; les élèves peuvent ainsi prolonger leur travail à la maison.

3. FICHE ÉLÈVE

Le but du TP est d'expérimenter sur des suites numériques définies de façon itérative par

$$\begin{cases} U_n = f(U_{n-1})\ ,n \ \geq 1 \\ U_0 = a\ ,a \in \mathbb{R} \end{cases},$$

pour observer ou conjecturer leur comportement en fonction du choix de a.

<u>Les outils</u> : Pour vous permettre de faire un grand nombre d'observations vous disposez :

- d'un traceur de courbe (sinequanon, etc. Calculatrice graphique (mode suite/web) ;
- d'un logiciel de calcul formel (Derive ; TI 89) ;
- d'un tableur.

Ces outils vous permettent de vous libérer de toutes les tâches de représentation et de calcul afin de faire un grand nombre d'essais pour dégager les conjectures (seulement). Quelques preuves feront l'objet d'un devoir maison.

<u>Le travail à faire</u> : Pour chaque suite proposée ci-dessous :

On déterminera les points fixes de la fonction f et on calculera en chacun d'eux le nombre dérivé de f ; on présentera les résultats sous la forme d'un tableau :

Pt fixe x_i				…
$f'(x_i)$ =				…

1. On mènera, en mettant en parallèle l'aspect graphique et l'aspect numérique, une étude sur l'influence du choix de a sur la nature de la suite (sa convergence ou sa divergence) ; on présentera les résultats sous la forme d'un tableau :

Pour $U_0 \in$ …	…		
la suite semble...	converger / diverger		
vers le point fixe...	…		
en étant monotone...	oui / non		

On fournira les figures clefs et les tables numériques jugées pertinentes pour appuyer la conjecture.

2. Enfin on essaiera, grâce à l'ensemble des études, de déterminer un critère permettant de distinguer les points fixes dits « attractifs » des points fixes dits « répulsifs ».

<u>Les suites à considérer</u> :

Étude 1 : $\begin{cases} U_n = \frac{1}{1+U_{n-1}^2}\ ,n \ \geq 1 \\ U_0 = a\ ,a \in \mathbb{R} \end{cases}$

Étude 2 : $\begin{cases} U_n = \sqrt{5+U_{n-1}},n \ \geq 1 \\ U_0 = a\ ,a \in \mathbb{R} \end{cases}$

Étude 3 : $\begin{cases} U_n = \frac{U_{n-1}+1}{2U_{n-1}}\ ,n \ \geq 1 \\ U_0 = a\ ,a \in \mathbb{R} \end{cases}$

Étude 4 : $\begin{cases} U_n = f(U_{n-1})\ ,n \ \geq 1 \\ U_0 = a\ ,\ \ a \in \mathbb{R} \end{cases}$ où $\boldsymbol{f(x) = \frac{-x^3}{15} - \frac{2x^2}{15} + 2x}$

4. COMPTE RENDU D'EXPÉRIMENTATION

Ce TP a été expérimenté dans une classe de première S en groupe après le cours sur les suites : chaque élève disposait d'un ordinateur ; le logiciel sinequanon a été manipulé pour la première fois à cette occasion et cela n'a présenté aucune difficulté.

Séance n° 1 : elle a servi surtout à s'approprier la demande

La notion de point fixe d'une fonction a été mal comprise dans le cours, ainsi que le rôle de la droite $y = x$, comme le rôle des traits de construction, des points de la courbe et des termes de la suite. De ce seul point de vue, le TP en première a été d'un intérêt certain.

Le cas particulier U_0 égal à un point fixe (cas où l'on ne voit rien à l'écran) laisse les élèves sans interprétation.

Les élèves ne sont pas très autonomes pour faire varier U_0 de façon organisée et pertinente, et distinguer les différents cas malgré la forme précise de la question.

Séance n° 2

La question de la pertinence de l'observation des valeurs affichées dans le tableur pour conjecturer la convergence d'une suite émerge avec certains élèves à l'occasion de l'observation des valeurs qui se mettent à stagner ou qui deviennent égales au point fixe.

Le point de vue unificateur pour conjecturer la convergence apparaît chez deux ou trois élèves ; pour atteindre cet objectif avec plus d'élèves, une troisième séance serait nécessaire.

Les élèves ont été gênés par le fait que les mots « attractif » et « répulsif » soient utilisés dans l'énoncé sans être définis, et demandent leur sens *a priori*. Ils n'ont eu aucun mal à leur donner du sens après étude des différents cas. Ils ont aussi douté du fait qu'on ne demande que des observations et conjectures sans aucun calcul ni preuve.

Examen des productions

Le travail demandé est substantiel ; l'étude des fonctions, la détermination des points fixes, les différents résultats à mettre en évidence demandent un travail important. Le TP travaillé pendant la période des TPE a été quelque fois rendu en retard voire incomplet.

Très peu d'élèves ont recours au calcul formel pour déterminer les valeurs exactes de certains points fixes (sans doute une assimilation insuffisante du logiciel et de ses possibilités alors que nombreux sont ceux disposant aussi d'une TI 89).

L'ensemble du travail est effectué. Il est un peu frustrant de rester au niveau des conjectures. Le TP gagnera à être suivi d'un devoir pour étudier au moins une convergence en première.

Malgré ce travail, j'ai trouvé dans le devoir surveillé sur les suites des erreurs et confusions (classiques) sur la construction des termes d'une suite récurrente, ce qui est pour le moins déroutant. Par ailleurs, les élèves ont eu tendance à introduire trop systématiquement une fonction f associée, y compris pour calculer la limite de $(2n^2 + 1)/(n^2 + 1)$ par exemple (est-ce un effet du TP ?).